

La Physique Quantique



D. Karevski, LPCT, Université de Lorraine

1) La mécanique quantique

2) L'interprétation orthodoxe

3) Intrication quantique

4) Contextualité quantique





La mécanique quantique

1925 L'illumination sur Helgoland



Werner Heisenberg 1925

Il associe à la grandeur x , qui dans la théorie classique du rayonnement correspond à la position de l'électron qui rayonne et qui est exprimée par un nombre réel, un ensemble infini de nombres complexes $[X(t)]_{nm}$ associés à toutes les transitions possibles.



Max Born

Le point de départ de Heisenberg est l'idée philosophique selon laquelle la nouvelle mécanique quantique doit être fondée exclusivement sur des relations entre quantités physiques observables. Elle ne doit pas reposer sur l'utilisation des concepts classiques habituels, comme la trajectoire d'un électron puisque, selon lui, on ne pourra jamais observer cette dernière. Il lui semble plus raisonnable d'essayer de construire une nouvelle mécanique, analogue à la mécanique classique, mais dans laquelle n'apparaissent que des quantités observables. Suivant cette conviction empiriste, Heisenberg conserve la forme des équations dynamiques de la mécanique classique mais en change l'interprétation.

1925 L'illumination sur Helgoland

$$E = \frac{1}{2} m_e \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_e \Omega_0^2 x^2.$$

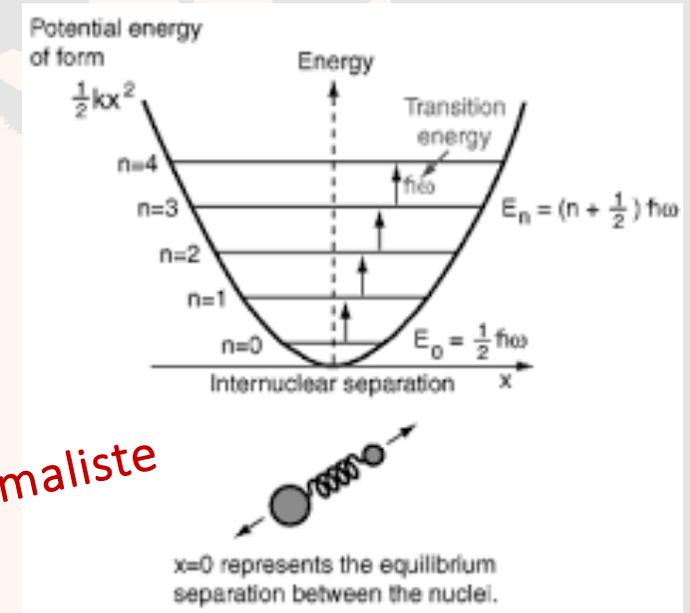
$$E_n = \frac{1}{2} m_e [\dot{X}^2]_{nn} + \frac{1}{2} m_e \Omega_0^2 [X^2]_{nn}.$$



Werner Heisenberg 1925

$$E_n = (n + 1/2) \hbar \Omega_0, n = 0, 1, 2 \dots$$

Modèle atomique minimaliste



1925 La mécanique des matrices

L'étrange équation

$$XP - PX = i\hbar$$

Mécanique quantique matricielle

$$\dot{Q} = \frac{i}{\hbar} [H, Q]$$



Max Born

1926 La mécanique ondulatoire

<< S'il y a une onde il doit y avoir une équation d'onde >>

Dans la première note de la série « Quantification et valeurs propres », Schrödinger annonce qu'il veut montrer,

sur l'exemple le plus simple d'un atome d'hydrogène (sans relativité ni perturbation), que les règles habituelles de quantification peuvent être remplacées par une autre condition, dans laquelle il n'est plus du tout question de nombres entiers. Ces nombres entiers s'introduisent de la même manière naturelle que le nombre entier des nœuds d'une corde vibrante.



1926 La mécanique ondulatoire

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(\mathbf{r})\psi = E\psi,$$

La manière correcte de concevoir ou de représenter les phénomènes mécaniques consiste à les rattacher à une propagation d'ondes dans l'espace des q et non à un mouvement de points représentatifs dans le même espace.

*Pour obtenir une représentation correcte de l'ensemble des phénomènes mécaniques réalisables, **il faut abandonner les équations fondamentales de la mécanique classique, et avoir recours à l'équation des ondes** elle-même. Les équations de la mécanique classique sont tout aussi peu aptes à décrire la structure microscopique des phénomènes mécaniques considérés que l'optique géométrique l'est à expliquer les phénomènes de diffraction.*



1926 La mécanique ondulatoire

Règles de quantification

$$p_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, p_y \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, p_z \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

$$H = \sum_{k=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$



Interprétation de la fonction d'onde

Schrödinger insiste sur le fait qu'en général on ne doit et on ne peut pas donner une interprétation directe de la fonction ψ dans l'espace à trois dimensions. Malgré la forte suggestion dans ce sens du cas d'un électron unique, cela n'est pas possible, parce qu'en général ψ est une fonction dans l'espace de configuration et non pas dans l'espace réel.

Schrödinger montre finalement que sa théorie ondulatoire est équivalente à la théorie matricielle de Heisenberg, Born et Jordan publiée en 1925

<< Formellement, d'un point de vue purement mathématique, ces deux théories sont identiques. >>



Interprétation de la fonction d'onde

La mécanique quantique de Schrödinger donne une réponse précise à la question de l'effet d'une collision, mais il ne s'agit pas d'une relation causale. On ne répond pas à la question « quel est l'état après collision ? », mais plutôt à la question « quelle est la probabilité d'obtenir un effet donné après la collision ? ».

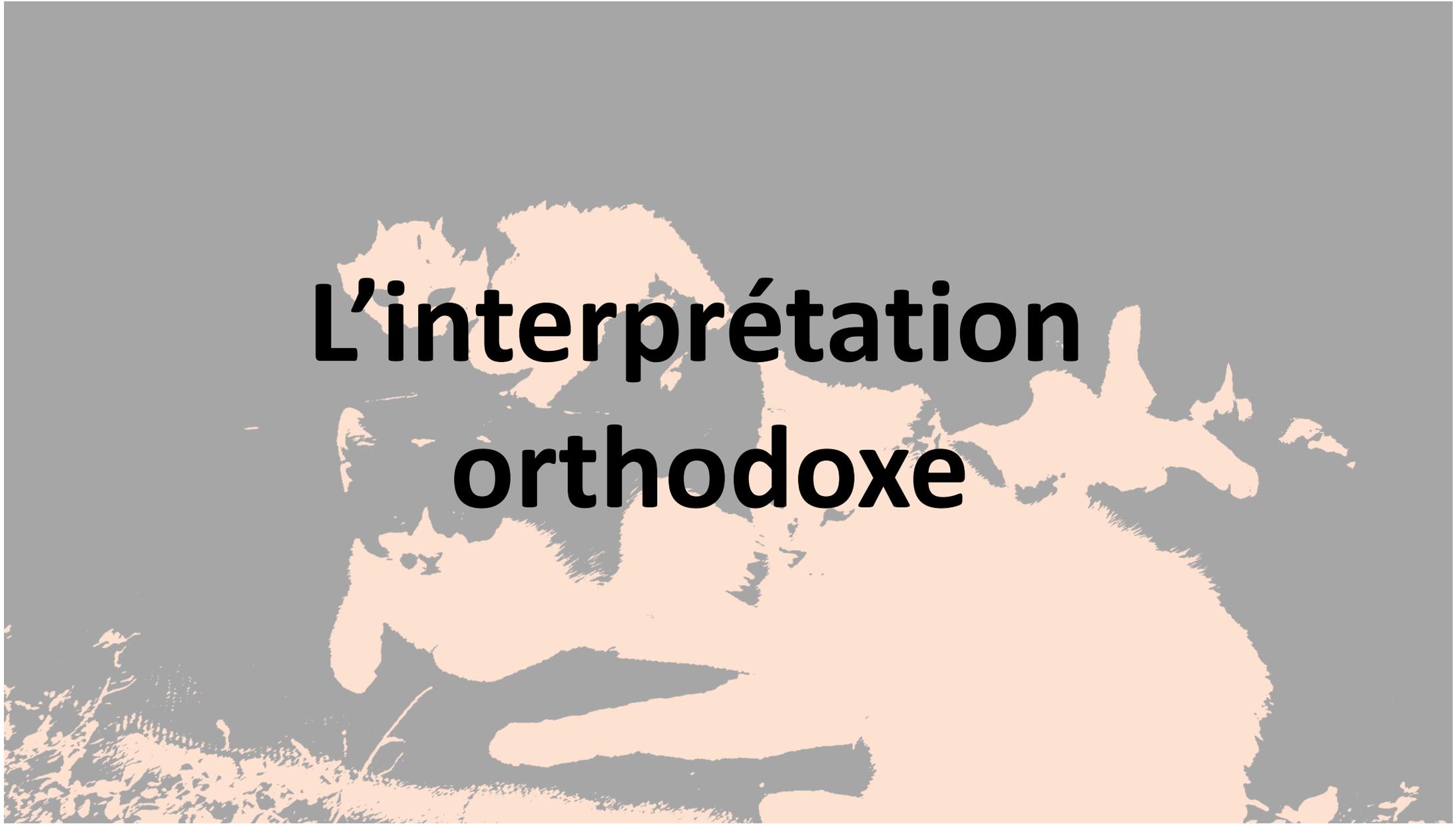
$$|\Psi(\vec{r})|^2 dV$$

$$|\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)|^2 dV_1 \dots dV_N$$

Règle de Born



L'interprétation orthodoxe



Interprétation de Copenhague-Göttingen

Bohr

Dirac,
Von Neumann

Born,
Heisenberg,
Jordan,
Pauli

1927 Congrès Solvay



Controverse Bohr/Einstein



Les postulats de l'interprétation standard

1 **principe de superposition** : l'état d'un système physique est complètement spécifié par une fonction d'onde (vecteur) de l'espace vectoriel des états qui est un espace de Hilbert ;

2 **observables** : toute grandeur physique mesurable est décrite par un opérateur agissant sur l'espace des états. Le spectre de l'observable, c'est-à-dire ses valeurs propres, contient toutes les valeurs possibles de la grandeur physique correspondante et les vecteurs propres associées forment une base de l'espace de Hilbert ;

3 **évolution temporelle** : en l'absence d'interaction avec son environnement (et en particulier avec un appareil de mesure), l'état Ψ d'un système physique évolue selon l'équation d'onde :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi,$$

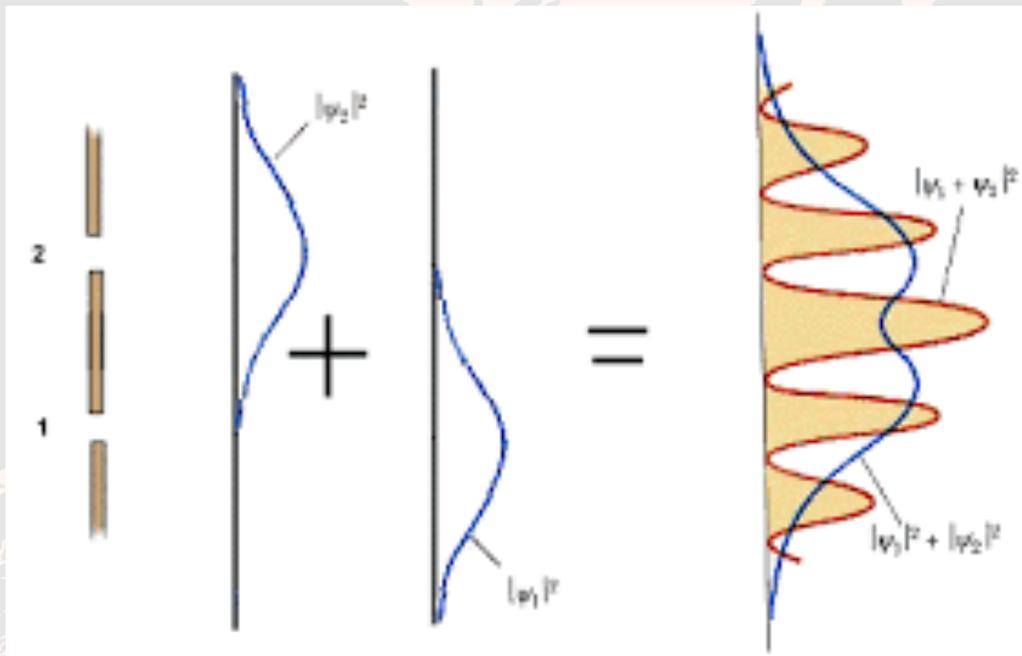
où H est l'opérateur hamiltonien du système isolé ;

4 **règle de Born** : lorsque le système est dans l'état Ψ , la probabilité d'obtenir une valeur a lors d'une mesure d'une grandeur physique \mathcal{A} représentée par l'observable A est donnée par la règle de Born $P(a) = |(\varphi_a, \Psi)|^2$ où φ_a est le vecteur propre de A associé à la valeur propre a ;

5 **réduction du paquet d'ondes** : lorsque le système est décrit par l'état Ψ , si le résultat d'une mesure idéale d'une grandeur physique \mathcal{A} donne la valeur a , alors immédiatement après la mesure le système est projeté dans un état φ_a , pour lequel la valeur d'une mesure de \mathcal{A} donne avec certitude la valeur a .

Le principe de superposition linéaire

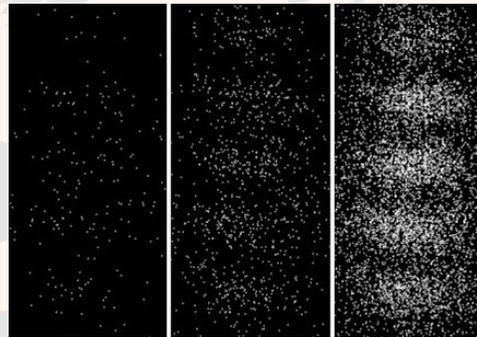
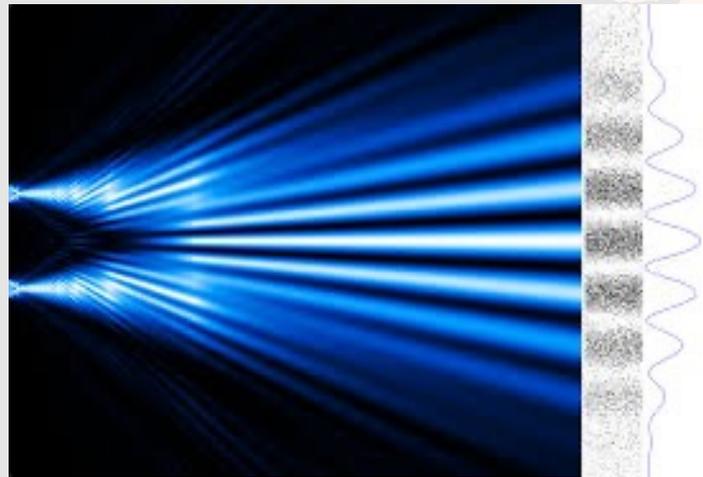
Si un système peut être préparée dans deux états Ψ_1 et Ψ_2 , alors la combinaison linéaire de ces deux états, $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$, avec la condition de normalisation $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, est également un état possible.



Prenons l'exemple de l'expérience des fentes de Young. On envoie sur un écran percé de deux fentes parallèles un faisceau de particules que l'on collecte à la sortie des fentes sur une plaque placée un peu plus loin. Si l'on ferme l'une des deux fentes, disons la fente numéro 2, les particules collectées sont issues de la fente numéro 1 et leur état quantique arrivant sur la plaque de collecte est représenté par la fonction d'onde $\Psi_1(\vec{r})$, où \vec{r} est le vecteur position sur la plaque. En collectant un grand nombre de particules, on observe une densité de particules qui peu à peu (si l'on envoie les particules une par une) reproduit le module au carré de la fonction d'onde, soit $|\Psi_1(\vec{r})|^2$, corroborant l'intuition de Born. Typiquement, cette densité est importante juste en face de la fente numéro 1 et décroît à mesure qu'on s'écarte de part et d'autre de cet endroit. Si l'on fait exactement la même chose mais en changeant le rôle des fentes, l'état quantique sur la plaque est $\Psi_2(\vec{r})$ et la densité observée convergent vers la distribution de probabilité $|\Psi_2(\vec{r})|^2$. fentes de Young 1

Le principe de superposition linéaire

Si un système peut être préparée dans deux états Ψ_1 et Ψ_2 , alors la combinaison linéaire de ces deux états, $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$, avec la condition de normalisation $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, est également un état possible.



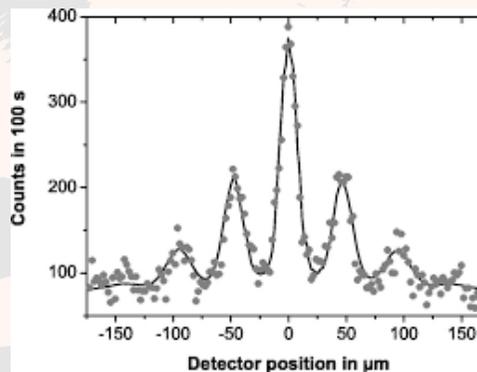
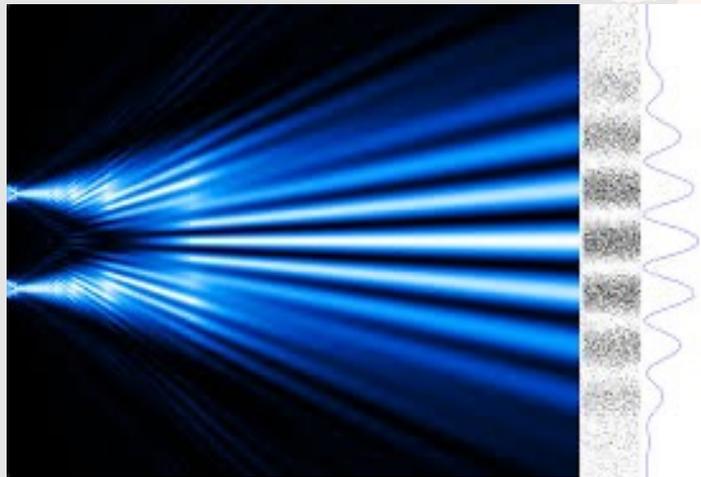
Lorsqu'on envoie une à une les particules sur les fentes de Young, on observe en utilisant une plaque fluorescente des petits spots lumineux correspondant à l'impact de chaque particule sur l'écran, indiquant l'endroit précis où telle ou telle particule est détectée. Au début de l'expérience on ne décèle aucune structure apparente, les spots semblent distribués de façon complètement aléatoire, mais au fur et à mesure de la collecte, on finit par voir la formation de franges alternées, avec des bandes à forte densité d'impact séparées par des bandes où n'arrive quasiment aucune particule. La densité de ces spots lumineux finit par converger vers la densité de probabilité de trouver une particule en position \vec{r} qui est donnée, d'après Born, par le module carré de $\Psi(\vec{r})$, à savoir :

$$\frac{1}{2}(|\Psi_1(\vec{r})|^2 + |\Psi_2(\vec{r})|^2 + \Psi_1^*(\vec{r})\Psi_2(\vec{r}) + \Psi_1(\vec{r})\Psi_2^*(\vec{r})).$$

C'est le terme supplémentaire $\Psi_1^*(\vec{r})\Psi_2(\vec{r}) + \Psi_1(\vec{r})\Psi_2^*(\vec{r})$ par rapport à l'attente classique $|\Psi_1(\vec{r})|^2 + |\Psi_2(\vec{r})|^2$ qui donne lieu aux franges d'interférences observées.

Le principe de superposition linéaire

Si un système peut être préparée dans deux états Ψ_1 et Ψ_2 , alors la combinaison linéaire de ces deux états, $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$, avec la condition de normalisation $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, est également un état possible.



Lorsqu'on envoie une à une les particules sur les fentes de Young, on observe en utilisant une plaque fluorescente des petits spots lumineux correspondant à l'impact de chaque particule sur l'écran, indiquant l'endroit précis où telle ou telle particule est détectée. Au début de l'expérience on ne décèle aucune structure apparente, les spots semblent distribués de façon complètement aléatoire, mais au fur et à mesure de la collecte, on finit par voir la formation de franges alternées, avec des bandes à forte densité d'impact séparées par des bandes où n'arrive quasiment aucune particule. La densité de ces spots lumineux finit par converger vers la densité de probabilité de trouver une particule en position \vec{r} qui est donnée, d'après Born, par le module carré de $\Psi(\vec{r})$, à savoir :

$$\frac{1}{2}(|\Psi_1(\vec{r})|^2 + |\Psi_2(\vec{r})|^2 + \Psi_1^*(\vec{r})\Psi_2(\vec{r}) + \Psi_1(\vec{r})\Psi_2^*(\vec{r})).$$

C'est le terme supplémentaire $\Psi_1^*(\vec{r})\Psi_2(\vec{r}) + \Psi_1(\vec{r})\Psi_2^*(\vec{r})$ par rapport à l'attente classique $|\Psi_1(\vec{r})|^2 + |\Psi_2(\vec{r})|^2$ qui donne lieu aux franges d'interférences observées.

Deux dynamiques antagonistes

Collapse de la fonction d'onde

Le postulat de la réduction du paquet d'ondes stipule que si la fonction d'onde juste avant la mesure de la quantité \mathcal{A} est donnée par le paquet d'ondes $\sum_i c_i \varphi_{a_i}$, alors immédiatement après la mesure, si le résultat de celle-ci est a_k , le paquet d'ondes est instantanément réduit à φ_{a_k} :

$$\Psi = \sum_i c_i \varphi_{a_i} \xrightarrow{\text{résultat } a_k} \varphi_{a_k}$$

Dynamique unitaire

En opposition frontale avec l'autre postulat dynamique de la physique quantique. En effet, l'évolution temporelle de la fonction d'onde est gouvernée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

Deux dynamiques antagonistes

Collapse de la fonction d'onde

Dynamique unitaire

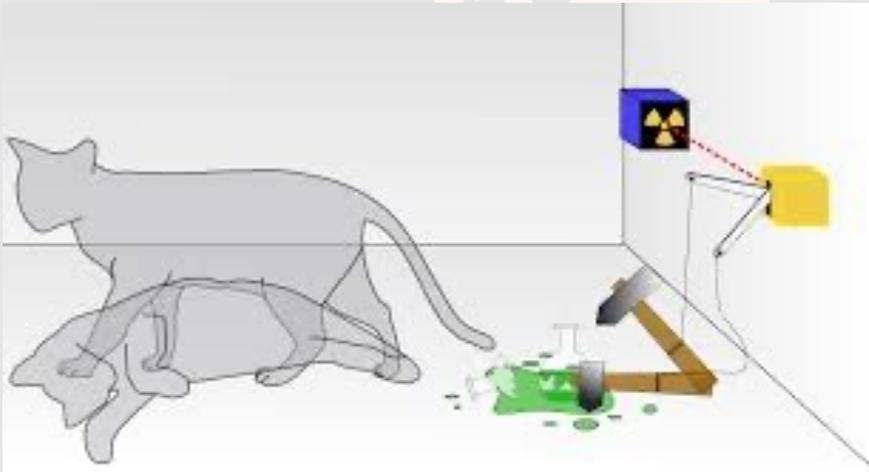
L'évolution temporelle de la fonction d'onde d'un système quantique est parfaitement déterministe et ce déterminisme est totalement incompatible avec la notion même de réduction du paquet d'ondes. **Il y a donc deux principes dynamiques antagonistes** : d'un côté l'évolution cohérente de la fonction d'onde engendrée par l'équation de Schrödinger, qui est déterministe et réversible, et de l'autre, le processus de mesure qui conduit de façon irréversible au collapse de la fonction d'onde dans un état qui n'est pas déterminé de façon causale

=> **Théorie de la mesure quantique**

Tant que la description à tous les niveaux est strictement quantique il n'y a toujours pas de collapse de la fonction d'onde. Von Neumann et Wigner postulent que cette chaîne s'interrompt au moment où c'est la *conscience* d'un être humain qui intervient !

Le chat de Schrödinger

Schrödinger, pour mettre en avant le problème de la mesure en mécanique quantique et tenter d'en démontrer le caractère absurde, propose en 1935 une expérience de pensée (cruelle avec son chat)



Etat de l'atome après une demie vie

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{int} + \varphi_{des}).$$

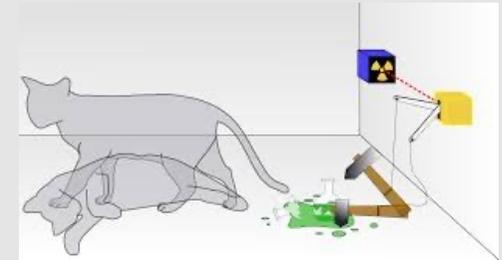
Elément radioactif + chat

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{int}\Psi_{vivant} + \varphi_{des}\Psi_{mort}).$$

Le chat de Schrödinger peut être vu comme un pointeur macroscopique servant à indiquer si l'atome s'est désintégré ou non.

Décohérence quantique

Pourquoi certains états sont classiquement acceptables et d'autres, non ?



Lors d'une mesure, pourquoi ne peut-on prendre une base orthonormée arbitraire d'états quantiques du pointeur macroscopique ?

Par exemple, dans le cas du chat, nous avons choisi la base orthonormée constituée des deux vecteurs Ψ_{vivant} et Ψ_{mort} , où la nullité du produit scalaire $(\Psi_{vivant}, \Psi_{mort}) = 0$ traduit le caractère mutuellement exclusif pour un chat d'être vivant ou mort.

Pourquoi pas =>

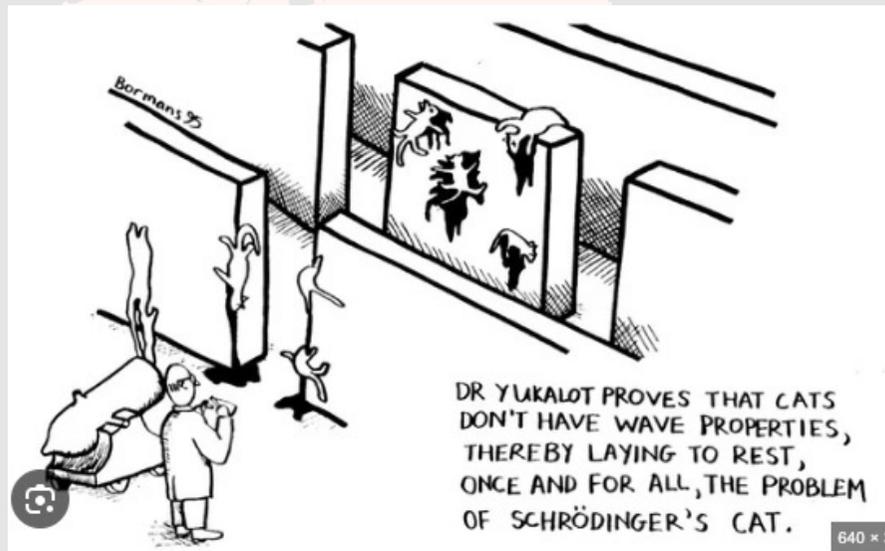
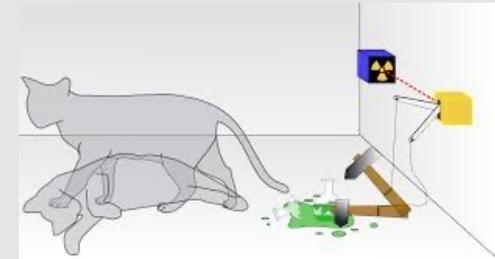
$$\Psi_{zombie1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{vivant} + \Psi_{mort})$$

$$\Psi_{zombie2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{vivant} - \Psi_{mort})$$

Les *états pointeurs* ou classiques sont les états dans lesquels les propriétés physiques du système sont insensibles aux fluctuations qu'introduit la présence d'un environnement complexe.

Décohérence quantique

Pourquoi certains états sont classiquement acceptables et d'autres, non ?



Le Dr. Yukalot a montré que les chats n'ont pas de propriétés ondulatoires, mettant ainsi fin, une fois pour toutes, au problème du chat de Schrödinger.

Les états pointeurs ou classiques sont les états dans lesquels les propriétés physiques du système sont insensibles aux fluctuations qu'introduit la présence d'un environnement complexe.



Intrication quantique

La meilleure connaissance possible du tout n'implique pas la
meilleure connaissance possible des parties

Paradoxe EPR et inégalités de Bell

1935 Paradoxe Einstein, Podolsky et Rosen

- * Une théorie est complète si
<< à chaque **élément de la réalité physique** correspond un homologue dans la théorie physique >>
- * Caractère local de la réalité physique

*Si, sans perturber le système d'une quelconque manière, nous pouvons prédire avec certitude (c'est-à-dire avec une probabilité égale à 1) la valeur d'une quantité physique, alors il existe un **élément de réalité physique** correspondant à cette quantité physique.*

L'analyse de leur expérience de pensée les amène à formuler deux alternatives :

- soit « la description quantique de la réalité donnée par la fonction d'onde n'est pas complète »,
- soit la mécanique quantique est complète mais « lorsque deux opérateurs correspondant à deux quantités physiques ne commutent pas, les deux quantités ne peuvent avoir de réalité simultanée ».

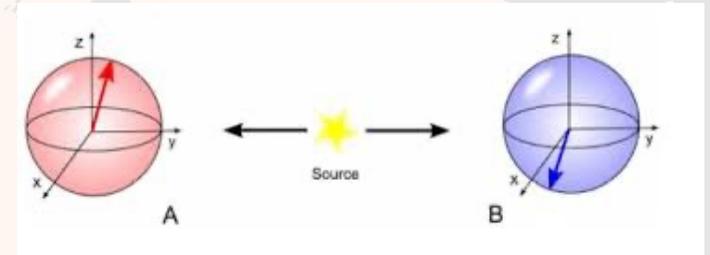
Paradoxe EPR et inégalités de Bell

1950 reformulation du paradoxe EPR par Bohm

Bohm considère une paire de particules de spin 1/2, initialement dans un état lié de moment cinétique total nul, qui se désintègre spontanément, laissant les deux particules s'éloigner l'une de l'autre jusqu'à de grandes distances.

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{1\uparrow}\varphi_{2\downarrow} - \varphi_{1\downarrow}\varphi_{2\uparrow}).$$

Alice et Bob, très loin l'une de l'autre, mesurent le spin de leur particule respective en choisissant, éventuellement au dernier moment, la direction de projection du spin.



L'argument EPR conduit à conclure que si la mécanique quantique est correcte et si l'hypothèse du réalisme local l'est aussi => **CONTRADICTION**

Paradoxe EPR et inégalités de Bell

Bohr réfute l'argument EPR

Idée de la non-séparabilité quantique

Il n'est pas possible en général d'attribuer des propriétés physiques à des sous-parties d'un système global, y compris lorsque ces sous-parties sont à des distances très grandes les unes des autres, les systèmes quantiques étant fondamentalement intriqués.

Querelle philosophique

Paradoxe EPR et inégalités de Bell

Bell formule des inégalités et ramène le problème dans le

domaine empirique

Fonction de corrélation entre les résultats d'Alice et Bob $S^{a,b} = \pm 1$ $C(a,b) = \langle S^a S^b \rangle$

Dans l'état singulet $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{1\uparrow}\varphi_{2\downarrow} - \varphi_{1\downarrow}\varphi_{2\uparrow})$.

Prédiction quantique $C_{MQ}(a,b) = -\cos \theta_{ab}$

Théorie à variables cachées locales λ $C(a,b) = \int A(a,\lambda)B(b,\lambda) \rho(\lambda)d\lambda$.

$$A(a,\lambda) = \pm 1, \quad B(b,\lambda) = -A(b,\lambda) = \pm 1 \quad C(a,b) = - \int A(a,\lambda)A(b,\lambda) \rho(\lambda)d\lambda.$$

Théorie à variables cachées locales \Rightarrow $|C(a,b) - C(a,c)| - C(b,c) \leq 1$

Paradoxe EPR et inégalités de Bell

Théorie à variables cachées locales $C(a, b) = \int A(a, \lambda)B(b, \lambda) \rho(\lambda)d\lambda.$

$$\begin{aligned} |C(a, b) - C(a, c)| &= \left| \int (A(a, \lambda)B(b, \lambda) - A(a, \lambda)B(c, \lambda)) \rho(\lambda)d\lambda \right| \\ &= \left| \int (A(a, \lambda)A(b, \lambda) - A(a, \lambda)A(c, \lambda)) \rho(\lambda)d\lambda \right| = \\ &= \left| \int (A(b, \lambda) - A(c, \lambda)) \rho(\lambda)d\lambda \right| \leq \int |A(b, \lambda) - A(c, \lambda)| \rho(\lambda)d\lambda \end{aligned}$$

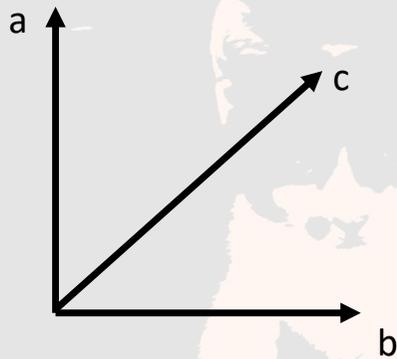
En notant que $A(b, \lambda) - A(c, \lambda) = A(b, \lambda)(1 - A(b, \lambda)A(c, \lambda))$, sa valeur absolue est
 $|1 - A(b, \lambda)A(c, \lambda)| = 1 + A(b, \lambda)A(c, \lambda)$

$$|C(a, b) - C(a, c)| \leq C(b, c) \leq 1$$

Paradoxe EPR et inégalités de Bell

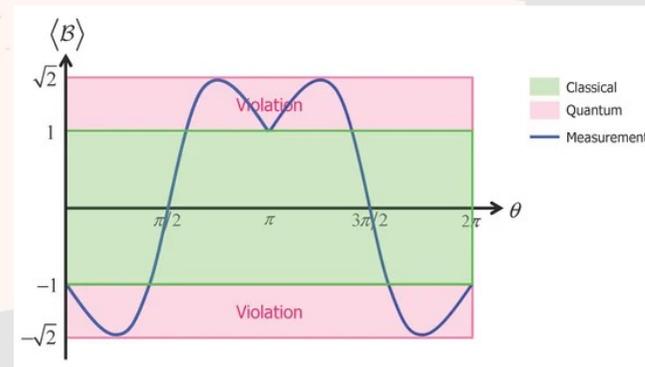
La mécanique quantique prédit une violation de l'inégalité $|C(a, b) - C(a, c)| - C(b, c) \leq 1$

$$C_{MQ}(a, b) = -\cos \theta_{ab}$$



$$|C(a, b) - C(a, c)| - C(b, c) = \sqrt{2}$$

Violation de l'inégalité par la MQ



Paradoxe EPR et inégalités de Bell

Reformulation CHSH (Clauser Horne Shimony Holt 1969)

$$S = |C(a, b) - C(a, b')| + C(a', b) + C(a', b')$$

$$-2 \leq S \leq 2$$

Alain Aspect et son groupe, à Orsay
au début des années 80, obtiennent

$$S = 2,697 \pm 0,015$$

Avant de prendre la moyenne sur la distribution $\rho(\lambda)$, pour $AB \geq AB'$, S est de la forme $A(B - B') + A'(B + B')$, quantité qui vaut toujours ± 2 . Dans le cas où $AB \leq AB'$, la même quantité devient $A(B' - B) + A'(B + B')$ et vaut également toujours ± 2 . La moyenne de ces termes est donc forcément comprise entre -2 et 2 .

Intrication quantique

La meilleure connaissance possible du tout n'implique pas la meilleure connaissance possible des parties.

$$\Psi = (\varphi_{A\uparrow}\varphi_{B\downarrow} - \varphi_{A\downarrow}\varphi_{B\uparrow})/\sqrt{2}$$

Si Alice mesure l'état de spin et obtient $+\hbar/2$, immédiatement après la mesure, l'état du système global est projeté sur l'état $\varphi_{A\uparrow}\varphi_{B\downarrow}$.

Lorsque Bob mesure à son tour l'état de spin de sa particule il obtient avec certitude $-\hbar/2$.

Du point de vue d'Alice, elle a une particule dont le spin est dans un mélange statistique, au sens classique du terme, où avec une probabilité 1/2 le spin est dans l'état $\varphi_{A\uparrow}$ et avec une probabilité 1/2 dans l'état $\varphi_{A\downarrow}$.

Autrement dit, Alice n'a absolument aucune information sur l'état de son spin.

L'état de spin de la particule de Bob a été influencé par la mesure d'Alice et cela, comme nous l'avons vu précédemment, peu importe la distance séparant les deux particules : elles sont intriquées.

A group of cats of various breeds and colors, including tabbies, calicos, and solid colors, are sitting together on a wooden floor. The cats are looking in different directions, some towards the camera and others away. The background is a plain, light-colored wall.

Contextualité quantique

Théorème de Kochen-Specker

Contextualité de la mécanique quantique

Position de Bohr sur l'argument EPR

Le caractère contextuel (le contexte global) de la mesure invalide le raisonnement EPR.



Les valeurs des quantités physiques ne préexistent pas à la mesure.

Budroni et al Rev. Mod. Phys. 2022

Théorème de Kochen-Specker

Contextualité de la mécanique quantique

Approche de Kochen et Specker 1967 (Bell 1966)

La contextualité de la MQ est liée à l'incompatibilité d'observables correspondant à l'exclusion mutuelle des dispositifs de mesure.



Les valeurs des quantités physiques ne préexistent pas à la mesure.

Théorème de Kochen-Specker

Un ensemble de d propositions mutuellement exclusives est un contexte.

Chaque proposition Q_i est associée à un projecteur de rang 1 : $P_i = |u_i\rangle\langle u_i|$

Les propositions sont exclusives elles ne peuvent pas être simultanément vraies :

$$P_i P_j = 0 \text{ si } i \text{ différent de } j$$

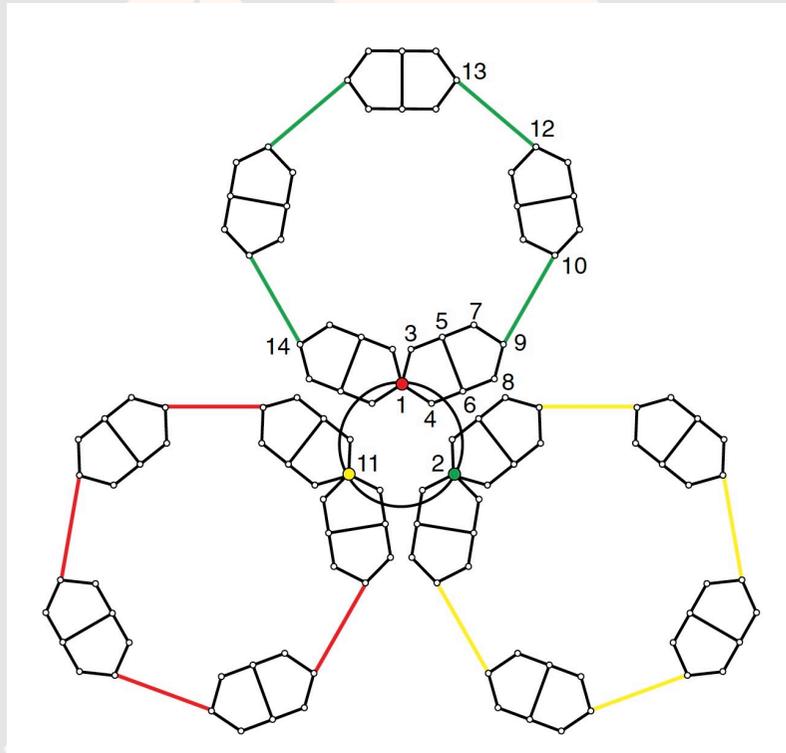
L'ensemble des propositions Q_1, Q_2, \dots, Q_d ne peut pas être simultanément fausses, l'une d'elle doit être vraie : $\sum_{i=1}^d P_i = \mathbb{I}$.

Le théorème KS exclut les théories à variables cachées non contextuelles pour $d \geq 3$.

Il est impossible d'assigner aux vecteurs (projecteurs de rang 1) de la base représentant le contexte une valeur 0 ou 1, c'est-à-dire au moyen d'une fonction $f(P_i) = 0 \text{ ou } 1$ avec $\sum_{i=1}^d f(P_i) = 1$.

Théorème de Kochen-Specker

La preuve de KS est faite en $d=3$ avec 117 vecteurs et 118 contextes !



Théorème de Kochen-Specker

Le théorème KS en $d=4$ avec 18 vecteurs et 9 contextes (Cabello, Estebaranz, Garcia-Alcaine 1996)

u_1	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, 0, 1)	(1, -1, 1, -1)	(1, -1, 1, -1)	(0, 0, 1, 0)	(1, -1, -1, 1)	(1, 1, -1, 1)	(1, 1, -1, 1)	(1, 1, 1, -1)
u_2	(0, 0, 1, 0)	(0, 1, 0, 0)	(1, -1, -1, 1)	(1, 1, 1, 1)	(0, 1, 0, 0)	(1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, -1)	(-1, 1, 1, 1)	(-1, 1, 1, 1)
u_3	(1, 1, 0, 0)	(1, 0, 1, 0)	(1, 1, 0, 0)	(1, 0, -1, 0)	(1, 0, 0, 1)	(1, 0, 0, -1)	(1, -1, 0, 0)	(1, 0, 1, 0)	(1, 0, 0, 1)
u_4	(1, -1, 0, 0)	(1, 0, -1, 0)	(0, 0, 1, 1)	(0, 1, 0, -1)	(1, 0, 0, -1)	(0, 1, -1, 0)	(0, 0, 1, 1)	(0, 1, 0, -1)	(0, 1, -1, 0)

Chaque colonne correspond à une observable avec 4 valeurs possibles, 3 valeurs 0 (faux) et une valeur qui vaut 1 (vrai). Ici on a 9 bases différentes choisies de manière que chaque projecteur apparaisse dans exactement deux contextes de mesure.

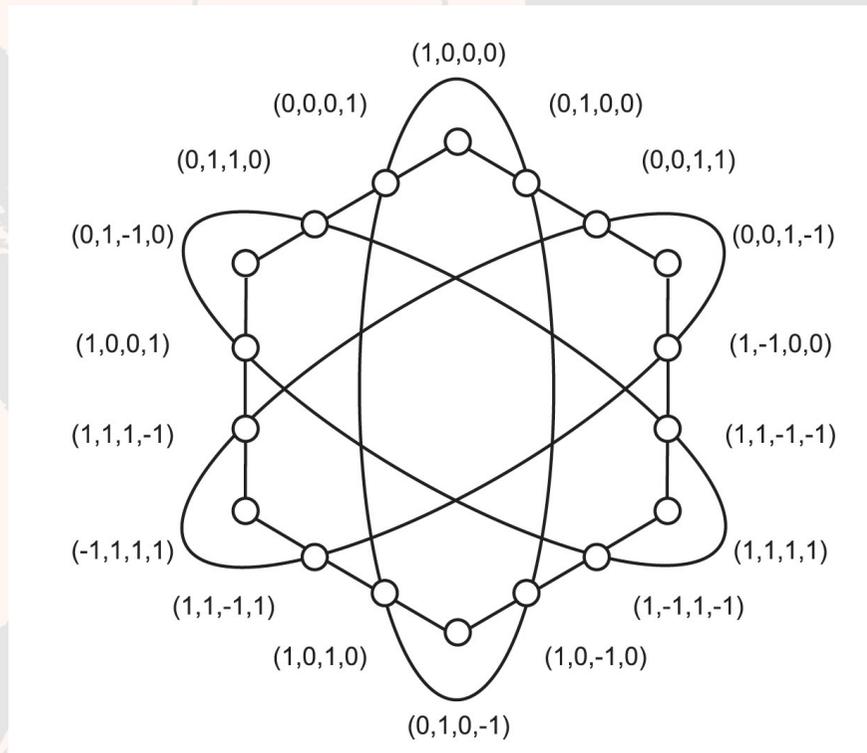
a) - la valeur 1 apparaît exactement une fois par colonne, les autres entrées de la colonne étant 0

b) - les cases de même couleur contiennent la même valeur - soit les deux contiennent 1, soit les deux contiennent 0.

Aucune distribution de 1 et de 0 ne peut satisfaire les deux conditions a) et b).

Théorème de Kochen-Specker

Le théorème KS en $d=4$ avec 18 vecteurs et 9 contextes (Cabello, Estebaranz, Garcia-Alcaine 1996)



Le carré de Peres-Mermin

6 expériences (arrangées en 3 lignes et 3 colonnes) ou contextes

Dans chaque contexte nous avons 3 mesures compatibles

Chaque mesure donne +1 ou -1

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}$$

D'un point de vue classique, chacune des 9 mesures a une valeur bien définie en dehors du contexte expérimental.

=> **Théorie non contextuelle**

Si on considère les 6 produits (de valeur ± 1)

$$(ABC, abc, \alpha\beta\gamma, Aa\alpha, Bb\beta, Cc\gamma)$$

il ne peut y avoir qu'un nombre pair de 1.

En introduisant la moyenne $\langle ABC \rangle = Prob[ABC = 1] - Prob[ABC = -1]$ on a l'inégalité

$$\langle PM \rangle = \langle ABC \rangle + \langle abc \rangle + \langle \alpha\beta\gamma \rangle + \langle Aa\alpha \rangle + \langle Bb\beta \rangle - \langle Cc\gamma \rangle \leq 4$$

Le carré de Peres-Mermin

6 expériences (arrangées en 3 lignes et 3 colonnes) ou contextes
Dans chaque contexte nous avons 3 mesures compatibles

Réalisation quantique à deux spins 1/2

$$\begin{pmatrix} \sigma^z \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \sigma^z & \sigma^z \otimes \sigma^z \\ \mathbb{1} \otimes \sigma^x & \sigma^x \otimes \mathbb{1} & \sigma^x \otimes \sigma^x \\ \sigma^z \otimes \sigma^x & \sigma^x \otimes \sigma^z & \sigma^y \otimes \sigma^y \end{pmatrix}$$

Si on considère les 6 produits de trois observables on a
($ABC = \mathbb{1}$, $abc = \mathbb{1}$, $\alpha\beta\gamma = \mathbb{1}$, $Aa\alpha = \mathbb{1}$, $Bb\beta = \mathbb{1}$, $Cc\gamma = -\mathbb{1}$)

Violation de l'inégalité classique $\langle PM \rangle \leq 4$

$$\langle PM \rangle = 6$$

En guise de conclusion ...

- Tests expérimentaux des inégalités de contextualité (ions piégés, photons, neutrons, résonances magnétiques nucléaires, Nitrogen-vacancy ...)
 - ⇒ Violations nettes des inégalités
 - ⇒ Exclusion des variables cachées non-contextuelles
- Comprendons-nous vraiment la mécanique quantique ?
- J'ai bien peur que ...

INÉDIT

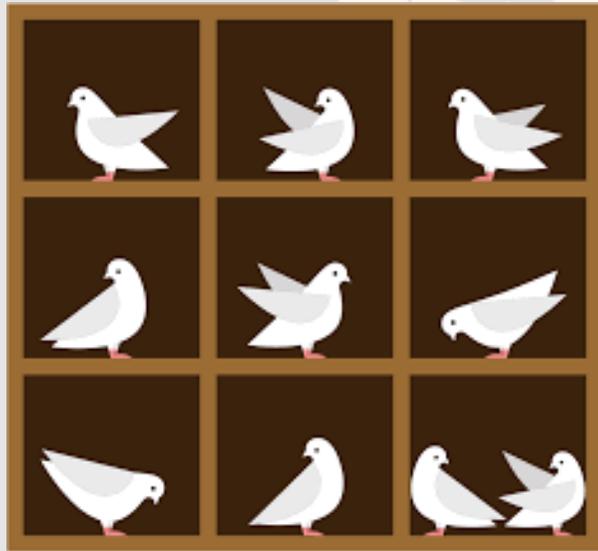
Dragi Karevski

LA PHYSIQUE QUANTIQUE

*Que
sais-je?*



Principe des tiroirs ou Pigeonhole principe



Paradoxe du Quantum pigeonhole

Lorsque 3 particules sont placées dans 2 boîtes, pour certains états particuliers, on ne trouve pas deux particules dans une même boîte.

Dans d'autres cas, on trouve que la particule 2 est dans la même boîte que la particule 1, que la particule 3 est dans la même boîte que la particule 1 mais que les particules 2 et 3 ne sont pas dans les mêmes boîtes.

Règle de Born, fluctuations quantiques et inégalités de Heisenberg

Règle de Born $P(a) = |(\varphi_a, \Psi)|^2$

Superposition linéaire $\Psi = \sum_i c_i \varphi_{a_i}$

les coefficients c_i sont donnés par les produits scalaires (φ_{a_i}, Ψ)

Valeur moyenne $(\Psi, A\Psi) = \sum_i a_i |(\varphi_{a_i}, \Psi)|^2$

Fluctuations $\Delta_\Psi A = \langle (A - \langle A \rangle_\Psi)^2 \rangle_\Psi$

Principe d'incertitude de Heisenberg $\Delta_\Psi A \Delta_\Psi B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle_\Psi|$.

Règle de Born, fluctuations quantiques et inégalités de Heisenberg

Principe d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta_{\psi} A \Delta_{\psi} B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle_{\psi}|.$$

Pour la position et l'impulsion d'une particule suivant la direction x , représentées par les opérateurs X et P_x , nous avons vu que la mécanique quantique requiert que le commutateur $[X, P_x] = i\hbar$.

Si l'on considère deux observables quelconques A et B dont le commutateur est non nul, $[A, B] = iC$ où C est également une observable, alors lorsque $\langle C \rangle_{\psi} \neq 0$ on ne peut pas rendre aussi petit que l'on veut à la fois la dispersion sur A , et celle sur B . Il faut nécessairement faire un compromis entre les fluctuations de l'une des grandeurs et les fluctuations de l'autre afin de satisfaire l'inégalité. On dit que les deux grandeurs sont *incompatibles*.

$$\Delta_{\psi} X \Delta_{\psi} P_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Règle de Born, fluctuations quantiques et inégalités de Heisenberg

Principe d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta_{\psi} X \Delta_{\psi} P_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Plus on spécifie la position de la particule et moins est spécifiée son impulsion. À l'inverse, évidemment si l'impulsion est parfaitement déterminée, la position de la particule sera parfaitement indéterminée. C'est en ce sens que ces deux grandeurs sont incompatibles : si l'on en veut une il faut abandonner l'autre.

Existence de fluctuations quantiques, y compris dans l'état de plus basse énergie d'un système physique.

