

Mécanique Analytique 2

Malte Henkel

^aLaboratoire de Physique de Chimie Théoriques (CNRS UMR 7019),
Université de Lorraine **Nancy**, France

^bCentro de Física Teórica e Computacional, Universidade de Lisboa, Portugal

courriel/E-Post: `malte.henkel@univ-lorraine.fr`

Cours Semestre d'été 22, Université de Lorraine **Nancy**

Un peu de lecture complémentaire/ *Literaturhinweise*

L.D. Landau et E.M. Lifchitz, *Mécanique*, Ellipses (Paris) traduction allemande

H. Goldstein *et al.*, *Classical Mechanics*, 3^e traductions allemandes & françaises

M.L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 3^e, Wiley
(New York)

VI. Dotsenko *et al.*, *Méthodes mathématiques pour la physique*, Dunod
(Paris 2018)

B. Noble et J.W. Daniel, *Applied linear algebra*, 3^e, Prentice Hall (New York)

P. Olver, C. Shakiban, *Applied linear algebra*, Springer (Heidelberg)

encyclopédique, avec plein d'exemples

Contenu/Inhalt

<u>Cours I/Vorlesung I</u> : Vecteurs et espaces vectoriels/ <i>Vektoren und Vektorräume</i>	
<u>Cours II/Vorlesung II</u> : Applications linéaires/ <i>Lineare Abbildungen</i>	
<u>Cours III/Vorlesung III</u> : Équations linéaires & orthogonalité/ <i>Lineare Gleichungen & Orthogonalität</i>	
<u>Cours IV/Vorlesung IV</u> : Valeurs propres et vecteurs propres/ <i>Eigenwerte und Eigenvektoren</i>	
<u>Cours V/Vorlesung V</u> : Fondations de la mécanique/ <i>Grundlagen der Mechanik</i>	
<u>Cours VI/Vorlesung VI</u> : Le lagrangien/ <i>Die Lagrangefunktion</i>	
<u>Cours VII/Vorlesung VII</u> : Calcul variationnel/ <i>Variationsrechnung</i>	4
<u>Cours VIII/Vorlesung VIII</u> : Petites oscillations I/ <i>Kleine Schwingungen I</i>	27
<u>Cours IX/Vorlesung IX</u> : Petites oscillations II/ <i>Kleine Schwingungen II</i>	42
<u>Cours X/Vorlesung X</u> : Approfondissements et symétries/ <i>Vertiefungen und Symmetrien</i>	67
<u>Cours XI/Vorlesung XI</u> : Problème de deux corps/ <i>Zweikörperproblem</i>	94
<u>Cours XII/Vorlesung XII</u> : Problème de Kepler/ <i>Keplerproblem</i>	127
<u>Cours XIII/Vorlesung XIII</u> : L'hamiltonien/ <i>Die Hamiltonfunktion</i>	156

COURS VII/ VORLESUNG VII

Rappel: les 3 axiomes de la mécanique de Newton

I *“Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.”*

II *“Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.”*

III *“L'action est toujours égale à la réaction; c'est à dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires.”*

☞ Si repère d'inertie et système isolé \Rightarrow éq. de mouvement $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$

Ceci est complété des définitions:

(1) **masse** := densité \times volume, $m := \rho V$ (2) **impulsion** := masse \times vitesse $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$

et des concepts auxiliaires (3) **travail** := force \times distance $W := \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ et **énergie**

(4) si forces conservatives $\mathbf{F} = -\nabla V$, avec **potentiel** V (scalaire)

(5) **énergie cinétique** $T := \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$

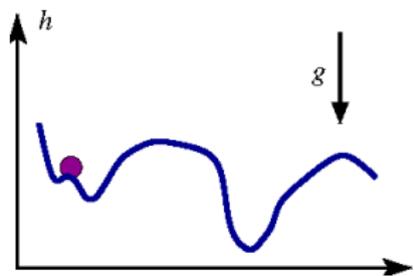
si on peut travailler dans un repère d'inertie et le système physique est isolé, on a le programme:

- (1) déterminer toutes les forces \mathbf{F} agissantes sur le système
- (2) résoudre l'équation $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$

Difficulté: souvent, les forces ne sont pas connues explicitement d'avance !

Exemple: chariot sur montagne russe

- une force connue: la pesanteur g (constante)
 - la forme de la montagne fixée par la construction
 - le chariot (la bille) 'doit rester' sur les rails
 - ☞ système soumis à une **contrainte**
- mouvement très inhomogène (accélééré)
 - ☞ autres forces doivent agir



force externe $\mathbf{F}_{\text{ex}} = m\mathbf{g} = \text{cste.}$

en revanche, on observe l'accélération $\mathbf{a} \neq \text{cste.}$



$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{ex}} + \mathbf{F}_{\text{con}} \quad , \quad \mathbf{F}_{\text{con}} \text{ est une } \mathbf{force \ de \ contrainte}$$

? peut-on trouver \mathbf{F}_{con} ? et comment ?

Rappel: le lagrangien

Définition: Le nombre N de variables indépendantes d'un système physique est son **nombre de degrés de liberté**.

Les degrés de liberté ne sont pas toujours des coordonnées cartésiennes. Toute autre variable peut être utilisée (ex.: coordonnées sphériques (r, θ, φ))

Un système est décrit à l'aide des **coordonnées généralisées** $q_i, i = 1, \dots, N$.

Ainsi, le lagrangien devient $L = L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) = T - V$.

Théorème: (EULER, LAGRANGE) *Pour un système mécanique avec N degrés de liberté et des forces conservatives, les équations de mouvement sont*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 ; \quad i = 1, \dots, N$$

Pour les N degrés de liberté, on a N équations de mouvement.

Définition: Ces équations s'appellent **équations d'Euler-Lagrange**.

? Ça marche, d'accord. Et pourquoi tout ceci est-il vrai ?

1. Les principes variationnelles

* pourquoi les éqs. d'Euler-Lagrange sont-elles valables ?

* nous voulons montrer comment les obtenir à partir d'un **principe variationnel**
souvent, la physique est caractérisée à l'aide des principes d'extrémalité

Exemple: optique géométrique

Principe de FERMAT: *'la lumière se propage de telle manière que le temps d'aller de A en B soit minimale.'*

(1) un milieu homogène: $t_{AB} = \min !$

⇒ **propagation en ligne droite** $t_{AB} = \frac{s_{AB}}{c}$

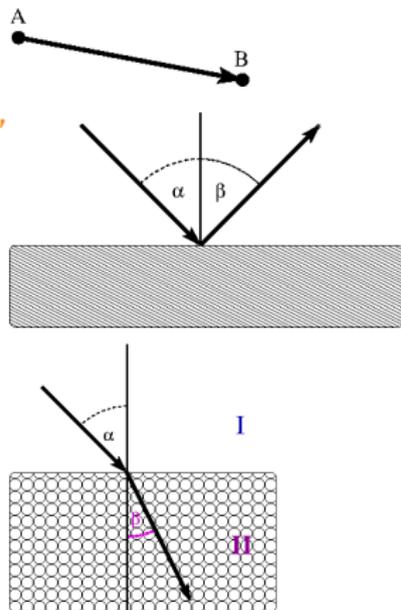
(2) réflexion par un miroir

⇒ **loi de réflexion** $\alpha = \beta$

(3) réfraction à la frontière entre deux milieux

⇒ **loi de réfraction** $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_I}{n_{II}}$

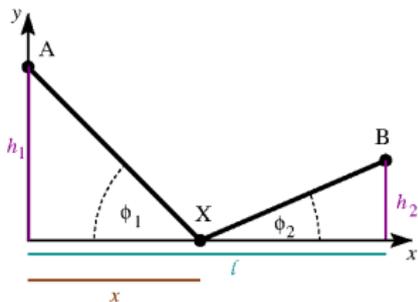
où n : indice de réfraction (propriété du milieu)



N.B.: ces lois de SNELL-DESCARTES permettent de reconstruire toute l'optique géométrique

Pour illustration, nous allons en tirer la **loi de réflexion**.

Nous admettons la propagation en ligne droite dans un milieu homogène
(voir plus tard pour la démonstration).



on cherche le temps de passage t_{AB}
il faut choisir le point X tel que

$$t_{AB} = t_{AX} + t_{XB} = \min !$$

de la figure & Pythagore

$$t_{AB} = t_{AB}(x) = \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + h_1^2} + \frac{1}{c} \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}$$

Condition nécessaire pour minimalité: $\frac{dt_{AB}(x)}{dx} \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2c} \frac{2x}{(x^2 + h_1^2)^{1/2}} + \frac{1}{2c} \frac{-2(l-x)}{((l-x)^2 + h_2^2)^{1/2}} = 0$$

et de la géométrie

$$\Rightarrow \cos \phi_1 = \cos \phi_2$$

ce qui implique la loi de Snell-Descartes de réflexion $\alpha = \beta$.

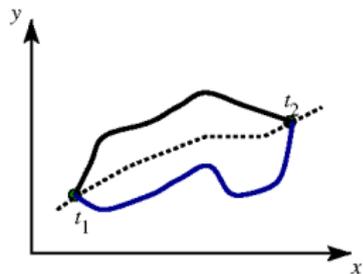
2. Le principe d'Hamilton

En mécanique, on peut déduire toute équation du mouvement à partir de l'affirmation suivante:

'Le mouvement d'un système mécanique entre deux temps t_1 et t_2 est tel que l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \min !$$

soit minimale, où L est le lagrangien.'



a priori, il existe une infinité de mouvements possibles entre deux temps fixés t_1 , t_2 .

Chacun de ces mouvements a une valeur d'action S .

👉 Il faut choisir le mouvement tel que l'action S soit minimale.

Une grande partie des principes d'extrémalité et du calcul variationnel est développée au sein de l'Académie des Sciences à Berlin, réactivée après 1740 par le roi FRÉDÉRIC II. En ce temps (1740/50), parmi les membres les plus éminents figurent: MAUPERTUIS (président), EULER, RÉAUMUR, D'ARGENS, MONTESQUIEU, GRESSET, LA METTRIE, DIDEROT, D'ALEMBERT, LALANDE, VOLTAIRE, LAGRANGE ...



MAUPERTUIS (1698-1759), originaire de St-Malo, connu pour son expédition en Laponie (1736/37), où il mesure l'aplâtissement de la Terre. Formulation du principe de la moindre action. À Berlin 1740-1758.



EULER (1707-83), originaire de Bâle, est un des plus productifs mathématiciens de tous les temps. À Berlin 1741-1766.
'Lisez Euler ! C'est notre maître à tous.' LAPLACE



LAGRANGE (1736-1813), originaire de Turin, est un mathématicien-physicien-astronome éminent. Avec EULER co-inventeur du calcul variationnel. À Berlin 1766-1787.

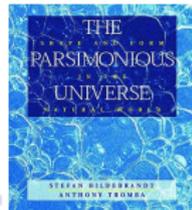
Comme il fallait presque s'y attendre, la concentration d'un tel nombre de têtes éminents ne se passe pas sans heurts. En particulier, VOLTAIRE, après être expulsé de Berlin pour des spéculations illicites, se moque des idées entretenues par l'Académie. Voici un aperçu:

'Pangloss enseignait la métaphysico-théologo-cosmolo-nigologie. Il prouvait admirablement qu'il n'y a point d'effet sans cause et que dans ce meilleur de mondes [...] il disait "Il est démontré que [...] tout est nécessairement pour la meilleure fin. [Car] les nez ont été faits pour porter des lunettes; aussi avons-nous des lunettes. Les jambes sont [...] instituées pour être chaussées, et nous avons des chausses. Les pierres ont été formés pour être taillés [...]; aussi Monseigneur a un très beau château. ... Par conséquent, ceux qui ont avancé que tout est bien ont dit une sottise: il fallait dire que tout est au mieux."'

VOLTAIRE, *Candide*, chap. 1er, Genève (1759)

N.B.: LEIBNIZ et EULER étaient chrétiens, quelle provocation pour VOLTAIRE ...

pour des aspects historiques et un survol, copieusement illustré, des problèmes variationnels, voir le livre de S. Hildebrandt & A. Tromba, *The parsimonious universe*.

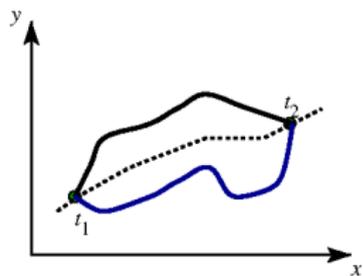


3. Calcul variationnel

Le lagrangien L est une fonction des coordonnées généralisées q_i (et des vitesses généralisées \dot{q}_i)

$$L = L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t)$$

Définition: Les configurations des coordonnées $\{q_1, \dots, q_N\}$ constituent l'espace des configurations.



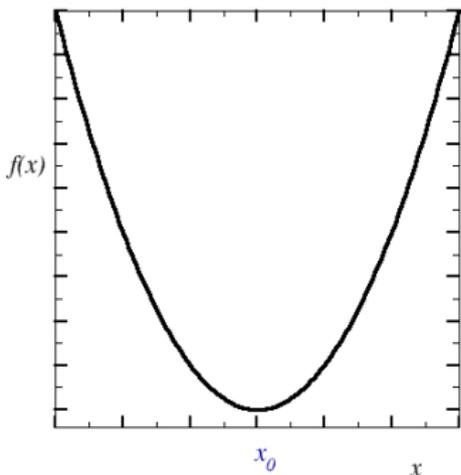
a priori, il existe une infinité de mouvements possibles entre deux temps fixés t_1, t_2 .
Chacun de ces mouvements a une valeur d'action S .

👉 Il faut choisir le mouvement tel que l'action S soit minimale.

On cherche donc des fonctions $q_i = q_i(t)$ telles qu'une **fonctionnelle** $S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$ soit minimale.

Ceci est un problème du **calcul variationnel**.

Cas analogue: trouver le **minimum** d'une fonction $f(x)$ d'une variable x



on cherche un nombre x_0 tel que $f(x_0) = \min !$

Comment procéder en principe ?

Si x_0 est la solution du problème, on écrit

$$x = x_0 + \varepsilon$$

on fait **varier ε autour de zéro**, de sorte que $f = f(x_0 + \varepsilon)$. Car à $x = x_0$ la valeur de f ne change pas, on a

$$\left. \frac{\partial f(x_0 + \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \stackrel{!}{=} 0 \implies f'(x_0) = 0$$

On peut donc **trouver x_0 en résolvant une équation algébrique.**

Une **fonction** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ renvoie un nombre vers un autre $x \mapsto f(x)$.

Le **calcul** standard traite des éventuels maxima et minima.

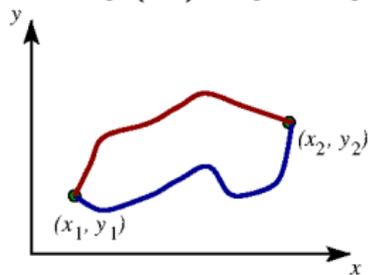
Une **fonctionnelle** renvoie une fonction $f(x)$ vers un nombre $f(x) \mapsto J[f]$.

Le **calcul variationnel** traite des éventuels maxima et minima.

Nous allons étudier des fonctionnelles de forme notation: $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x), y'(x), x)$$

où le **noyau** $f(y, y', x)$ définit la fonctionnelle et on garde fixés x_1, x_2 et aussi $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$.



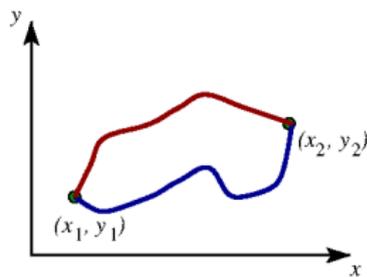
Problème variationnel: trouver une fonction $y = y(x)$ telle que $J = J[y]$ soit minimale !

(en gardant les points terminaux (x_1, y_1) et (x_2, y_2) fixés)

On veut donc minimiser/maximiser la fonctionnelle

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x), y'(x), x) = \min !$$

avec les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) fixés, avec $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$.



par analogie, paramétrisation:

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x)$$

où $y(x, 0)$: **solution exacte du problème**
et $\eta = \eta(x)$ est appelée la **variation**

⇒ conditions de bord de la variation: $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

La fonctionnelle J devient donc une fonction du paramètre α

$$J = J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)$$

et où la condition

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{définit la solution } y(x, 0)$$

Afin de trouver une condition nécessaire d'extrémum (minimum ou maximum) de la fonctionnelle

$$J = J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)$$

il faut satisfaire la condition $\frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \stackrel{!}{=} 0$.

Avec l'ansatz de paramétrisation $y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x)$, on peut écrire

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta, \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \eta' = \frac{d}{dx}\eta \quad (*)$$

Ceci peut se calculer selon les règles du calcul standard

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \eta \right) \end{aligned}$$

Le calcul de cette dérivée procède à l'aide des conditions de bord $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \eta \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta\end{aligned}$$

Par conséquent, la condition d'extrémalité devient

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta \quad \text{et doit être valable } \forall \eta$$

La condition d'extrémalité devient, pour $\alpha = 0$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta \quad \text{doit être valable } \forall \eta \quad (J')$$

En mathématiques, le *Lemme de Riemann-Lebesgue* garantit que la condition (J') implique

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{avec } y = y(x, 0)} \quad (E)$$

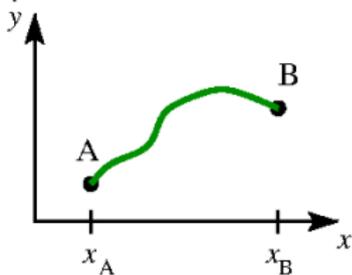
C'est l'**équation d'Euler** pour l'extrémalisation de la fonctionnelle $J = J(\alpha)$.

Nous avons trouvé une équadiff pour la fonction recherchée $y = y(x, 0)$.
La solution de cette équadiff nous donnera la fonction qui extrémalise la fonctionnelle J .

Exemple: tiré de la géométrie élémentaire

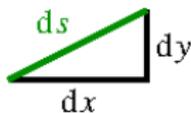
Quelle est la courbe plane la plus courte entre deux points A,B fixés ?

N.B.: évidemment, on 'sait' qu'on doit trouver une droite, l'enjeu est de voir comment produire ce résultat à l'aide d'un calcul variationnel.



élément de la **longueur d'arc**

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$



$$\Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

On en déduit la **longueur totale S** de la courbe, avec x_A, x_B fixés

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_A}^{x_B} dx \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

On cherche donc la solution sous forme d'une fonction $y = y(x)$.

C'est la forme de la fonctionnelle J étudiée ci-dessus, et on identifie

$$f(y, y', x) = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2}$$

L'équation d'Euler s'écrit en général $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$.

On a identifié $f(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}$. Alors, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

L'équation d'Euler prend donc la forme

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a = \text{cste.}$$

on met y' en évidence, ce qui donne

$$y' = \alpha = \text{cste.} \quad \text{avec } \alpha = \alpha(a) \text{ en principe connue}$$

et on en tire, en intégrant

$$y(x) = \alpha x + \beta$$

où α, β sont des constantes

ce qui est bien l'**équation d'une ligne droite** (dans le plan euclidien \mathbb{R}^2).

4. Transcription vers la mécanique

Le calcul variationnel peut être traduit littéralement en mécanique:

position x

fonction $y = y(x)$

derivée $y' = \frac{dy}{dx}$

noyau $f = f(y, y', x)$

fonctionnelle $J = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y, y', x)$

équation d'Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

temps t

coordonnée généralisée $q = q(t)$

vitesse généralisée $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$

lagrangien $L = L(q, \dot{q}, t)$

action $S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t)$

équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

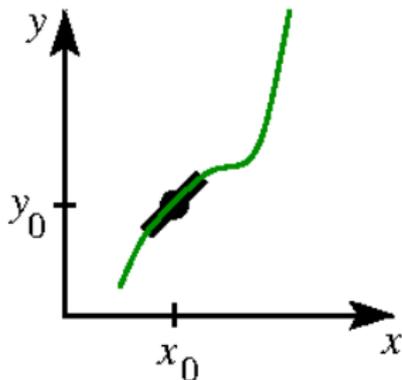
N.B.: le traitement explicite était ici pour $N = 1$ degré de liberté.

La généralisation vers $N > 1$ est automatique.

5. Quelques remarques sur les équations différentielles:

Exemple: $y''(x) = F(y(x), y'(x), x)$

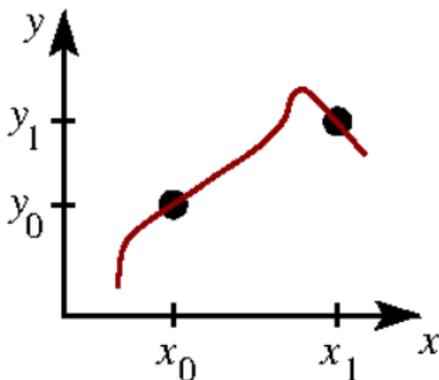
N.B.: il faut spécifier deux constantes d'intégration



problème de valeurs initiales

à $x = x_0$, on prescrit la valeur $y(x_0) = y_0$ et la pente $y'(x_0)$

☞ **solution locale**



problème de valeurs de bord

$x_0 \neq x_1$

à $x = x_0$, on prescrit la valeur $y(x_0) = y_0$
et à $x = x_1$, on prescrit la valeur $y(x_1) = y_1$

☞ **solution globale**

N.B.: une solution locale peut p.ex. exploser avant d'arriver au point $x = x_1$

N.B.': ceci est presque garanti pour des équadiffs non linéaires

Notation: pour une fonction $F = F(y, y', x)$, on écrit $F_y := \frac{\partial F}{\partial y}$, $F_{y'} := \frac{\partial F}{\partial y'}$.

Théorème: (PICARD, LINDELÖF) *Pour les équadiffs comme $y'(x) = F(y(x), x)$ ou $y''(x) = F(y(x), y'(x), x)$, où F est dérivable par rapport à y, y' etc., le problème de valeurs initiales a une solution unique.*

N.B.: la condition de dérivabilité peut être remplacée par 'continuité de LIPSCHITZ'

☞ en gros, une équadiff a 'toujours' une solution locale unique

Théorème: (BERNSTEIN) *Soit l'équadiff du 2^e ordre*

$$y''(x) = F(y(x), y'(x), x) \quad (*)$$

où F, F_y et $F_{y'}$ sont continues dans chaque point (x, y) avec $|y'| < \infty$.
Soit $k > 0$ et $\alpha = \alpha(x, y) \geq 0$ et $\beta = \beta(x, y) \geq 0$ telles que

$$F_y(y, y', x) > k, \quad |F(y, y', x)| \leq \alpha y'^2 + \beta$$

Alors il existe une solution unique de (*) qui passe par les points prescrits (a, A) et (b, B) avec $a \neq b$.

☞ condition suffisante pour l'existence de solutions globales; requises par le problème variationnel !

Théorème: (GELFAND, FOMIN) *Soit la fonction $y = y(x)$ continûment dérivable et est solution de l'équation d'Euler $f_y - \frac{d}{dx}f_{y'} = 0$. Si le noyau f est deux fois continûment dérivable en y, y', x et si $f_{y'y'}(y, y', x) \neq 0$, alors $y = y(x)$ est deux fois continûment dérivable en x .*

N.B.: ce résultat renseigne sur l'absence des 'pics' dans les solutions de l'équation d'Euler, et de leurs deux premières dérivées.

☞ on est mieux renseigné sur les conditions quand on peut naïvement admettre l'existence et le 'bon comportement' des solutions des équations d'Euler.

voir I.M. Gelfand, S.V. Fomin, *Calcul des variations/Calculus of variations*, Moscou & New York

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Variationsprinzip, <i>n</i>	principe variationnel, <i>m</i>
Spiegelung, <i>f</i>	réflexion, <i>f</i>
Reflektionsgesetz, <i>n</i>	loi de réflexion, <i>f</i>
Brechung, <i>f</i>	réfraction, <i>f</i>
Brechungsgesetz, <i>n</i>	loi de réfraction, <i>f</i>
Snellius'sche Gesetze (Mz.)	lois de Snell-Descartes (pl)
Wirkung, <i>f</i>	action, <i>f</i>
Hamilton'sches Prinzip, <i>n</i>	principe d'Hamilton, <i>m</i>
Funktional, <i>n</i>	fonctionnelle, <i>f</i>
Variationsrechnung, <i>f</i>	calcul variationnel, <i>m</i>
Konfigurationsraum, <i>m</i>	espace des configurations, <i>m</i>
Endpunkt, <i>m</i>	point terminal, <i>m</i>
Anfangspunkt, <i>m</i>	point initial, <i>m</i>
Bogenlänge, <i>f</i>	longueur d'arc, <i>f</i>
Gerade, <i>f</i>	ligne droite, <i>f</i>
ebene Kurve, <i>f</i>	courbe plane, <i>f</i>
Satz von Picard-Lindelöf, <i>m</i>	théorème de Cauchy-Lipschitz, <i>m</i>
Satz von Bernstein, <i>m</i>	théorème de Bernstein, <i>m</i>

le genre grammatical (*m,f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

COURS VIII/ VORLESUNG VIII

Rappel: calcul variationnel et formalisme d'Euler-Lagrange

La procédure de la minimalisation de certaines fonctionnelles se traduit mot pour mot en mécanique:

d'abord pour $N = 1$ degré de liberté

position x

fonction $y = y(x)$

derivée $y' = \frac{dy}{dx}$

noyau $f = f(y, y', x)$

fonctionnelle $J = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y, y', x)$

équation d'Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

temps t

coordonnée généralisée $q = q(t)$

vitesse généralisée $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$

lagrangien $L = L(q, \dot{q}, t) = T - V$

action $S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t)$

équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

N.B.: La généralisation vers $N > 1$ est automatique, il suffit de remplacer $y \mapsto y_i, i = 1, \dots, N$:
fonctionnelle $J = J(y_1, \dots, y_N, y'_1, \dots, y'_N, x) = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y_1, \dots, y_N, y'_1, \dots, y'_N, x)$

et enfin $\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0$, où $i = 1, \dots, N$

1. Petites oscillations: principes & formulation

système mécanique,

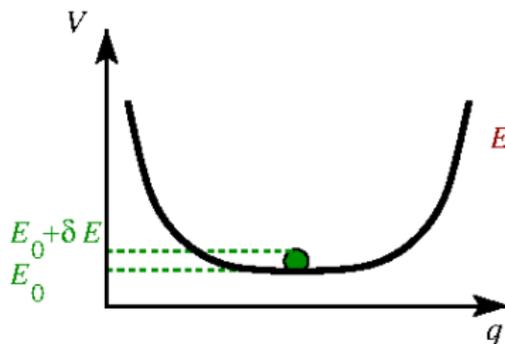
N degrés de liberté

si système en équilibre mécanique: force totale $\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{0}$

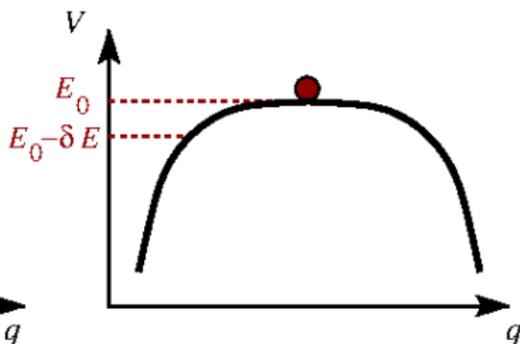
si forces conservatives, ceci implique pour le potentiel $V = V(q_1, \dots, q_N)$:

condition d'équilibre:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$



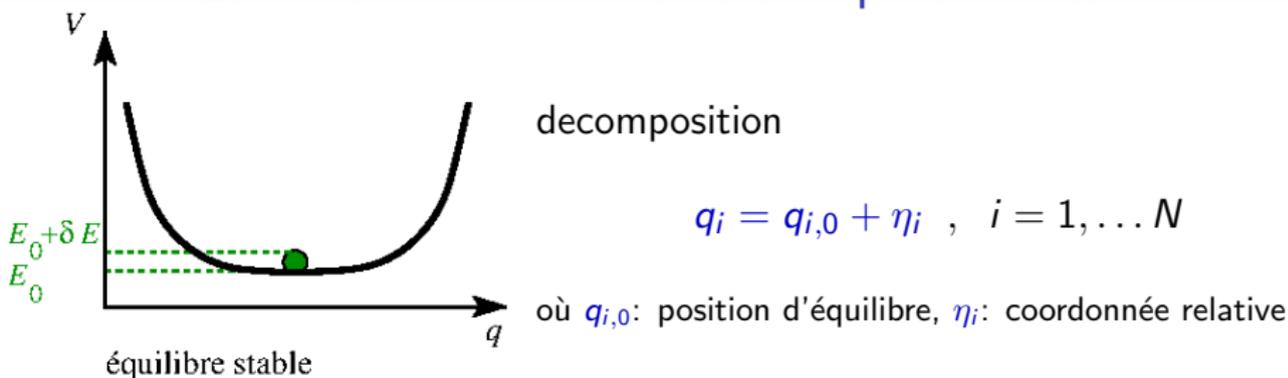
équilibre stable



équilibre instable

☞ il existe deux types d'équilibre: **stable** et **instable**

2. Mouvement autour d'un équilibre stable



(a) développement limité du potentiel

voir note mathématique \Rightarrow

$$V(q_1, \dots, q_N) = V_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_0}_{= 0 \text{ à l'équilibre}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0 \eta_i \eta_j + \dots$$

où $V_0 = V(q_{1,0}, \dots, q_{N,0})$.

☞ On peut toujours choisir $V_0 = 0$.

sans restriction de la généralité

☞ notons encore: $V_{ij} := \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0$.

[Rappel mathématique: développement de Taylor en deux variables

pour une fonction dite 'analytique' $f = f(x)$ en une variable, on peut écrire un développement autour du point x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

Considérons une fonction $F = F(x, y)$ en deux variables x et y , autour du point (x_0, y_0) :

(i) d'abord, on fixe y et on développe en x , autour de x_0 :

$$F(x, y) = F(x_0, y) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y) \cdot (x - x_0)^2 + \dots$$

(ii) ensuite on développe les termes restants aussi en y , autour de y_0 : on s'arrête au 2^e ordre

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)(x - x_0) + \dots \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Théorème: (SCHWARZ) Si la fonction $F = F(x, y)$ est deux fois partiellement dérivable et si la dérivée partielle mixte $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ existe autour d'un point (x_0, y_0) et y est continue, alors l'autre

dérivée partielle mixte $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ existe aussi au point (x_0, y_0) et Schwarz a appris cette formule dans un cours de WEIERSTRASS 1861 à Berlin

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$$

pour $(x, y) = (x_0, y_0)$

Avec le théorème de Schwarz, on peut arranger (et symétriser !) ces termes comme suit

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \right)}_{\text{symétrisé}} \cdot (x - x_0)(y - y_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right] \\ &+ \dots \\ &= F(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_0 (x_i - x_{i,0}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 (x_i - x_{i,0})(x_j - x_{j,0}) + \dots \end{aligned}$$

avec la notation $x_1 = x$ et $x_2 = y$. De plus, $\frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_0$ indique la valeur de cette dérivée au point (x_0, y_0) .

Ceci est le *développement de Taylor pour une fonction de deux variables et jusqu'au 2^e ordre*. La démonstration du théorème de Schwarz et des estimations pour les restes dans le développement de Taylor sont thèmes des cours d'analyse mathématique.

p.ex. S. Hildebrandt, *Analysis 2*, Springer (Heidelberg)

les cas de plus que deux variables et/ou des ordres supérieurs s'obtiennent d'une manière analogue.]

avec ces conventions et notations, on retient du potentiel les termes

$$V(q_1, \dots, q_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V_{ij} \eta_i \eta_j$$

Définition: La restriction aux termes quadratiques en V s'appelle **régime de petites oscillations**.

N.B.: ces oscillations sont toujours des oscillations harmoniques

(b) développement limité de l'énergie cinétique

$$q_j = q_{j,0} + \eta_j$$

en général, l'énergie cinétique T est au moins quadratique dans les vitesses.

On écrit où l'on admet une dépendance éventuelle de T aussi des coordonnées généralisées

$$T(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

$$\text{où } T_{ij}(q_1, \dots, q_N) \simeq \underbrace{T_{ij}(q_{1,0}, \dots, q_{N,0})}_{\text{constante}} + \underbrace{\sum_k \left. \frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k} \right|_0}_{\text{déjà 'petit'}} \eta_k + \dots$$

Lagrangien d'un système de N degrés de liberté, au régime de petites oscillations

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j \right)$$

où T_{ij} et V_{ij} sont des constantes (et contiennent toute l'information pertinente sur le système).

Les équations de mouvement s'écrivent (procédure standard d'Euler-Lagrange)

$$\sum_{j=1}^N \left(T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j \right) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{E})$$

donc N équadiffs *linéaires* du 2e ordre pour les N variables η_i

Propriété: les coefficients $T_{ij} = T_{ji}$ et $V_{ij} = V_{ji}$ sont symétriques

Propriété: les coefficients $T_{ij} = T_{ji}$ et $V_{ij} = V_{ji}$ sont symétriques

Démonstration: on se concentre sur V_{ij} . Si V_{ij} n'était pas symétrique, on aurait

$$V_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S_{ij} = S_{ji} & \text{symétrique} \\ A_{ij} = -A_{ji} & \text{anti-symétrique} \end{cases}$$

et on peut même les construire explicitement

$$S_{ij} := \frac{1}{2}(V_{ij} + V_{ji}) = S_{ji} \quad , \quad A_{ij} := \frac{1}{2}(V_{ij} - V_{ji}) = -A_{ji}$$

Ainsi, le potentiel s'écrit comme suit

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\underbrace{S_{ij}}_{\text{sym.}} \underbrace{\eta_i \eta_j}_{\text{sym.}} + \underbrace{A_{ij}}_{\text{anti}} \underbrace{\eta_i \eta_j}_{\text{sym.}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{ij} S_{ij} \eta_i \eta_j$$

car on peut calculer explicitement

(afin de vérifier que $A = -A = 0$)

$$\begin{aligned} A &:= \sum_{ij} A_{ij} \eta_i \eta_j &= - \sum_{ij} A_{ji} \eta_i \eta_j && \text{anti-symétrie } A_{ij} = -A_{ji} \\ & &= - \sum_{ij} A_{ji} \eta_j \eta_i && \text{commutativité } \eta_i \eta_j = \eta_j \eta_i \\ & &= - \sum_{ji} A_{ij} \eta_i \eta_j && \text{renommer les indices } i \leftrightarrow j \\ & &= 0 && \end{aligned}$$

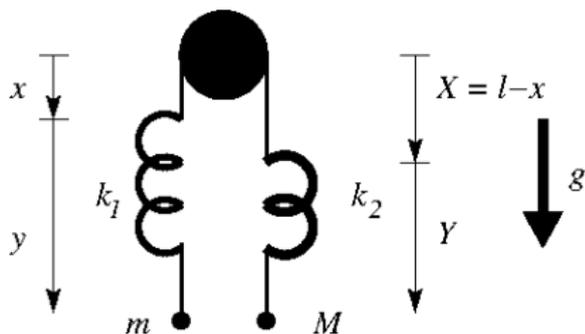
⇒ seule la partie symétrique contribue à V . $T_{ij} = T_{ji}$ se voit de manière analogue.

QED

N.B.: on peut aussi utiliser le théorème de Schwarz: $V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0 = \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_i} \Big|_0 = V_{ji}$.

3. Exemple physique: machine d'Atwood avec 2 ressorts

système: 2 particules, attachées aux ressorts de raideur $k_{1,2}$, liés par un fil de longueur ℓ



le fil est de longueur ℓ constante

\Rightarrow contrainte $X = \ell - x$

$\Rightarrow 4 - 1 = 3$ degrés de liberté

positions des 2 masses

$$x_m = x + y, \quad x_M = \ell - x + Y$$

énergie cinétique

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}_m^2 + \frac{M}{2} \dot{x}_M^2 = \frac{m+M}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{y}^2 + \frac{M}{2} \dot{Y}^2 + m\dot{x}\dot{y} - M\dot{x}\dot{Y}$$

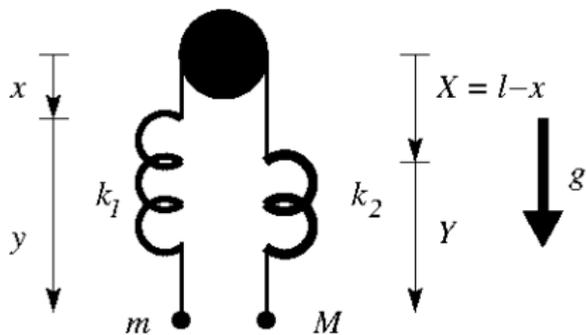
potentiel

$$V = -mgx_m - Mg x_M + \frac{1}{2} k_1 y^2 + \frac{1}{2} k_2 Y^2 = -(m-M)gx - mgy - MgY + \frac{1}{2} k_1 y^2 + \frac{1}{2} k_2 Y^2 + \text{cste.}$$

lagrangien

$$L = T - V = \frac{m+M}{2} \dot{x}^2 + (m-M)gx + \frac{m}{2} \dot{y}^2 + mgy + \frac{M}{2} \dot{Y}^2 + MgY + m\dot{x}\dot{y} - M\dot{x}\dot{Y} - \frac{k_1}{2} y^2 - \frac{k_2}{2} Y^2$$

système: 2 particules, attachées aux ressorts de raideur $k_{1,2}$, liés par un fil de longueur ℓ



le fil est de longueur ℓ constante

\Rightarrow contrainte $X = \ell - x$

$\Rightarrow 4 - 1 = 3$ degrés de liberté

positions des 2 masses

$$x_m = x + y \quad , \quad x_M = \ell - x + Y$$

équations de mouvement

$$(m + M)\ddot{x} + m\ddot{y} - M\ddot{Y} - (m - M)g = 0$$

$$m\ddot{x} + m\ddot{y} + k_1 y - mg = 0$$

$$-M\ddot{x} + M\ddot{Y} + k_2 Y - Mg = 0$$

\Rightarrow système pour 3 oscillations couplées, sous l'influence de la pesanteur
 les forces externes peuvent être éliminées à l'aide des transformations en x, y, Y
 étudier d'abord le cas des oscillations non forcées, sans pesanteur: $g = 0$

étudier d'abord le cas des oscillations non forcées, sans pesanteur: $g = 0$

équations de mouvement (cas non forcé)

$$(m + M)\ddot{x} + m\ddot{y} - M\ddot{Y} = 0$$

$$m\ddot{x} + m\ddot{y} + k_1 y = 0$$

$$-M\ddot{x} + M\ddot{Y} + k_2 Y = 0$$

on résout de tels systèmes à l'aide de l'ansatz

$$\eta_j(t) = C a_j e^{-i\omega t}, \quad j = 1, \dots, N$$

où ω : fréquence angulaire, a_j : amplitudes, C : constante de normalisation

N.B.: déjà pour un seul oscillateur harmonique, on a utilisé un tel ansatz

⇒ en général, les équations de mouvement (E) prennent la forme

$$\sum_{j=1}^N \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right) a_j = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

⇒ la solution des équations de mouvement se réduit à la solution du système
problème de valeurs et vecteurs propres généralisés

$$\sum_{j=1}^N \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right) a_j = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

où $V_{ij} = V_{ji}$ et $T_{ij} = T_{ji}$ sont symétriques

* système d'équations linéaires homogènes pour les a_j

* de plus, ω^2 est aussi à déterminer

☞ en général, pour des équations linéaires homogènes:

une des a_j peut être choisie librement

(choix de C)

* on a donc $(N - 1) + 1 = N$ variables pour N équations

les a_j ω^2

le compte y est !

☞ *solution explicite requiert des techniques avancées d'algèbre linéaire*

nous les connaissons à peu près, mais il faut les raffiner dans le prochain cours ...

... afin de comprendre l'interprétation du résultat en physique !

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

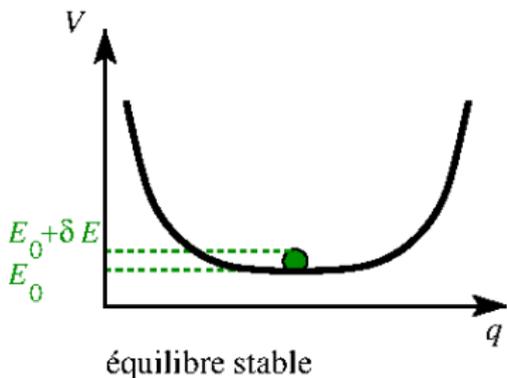
Näherung, <i>f</i>	approximation, <i>f</i>
Gleichgewicht, <i>n</i>	équilibre, <i>m</i>
stabil	stable
unstabil	instable
Zerlegung, <i>f</i>	décomposition, <i>f</i>
zerlegen	décomposer
vertauschen	permuter
erzwungene Schwingung, <i>f</i>	oscillation forcée, <i>f</i>
lineare Algebra, <i>f</i>	algèbre linéaire, <i>f</i>
Ansatz, <i>m</i>	ansatz, <i>m</i>
Lösung, <i>f</i>	solution, <i>f</i>
lösen (eine Gleichung, ein Rätsel)	résoudre (une équation, une énigme)
Gleichung, <i>f</i>	équation, <i>f</i>
Differentialgleichung, <i>f</i>	équation différentielle, <i>f</i>
Anfangswert, <i>m</i>	valeur initiale, <i>f</i> ; valeur de départ, <i>f</i>
Anfangswertproblem, <i>n</i>	problème de valeur initiale, <i>m</i>
Randbedingung, <i>f</i>	condition aux limites, <i>f</i>
Randwertproblem, <i>n</i>	problème aux limites, <i>m</i>

le genre grammatical (*m,f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

COURS IX/ VORLESUNG IX

Petites oscillations II

1. Rappel: formulation générale du problème



mouvement autour d'un équilibre stable
decomposition

$$q_i = q_{i,0} + \eta_i, \quad i = 1, \dots, N$$

où $q_{i,0}$: position d'équilibre, η_i : coordonnée relative

des développements limités du potentiel et de l'énergie cinétique, autour de l'équilibre (au régime de petites oscillations), donnent le Lagrangien pour un système de N degrés de liberté

termes anharmoniques $O(\eta^3)$ négligés

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j \right)$$

où T_{ij} et V_{ij} sont des constantes (contiennent toute l'information sur le système).

Les équations de mouvement s'écrivent (procédure standard d'Euler-Lagrange)

$$\sum_{j=1}^N \left(T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j \right) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{E})$$

donc N équadiffs *linéaires* du 2e ordre pour les N variables η_j

Propriété: les coefficients $T_{ij} = T_{ji}$ et $V_{ij} = V_{ji}$ sont **symétriques**

☞ on résout de tels systèmes à l'aide de l'ansatz

$$\eta_j(t) = C a_j e^{-i\omega t}, \quad j = 1, \dots, N$$

où ω : fréquence angulaire, a_j : amplitudes, C : constante de normalisation

N.B.: déjà pour un seul oscillateur harmonique, on a utilisé un tel ansatz

⇒ en général, les équations de mouvement (E) prennent la forme

$$\sum_{j=1}^N \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right) a_j = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

⇒ la solution des équations de mouvement se réduit à la solution du système
problème de valeurs et vecteurs propres généralisés

$$(V - \omega^2 T) \mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

où $V_{ij} = V_{ji}$ et $T_{ij} = T_{ji}$ sont symétriques $\Leftrightarrow V = V^T, T = T^T$ hermitiques

* système d'équations linéaires homogènes pour les a_j

* de plus, ω^2 est aussi à déterminer

☞ en général, pour des équations linéaires homogènes:

une des a_j peut être choisie librement

(choix de C)

* on a donc $(N - 1) + 1 = N$ variables pour N équations

les a_j ω^2

le compte y est !

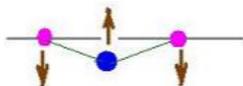
☞ *solution explicite requiert des techniques avancées d'algèbre linéaire*

la solution générale s'obtient comme superposition linéaire des modes propres

... allons donc voir comment ça marche ! 🔍🔄

2. Molécules tri-atomiques: l'exemple CO₂

exemple simple de trois degrés de liberté: la molécule CO₂
arrangement linéaire des 3 atomes



Two Bending modes: on x and y : $\nu = 667 \text{ cm}^{-1}$ plusieurs types d'oscillation, avec des fréquences ν caractéristiques



Symmetric stretching mode : $\nu = 1340 \text{ cm}^{-1}$ mouvement du molécule: superposition de ces oscillations



ici: restriction aux vibrations le long de l'axe du molécule

Antisymmetric stretching mode : $\nu = 2349 \text{ cm}^{-1}$

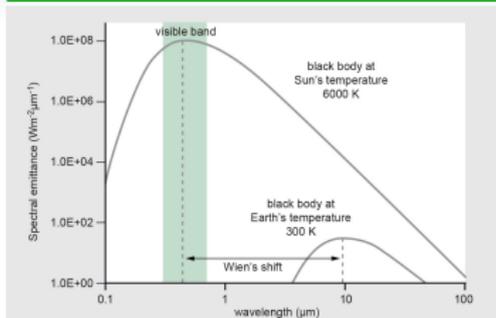
pour une animation, voir p.ex. <https://www.youtube.com/watch?v=AauIOanNaWk>

? comment trouver les fréquences d'oscillation du molécule CO₂ ?

Sources: https://fr.wikipedia.org/wiki/Dioxyde_de_carbone;

<https://scientificsentence.net/Physics/Effects/index.php?key=yes&Integer=raman>

Quelques remarques sur le rôle du CO₂ pour l'effet de serre terrestre



Soleil et Terre sont en bonne approximation des corps noirs

la température du Soleil: $T_{\odot} \approx 6000[\text{K}]$

\Rightarrow maximum d'émission pour la lumière visible

la température d'émission de la Terre $T_{\oplus} \approx 300[\text{K}]$

\Rightarrow maximum d'émission dans l'infra-rouge

* des absorptions du rayonnement modifient le spectre

d'émission de la Terre

* cette absorption retient une partie de la chaleur

effet de serre / Treibhauseffekt

les gaz d'effet de serre les plus importants sont H₂O et CO₂

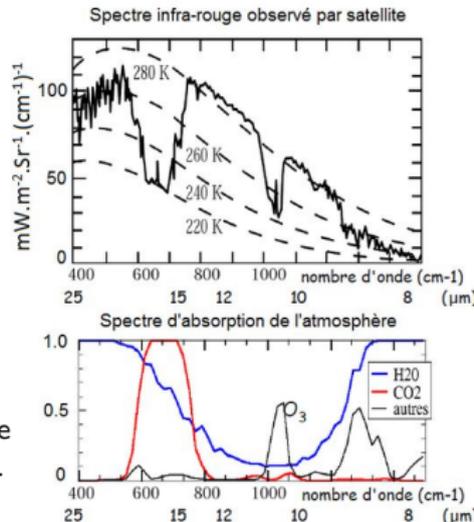
absorption importante par mode à $\nu = 667[\text{cm}^{-1}]$ de

CO₂, à peu près au maximum de l'émission terrestre

N.B.: en absence totale de l'effet de serre, la température moyenne de la Terre serait -19°C (comme sur la lune), au lieu de $+15^{\circ}\text{C}$.

Rappel: Nombre d'onde/Wellenzahl: $\nu/c = \lambda^{-1}$

Sources: <https://ltb.itc.utwente.nl/491/concept/79570>; <https://climatorealiste.com/effet-de-serre/>



L'effet de serre naturel: conséquence de l'existence d'une atmosphère terrestre

- de grande importance pendant les premières $(2 - 3) \cdot 10^9$ [Ga] de la terre
- ☞ problème de faible luminosité du soleil jeune
- gaz de l'effet de serre les plus importants aujourd'hui
 - vapeur de l'eau ($\lesssim \frac{2}{3}$)
 - gaz de CO_2 ($\sim \frac{1}{4}$)

température moyenne de la Terre, avant la révolution industrielle $\approx 15^\circ[\text{C}]$

température moyenne de la Lune (sans atmosphère, sans effet de serre) $\approx -15^\circ[\text{C}]$

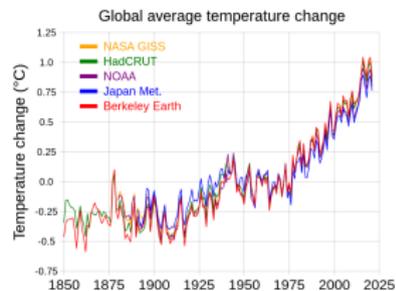
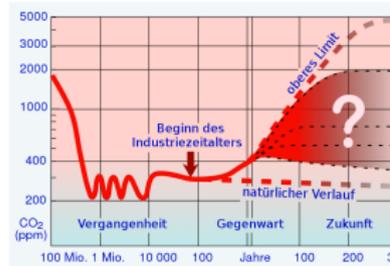
⇒ **rechauffement de la Terre par effet de serre naturel $\approx 30[\text{K}]$**

- dont contribution de H_2O : $\approx 20[\text{K}]$
- dont contribution de CO_2 : $\approx 8[\text{K}]$

jadis (avant le début de la révolution industrielle), concentration de CO_2 : 300ppm

actuellement (2020), concentration de CO_2 : 400ppm

Source: <https://de.wikipedia.org/wiki/Treibhauseffekt>



⇒ l'activité industrielle a ajoutée $\approx \frac{1}{3}$ de l'effet de serre naturel provenant du CO_2 : équivaut à l'équilibre à une

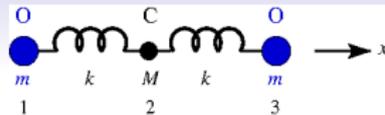
augmentation de la température de $\approx \frac{1}{3} \cdot 8[\text{K}] \sim 2,5[\text{K}]$

⇒ la Terre n'est pas encore arrivée au nouvel équilibre ...

Source: https://de.wikipedia.org/wiki/Wissenschaftlicher_Konsens_zum_Klimawandel

retour au molécule CO₂ linéaire

●: atome C ●: atome O



contrainte: mouvement le long de l'axe x

forme phénoménologique des forces moléculaires (forces Coulombiennes écrantées)

forces inter-atomiques/moléculaires: forces entre objets neutres

☞ on remplace le potentiel Coulombien $V_{\text{Coul}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$ entre deux charges électriques par un potentiel effectif de courte portée

$$V_{\text{LJ}}(r) = V_0 \left(\left(\frac{A}{r/r_0} \right)^{12} - \left(\frac{B}{r/r_0} \right)^6 \right)$$

(p.ex. le potentiel de LENNARD-JONES)

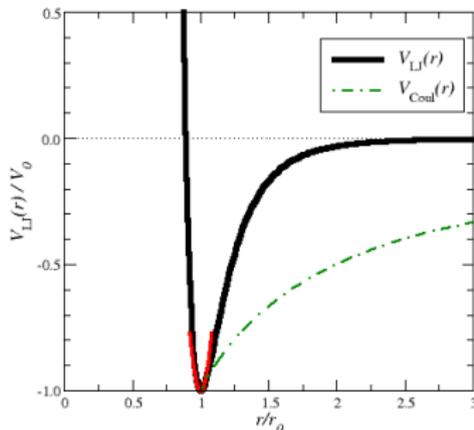
☞ minimum très prononcé à $r = r_0$

si développement limité autour de r_0

$$V_{\text{LJ}}(r) = V_{\text{LJ}}(r_0) + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 + \dots$$

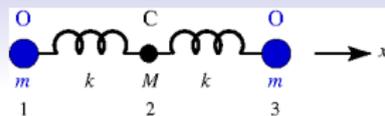
☞ les atomes n'interagissent qu'avec leur premier voisin, car $V(2r_0) \approx 10^{-2} V(r_0)$

⇒ les potentiels inter-atomiques sont remplacés par des **potentiels harmoniques effectifs**, avec une 'raideur' k effective



potentiel harmonique du molécule CO₂ linéaire

●: atome C ●: atome O



* $N = 3$ trois degrés de liberté \Rightarrow coordonnées x_1, x_2, x_3 des trois atomes

* dans le cadre des approximations admises, on écrit le potentiel

$$V = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - b)^2$$

où b : distance d'équilibre entre atomes C et O

* On pose: $\eta_i := x_i - x_{i,0}$ où $x_{i,0}$ est la position d'équilibre de l'atome i , $i = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow x_{2,0} - x_{1,0} = b = x_{3,0} - x_{2,0} \quad \Rightarrow x_2 - x_1 = \eta_2 + x_{2,0} - \eta_1 - x_{1,0} = \eta_2 - \eta_1 + b$$

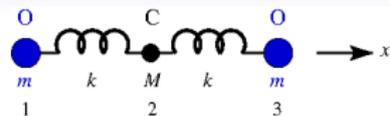
$$V = \frac{k}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{k}{2}(\eta_3 - \eta_2)^2 = \frac{k}{2}(\underbrace{\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2}_{\text{bleu}} - \underbrace{2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3}_{\text{rose}})$$

* on remet ceci sous forme matricielle, avec $V_{ij} = V_{ji}$ \Rightarrow matrice symétrique

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 V_{ij} \eta_i \eta_j, \quad \hat{V} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

énergie cinétique harmonique du molécule CO₂ linéaire

●: atome C ●: atome O



* l'énergie cinétique du molécule s'écrit directement

$$\dot{x}_i = \dot{\eta}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2$$

* on la remet sous forme matricielle, avec $T_{ij} = T_{ji}$ 🗨 matrice symétrique

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

* ainsi, on obtient le lagrangien $L = T - V$ et ensuite les équations d'Euler-Lagrange de mouvement

ces équations de mouvement se résolvent à l'aide de l'ansatz $\eta_j = C a_j e^{-i\omega t}$
⇒ la solution des équations de mouvement se réduit à la solution du système

problème de valeurs et vecteurs propres généralisés

$$(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

où $V_{ij} = V_{ji}$ et $T_{ij} = T_{ji}$ sont symétriques $\Leftrightarrow \hat{V} = \hat{V}^T, \hat{T} = \hat{T}^T$ hermitiques

☞ système d'équations linéaires homogènes pour les a_j

⇒ *solutions non triviales pour les a_j* $\Leftrightarrow \det(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) = 0$.

Ainsi, on obtient l'**équation caractéristique** (ou l'équation séculaire)

$$\det(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Cette équation fournit les **fréquences angulaires ω^2 des modes d'oscillation.**

Solution de l'équation caractéristique (ou de l'équation séculaire)

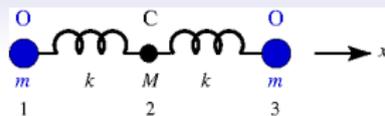
$$\det(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

p.ex. on peut développer le déterminant le long de la 1ère colonne

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \det(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) \\ &= (k - \omega^2 m) \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 M & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} - (-k) \begin{vmatrix} -k & 0 \\ -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} + 0 \\ &= (k - \omega^2 m) [(2k - \omega^2 M)(k - \omega^2 m) - k^2] - k^2(k - \omega^2 m) \\ &= (k - \omega^2 m) [2k^2 - \omega^2(2km + kM) + \omega^4 mM - k^2 - k^2] \\ &= \omega^2(k - \omega^2 m)(\omega^2 mM - k(2m + M)) \end{aligned}$$

ce qui donne les trois solutions (les trois **modes**)

$$\omega^2 = \begin{cases} 0 \\ \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right) \end{cases}$$



On a obtenu les trois solutions pour la fréquence angulaire

$$\omega^2 = \begin{cases} 0 \\ \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right) \end{cases}$$

elles décrivent le comportement du molécule entier, et non pas des atomes individuels

Interprétation physique:

(i) mouvement du centre de masses (le molécule reste rigide)

peut être éliminé en imposant la contrainte $m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0$

(ii) oscillation harmonique d'un seul atome O (l'atome C ne bouge pas !)

car $\omega^2 = \frac{k}{m}$ est la fréquence d'une seule masse attachée à un ressort

(iii) mouvement collectif des 3 atomes

afin de confirmer ces interprétations, calculons les modes explicitement !
 on part du système d'équations

$$\begin{pmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cas 1: $\omega^2 = 0$

$k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} a_1 &= a_2 \\ 2a_2 &= a_1 + a_3 \\ a_2 &= a_3 \end{aligned}$$

$\implies a_1 = a_2 = a_3$



cas 2: $\omega^2 = k/m$

$k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k(2 - \frac{M}{m}) & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} a_2 &= 0 \\ (2 - \frac{M}{m})a_2 &= a_1 + a_3 \end{aligned}$$

$\implies a_1 = -a_3$ et $a_2 = 0$



cas 1: $\omega^2 = 0$

$k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} a_1 &= a_2 \\ 2a_2 &= a_1 + a_3 \\ a_2 &= a_3 \end{aligned}$$

$\implies a_1 = a_2 = a_3$



cas 2: $\omega^2 = k/m$

$k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k(2 - \frac{M}{m}) & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} a_2 &= 0 \\ (2 - \frac{M}{m})a_2 &= a_1 + a_3 \end{aligned}$$

$\implies a_1 = -a_3$ et $a_2 = 0$



cas 3: $\omega^2 = \frac{k}{m}(1 + \frac{2m}{M})$

$k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} -k\frac{2m}{M} & -k & 0 \\ -k & -k\frac{M}{m} & -k \\ 0 & -k & -k\frac{2m}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} \frac{2m}{M}a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 + a_3 + \frac{M}{m}a_2 &= 0 \\ \frac{2m}{M}a_3 + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\implies a_1 = a_3 = -\frac{M}{2m}a_2$



N.B.: pour un équilibre stable, il faut $\omega^2 \geq 0 \Rightarrow$ mouvement harmonique autour de l'équilibre.

N.B.': mais stationnarité instable, si $\omega^2 < 0 \Rightarrow$ éloignement exponentiel du point stationnaire

Sur l'orthogonalité:

les vecteurs propres: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas tous orthogonaux !

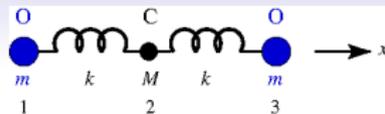
à la place, il faut considérer (où $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ sont les 3 vecteurs propres)

$$\mathbf{a}_1 \cdot (\hat{T} \mathbf{a}_2) = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} m & & \\ & M & \\ & & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ -m \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{a}_1 \cdot (\hat{T} \mathbf{a}_3) = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} m & & \\ & M & \\ & & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ -2m \\ m \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot (\hat{T} \mathbf{a}_3) = (1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} m & & \\ & M & \\ & & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ -2m \\ m \end{pmatrix} = 0$$

Conclusion: beaucoup de similarités avec les valeurs/vecteurs propres standard, mais aussi quelques différences.



Oscillations linéaires de CO₂: comparaison avec l'expérience

Expérimentalement, on peut mesurer:

(1) oscillation symétrique $\nu_S \approx 1335[\text{cm}^{-1}]$

(2) oscillation anti-symétrique $\nu_A \approx 2350[\text{cm}^{-1}]$

Théoriquement: $\omega_S = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 + 2\frac{m}{M}}$

avec les masses $m = m_O \simeq 16m_H$, $M = m_C \simeq 12m_H$

<p>expérience: $\frac{\nu_A}{\nu_S} \simeq \frac{2350}{1335} \simeq 1,76$, théorie: $\frac{\omega_A}{\omega_S} \simeq \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{16}{12}} \simeq 1,91$</p>
--

👉 le modèle simple des oscillations linéaires harmoniques est déjà une bonne approximation à la réalité pour CO₂.

L'expérience est reproduite avec une précision de $\approx 10\%$.

3. Théorie des valeurs et vecteurs propres généralisés

Définition: Soit V un espace pré-Hilbert réel et $A : V \rightarrow V$ hermitique.

(i) A est **définie positive**, si

$$\langle x | Ax \rangle > 0 \quad \forall x \in V \text{ et } x \neq 0$$

(ii) A est **sémi-définie positive**, si

$$\langle x | Ax \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V \text{ et } x \neq 0$$

Exemples: (1) auprès d'un minimum, si le potentiel d'un système mécanique est

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V_{ij} \eta_i \eta_j \geq 0$$

\Rightarrow la matrice \hat{V} est sémi-définie positive.

(2) si l'énergie cinétique d'un système mécanique s'écrit $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j > 0$

\Rightarrow la matrice \hat{T} est définie positive.

Proposition: Si $A : V \rightarrow V$ est définie positive, alors ses valeurs propres sont toutes positives.

N.B.: il est clair que A hermitique est nécessaire pour cette considération.

Démonstration: Discutons le cas $V \hat{=} \mathbb{R}^d$. Car A est hermitique, il existe une matrice unitaire U , $UU^+ = \mathbf{1}$, telle que $U^+AU = D$ avec $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \alpha_d \end{pmatrix}$ diagonale. Alors

$$\begin{aligned} 0 &< \langle x | Ax \rangle = \langle x | (UU^+)A(UU^+)x \rangle \\ &= \langle U^+x | (U^+AU)(U^+x) \rangle = \langle y | Dy \rangle \end{aligned}$$

où $y = U^+x$. Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de V des vecteurs propres de A . Si l'on prend $y = e_1$, on obtient pour la première valeur propre $\alpha_1 = \langle e_1 | De_1 \rangle > 0$. De même, $\alpha_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, d$. QED

Corollaire: Si A est sémi-définie positive, alors ses valeurs propres sont toutes non négatives.

Illustration: Si $A : V \rightarrow V$ est définie positive, alors $\det A > 0$.

Ceci est évident, car $\det A = \prod_{j=1}^d \alpha_j > 0$. En particulier, une telle matrice a une inverse A^{-1} .

Théorème: Soit V espace pré-Hilbert réel (de dimension n), $A : V \rightarrow V$ définie positive et $B : V \rightarrow V$ sémi-définie positive. On considère l'équation $Bx_i = \lambda_i Ax_i$. Alors:

(i) les valeurs propres λ_i sont réelles et non négatives.

(ii) si pour $i \neq j$, on a $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors $\langle x_i | Ax_j \rangle = 0$.

(iii) on peut toujours normaliser les x_i tel que $\langle x_i | Ax_j \rangle = \delta_{ij}$. Alors il existe une transformation unitaire $U : V \rightarrow V$ telle que

$$U^T A U = \mathbf{1} \quad , \quad U^T B U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

N.B.: on reconnaît les structures découvertes en étudiant l'exemple de la molécule CO_2 .

Ainsi, la positivité des fréquences ω^2 est garantie d'avance.

N.B.: Car V réel, l'adjoint devient la transposée $U^+ = U^T$. La matrice U se construit comme d'habitude des vecteurs propres orthonormés.

On appelle ceci la **diagonalisation simultanée des matrices A et B** .

Démonstration: Car A est invertible, on peut réécrire le problème sous la forme $A^{-1}Bx_i = \lambda_i x_i$. Ceci est un problème standard des valeurs/vecteurs propres. Il s'ensuit que les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ existent.

(i) on a $Bx_i = \lambda_i Ax_i$ ou bien $(B - \lambda_i A)x_i = 0$. Il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x_i | (B - \lambda_i A)x_i \rangle = \langle (B - \lambda_i^* A)x_i | x_i \rangle \\ &= \langle (\lambda_i - \lambda_i^*) Ax_i | x_i \rangle = (\lambda_i^* - \lambda_i) \underbrace{\langle Ax_i | x_i \rangle}_{>0} \end{aligned}$$

et par conséquent $\lambda_i^* = \lambda_i \in \mathbb{R}$.

De plus, on a bien $\langle x_i | Bx_i \rangle = \langle x_i | \lambda_i Ax_i \rangle = \lambda_i \langle x_i | Ax_i \rangle$ ou encore si $x_i \neq 0$

$$\lambda_i = \frac{\langle x_i | Bx_i \rangle}{\langle x_i | Ax_i \rangle} \geq 0$$

car B est sémi-définie positive et A est définie positive.

(ii) si pour $i \neq j$, on a $\lambda_i \neq \lambda_j$, on a $(B - \lambda_i A)x_i = 0$ et $(B - \lambda_j A)x_j = 0$. Donc

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x_j | (B - \lambda_i A)x_i \rangle = \langle (B - \lambda_i^* A)x_j | x_i \rangle \\ &= (\lambda_j - \lambda_i) \langle Ax_j | x_i \rangle \end{aligned}$$

et on en tire que $\langle x_i | Ax_j \rangle = \langle Ax_j | x_i \rangle = 0$ pour $i \neq j$.

(iii) la composante k de Bx_i s'écrit $(Bx_i)_k = \sum_{\ell} B_{k\ell}x_{\ell i}$. Avec les éléments $D_{ji} = \lambda_i\delta_{ji}$,
 où $\delta_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$ (δ de KRONECKER) on a

$$\sum_{\ell} B_{k\ell}x_{\ell i} = (Bx_i)_k = (Ax_i)_k \lambda_i = \sum_{\ell} A_{k\ell}x_{\ell i} \lambda_i = \sum_{\ell, j} A_{k\ell}x_{\ell j} D_{ji} \quad (*)$$

Car les x_i sont mutuellement orthogonaux, on peut fixer leurs normalisations tel que $\langle x_j | Ax_i \rangle = \sum_{k, \ell} x_{kj} A_{k\ell} x_{\ell i} \stackrel{!}{=} \delta_{ji}$. Avec les vecteurs propres x_j , on forme la matrice

$$U := \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{ni} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

et la condition d'orthogonalité devient $U^T A U = \mathbf{1}$. La relation (*) prend la forme $B U = A U D$. Par conséquent, $U^T B U = (U^T A U) D = \mathbf{1} D = D$ et on a diagonalisé simultanément B et A .

QED

4. Sur le contexte physique

Les oscillations des molécules bi-atomiques sont souvent modélisées empiriquement à l'aide d'un **potentiel de MORSE**

$$V(r) = V_0 \left(1 - e^{-\alpha(r-r_0)}\right)^2, \quad \alpha := \sqrt{\frac{k}{2V_0}}$$

ce qu'on peut développer $V(r) \simeq V_0(1 - 1 + (\frac{k}{2V_0})^{1/2}(r - r_0) + \dots)^2 \simeq \frac{k}{2}(r - r_0)^2 + \dots$

Échelles d'énergie:

- ① électronique $\Delta E \gtrsim 1[\text{eV}]$
- ② vibrations $\Delta E \simeq 0,1[\text{eV}]$
- ③ rotations $\Delta E \simeq 1[\text{meV}]$

où $1[\text{eV}] = 1 \text{ électronvolt} \simeq 1,6 \cdot 10^{-19}[\text{J}]$ est l'énergie gagnée par un électron dans un potentiel électrique de $1[\text{V}]$.

Comparaison avec les énergies thermiques: $1[\text{eV}] \hat{=} 10^4[\text{K}]$.

☞ les vibrations et rotations des molécules s'observent dans l'**infra-rouge**.

Il faut un traitement en tenant compte des effets quantiques

→ **niveaux discrets d'énergie** !



- **vibrations**: fréquences isolées, bien séparées
- **rotations**: des bandes (multitude des raies très proches)

L'interaction avec la lumière infra-rouge (une onde électromagnétique) se réalise par couplage au moment dipolaire de la molécule.

Molekül	Gestalt Abstände in 10^{-10} m	Trägheits- moment in 10^{-40} kg m ²	Elektr. Moment in 10^{-30} Amp.sekm	Innere Schwingungen und ihre Frequenz in 10^{13} sek ⁻¹
H ₂		0,47	0	$\nu = 12,8$
O ₂		19,0	0	$\nu = 4,7$
Cl ₂		174	0	$\nu = 1,7$
HCl		2,7	3,4	$\nu = 8,3$
CO ₂		70	0	$\nu_1 = 3,8$; $\nu_2 = 2,0$; $\nu_3 = 7,7$
N ₂ O		66,0	0,47	$\nu_1 = 3,9$; $\nu_2 = 1,8$; $\nu_3 = 6,7$
H ₂ O		1,0 1,9 3,0	6,0	$\nu_1 = 10,8$; $\nu_2 = 4,8$; $\nu_3 = 7,0$

- * observables en spectroscopie infra-rouge: HCl, CO, ...
- * non observables: molécules symétriques H₂, O₂, N₂, ...

le site <http://chemtube3d.com/vibrationsCO2.htm>

donne animations de vibrations de multiples molécules

☞ utilisation systématique de la spectroscopie afin de comprendre la forme des molécules

un peu de vocabulaire fr-all/ ein wenig dt-frz Vokabular

Treibhauseffekt, <i>m</i>	effet de serre, <i>m</i>
Treibhausgas, <i>n</i>	gaz de l'effet de serre, <i>m</i>
abschirmen	écranter
Schirm, <i>m</i> ; Bildschirm, <i>m</i>	écran, <i>m</i>
Fall, <i>m</i>	cas, <i>m</i>
(aber: freier Fall, <i>m</i>)	chute libre, <i>f</i>)
positiv definit	défini positif
positiv semi-definit	sémi-défini positif
Anordnung, <i>f</i>	arrangement, <i>m</i>
Gestalt, <i>f</i>	forme, <i>f</i>
Abstand, <i>m</i>	distance, <i>f</i>
Biegung, <i>f</i>	flexion, <i>f</i>
Streckung, <i>f</i>	étirement, <i>m</i>
Trägheitsmoment, <i>n</i>	moment d'inertie, <i>m</i>
elektrisches Moment, <i>n</i>	moment dipolaire, <i>m</i>
Drehmoment, <i>n</i>	moment d'une force <i>m</i> ; couple, <i>m</i>
Drehimpuls, <i>m</i>	moment cinétique, <i>m</i>
Molekül, <i>n</i>	molécule, <i>m</i>
Atom, <i>n</i>	atome, <i>m</i>

COURS X/ VORLESUNG X

1. Discussion approfondie des contraintes

Rappels:

* en mécanique, nous avons introduits des **coordonnées généralisées** q_i , $i = 1, \dots, \mathcal{N}$, où \mathcal{N} est le nombre de **degrés de liberté**

Exemples: (1) une particule, coordonnées cartésiennes x, y, z
(2) une particule, coordonnées sphériques r, θ, ϕ

* en général, le 2^e axiome de Newton donne les équations de mouvement $\ddot{x}_i = F_i(\{x_k\})$, mais il faut encore trouver explicitement les forces F_i

a priori définit **algorithme mathématique**: résoudre système d'équations différentielles

* souvent, forces exprimées implicitement sous forme des **contraintes**

Exemple: waggon sur montagne russe 🗨️ waggon doit rester sur le rail !

🗨️ cette difficulté est contournée par l'**approche d'Euler-Lagrange**:

(a) choisir des coordonnées généralisées afin de paramétriser les contraintes

(b) restriction aux forces conservatives: $\mathbf{F} = -\nabla V$ où V : **potentiel**

(c) avec l'énergie cinétique, former le **lagrangien** $L := T - V$

(d) écrire les équations d'Euler-Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

pour les q_i indépendantes 🗨️ réduction de \mathcal{N} par les contraintes

L'approche d'Euler-Lagrange:

(a) choisir des coordonnées généralisées afin de paramétriser les contraintes

(b) restriction aux forces conservatives: $\mathbf{F} = -\nabla V$ où V : **potentiel**

(c) avec l'énergie cinétique, former le **lagrangien** $L := T - V$

(d) écrire les équations d'Euler-Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

pour les q_i indépendantes \Rightarrow réduction de \mathcal{N} par les contraintes

* ainsi les contraintes sont éliminées du problème mécanique

* méthode très efficace d'obtenir les équations différentielles du mouvement

* mais les forces de contrainte ne sont pas déterminées

Exemple: waggon sur montagne russe

\Rightarrow forces de contrainte sont les forces qui tirent sur les rails (3^e axiome de Newton)

important pour la construction stable de la structure de la montagne russe

Considérons un système mécanique, avec \mathcal{N} degrés de liberté et coordonnées généralisées q_i , $i = 1, \dots, \mathcal{N}$.

Définition: Une contrainte est **holonome**, si elle s'écrit sous la forme

$$f(q_1, q_2, \dots, q_k, t) = 0$$

Toute autre contrainte est dite **non holonome**.

Exemple: pour une particule, en coordonnées sphériques r, θ, ϕ , une contrainte $r = r_0$ est holonome et une contrainte $r \leq r_0$ est non holonome.

analyse différentielle d'une contrainte holonome:

$$\frac{df}{dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\sum_{\ell=1}^k \frac{\partial f}{\partial q_\ell} \frac{dq_\ell}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Considérons un système mécanique, avec \mathcal{N} degrés de liberté et coordonnées généralisées q_i , $i = 1, \dots, \mathcal{N}$.

Définition: Une contrainte est **holonome**, si elle s'écrit sous la forme

$$f(q_1, q_2, \dots, q_k, t) = 0$$

Toute autre contrainte est dite **non holonome**.

Exemple: pour une particule, en coordonnées sphériques r, θ, ϕ , une contrainte $r = r_0$ est holonome et une contrainte $r \leq r_0$ est non holonome.

analyse différentielle d'une contrainte holonome:

$$\frac{df}{dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\sum_{\ell=1}^k \frac{\partial f}{\partial q_\ell} \frac{dq_\ell}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

Considérons un système mécanique, avec \mathcal{N} degrés de liberté et coordonnées généralisées q_i , $i = 1, \dots, \mathcal{N}$.

Définition: Une contrainte est **holonome**, si elle s'écrit sous la forme

$$f(q_1, q_2, \dots, q_k, t) = 0$$

Toute autre contrainte est dite **non holonome**.

Exemple: pour une particule, en coordonnées sphériques r, θ, ϕ , une contrainte $r = r_0$ est holonome et une contrainte $r \leq r_0$ est non holonome.

analyse différentielle d'une contrainte holonome:

$$\frac{df}{dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\sum_{\ell=1}^k \frac{\partial f}{\partial q_\ell} dq_\ell + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

Considérons un système mécanique, avec \mathcal{N} degrés de liberté et coordonnées généralisées q_i , $i = 1, \dots, \mathcal{N}$.

Définition: Une contrainte est **holonome**, si elle s'écrit sous la forme

$$f(q_1, q_2, \dots, q_k, t) = 0$$

Toute autre contrainte est dite **non holonome**.

Exemple: pour une particule, en coordonnées sphériques r, θ, ϕ , une contrainte $r = r_0$ est holonome et une contrainte $r \leq r_0$ est non holonome.

analyse différentielle d'une contrainte holonome:

$$\frac{df}{dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\sum_{\ell=1}^k a_{\ell} dq_{\ell} + a_t dt = 0$$

où $a_{\ell} := \frac{\partial f}{\partial q_{\ell}}$ et $a_t := \frac{\partial f}{\partial t}$.

cette discussion nous fournit notre point de départ:

Considérons un système mécanique, avec \mathcal{N} degrés de liberté et coordonnées généralisées q_i , $i = 1, \dots, \mathcal{N}$ et une contrainte de forme

$$\sum_{\ell=1}^k a_{\ell} dq_{\ell} + a_t dt = 0$$

N.B.: cette condition est un peu plus général qu'une contrainte holonome

comment obtenir les équations d'Euler-Lagrange ? 🗨️ principe d'Hamilton !

Principe d'Hamilton *Le mouvement d'un système mécanique, entre les temps t_1 et t_2 donnés et où les valeurs $q_i(t_1)$ et $q_i(t_2)$ sont fixés, est tel que l'action soit minimale:*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \min !$$

Ici, $L = T - V$ est le lagrangien du système.

Appliquons ceci à la discussion de la contrainte, sous sa forme différentielle.
Car les temps sont fixés dans le principe d'Hamilton, on a $dt = 0$.
Ceci implique

$$\sum_{\ell=1}^k a_{\ell} dq_{\ell} = 0$$

avant, nous avons étudié les variations $\eta_{\ell}(t)$ autour de la solution du problème variationnel. Nous pouvons en particulier regarder le cas $dq_{\ell} = \eta_{\ell}$.

La contrainte peut aussi être multipliée avec une constante λ , tel que

$$\lambda \sum_{\ell=1}^k a_{\ell} dq_{\ell} = 0$$

Définition: La constante λ s'appelle **multiplicateur de Lagrange**.

Auparavant, notre discussion du principe d'Hamilton nous a mené à

$$\Delta S = \left. \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \eta_i(t) = 0$$

et nous y ajoutons la contrainte sous la forme (c.à.d. avec $dq_\ell = \eta_\ell$)

$$\lambda \sum_{\ell=1}^k a_\ell dq_\ell = 0$$

Ces deux conditions donnent ensemble la condition d'extrémalité

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \lambda a_i \right] \eta_i(t) = 0$$

comment procéder avec la condition d'extrémalité

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \lambda a_i \right] \eta_i(t) = 0$$

sans contraintes, ou avec les contraintes éliminées, les η_i restantes étaient toutes indépendantes. Dans ce cas, on a pu conclure que $[\dots] = 0$ dans la condition d'extrémalité. Ainsi les équations d'Euler-Langrangre se déduisaient.

Ce raisonnement n'est plus applicable, car on a bien la condition supplémentaire $\sum_{i=1}^k a_i \eta_i = 0$.

? Comment s'en sortir ?

* Pour \mathcal{N} degrés de liberté, les variations $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\mathcal{N}-1}$ sont indépendantes.

* Choisir λ tel que

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\mathcal{N}}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mathcal{N}}} \right) + \lambda a_{\mathcal{N}} \stackrel{!}{=} 0$$

* Maintenant, l'argumentation habituelle peut s'appliquer aux variations $\eta_1, \dots, \eta_{\mathcal{N}-1}$ indépendantes, afin de déduire comme auparavant

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \lambda a_i = 0 ; \quad i = 1, \dots, \mathcal{N} - 1$$

nous avons donc un système de $\mathcal{N} + 1$ équations, c'est à dire

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \lambda a_i = 0 ; \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}$$

$$\sum_{\ell=1}^k a_{\ell} \frac{dq_{\ell}}{dt} = 0 \quad \text{ici une seule contrainte}$$

pour les $\mathcal{N} + 1$ variables q_i , $i = 1, \dots, \mathcal{N}$ et λ .

Un tel système peut être résolu, car le nombre d'équations est égal au nombre des inconnues.

Interprétation de λ ? Nous avons les équations différentielles

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda a_i = \text{force}$$

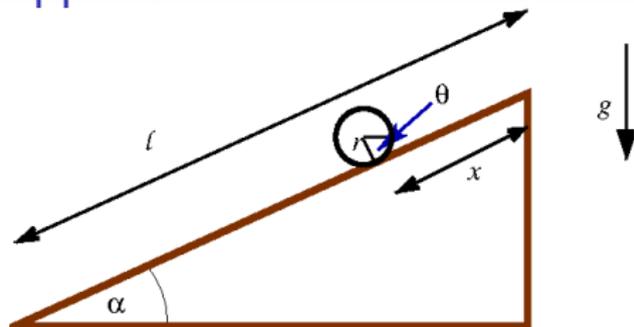
donc: λa_i est la composante de la **force de contrainte**, dans la direction de la variable q_i .



algorithme pour le calcul des forces de contrainte

Exemple d'application

une roue de masse m et de rayon r
roule sur un plan incliné, avec angle α
d'inclinaison constant, sous l'influence
de la pesanteur



nombre de degrés de liberté: **2** décrit p.ex. par les coordonnées x, θ

contrainte: $x = r\theta \Rightarrow -dx + r d\theta = 0$

a bien la forme étudiée ci-dessus

energie cinétique

$$T = \underbrace{\frac{m}{2} \dot{x}^2}_{\text{mouvement du centre de masse}} + \underbrace{\frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2}_{\text{rotation autour du centre}}$$

potentiel

la seule force explicite est la pesanteur

$$V = mg(\ell - x) \sin \alpha$$

lagrangien

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 - mg(\ell - x) \sin \alpha$$

(A) élimination d'une variable, ici via $x = r\theta$. On trouve

$$\begin{aligned} L &= mr^2\dot{\theta}^2 - mg(\ell - r\theta) \sin \alpha \\ &= m\dot{x}^2 + mgsin(\alpha)x + \text{cste.} \end{aligned}$$

N.B.: on observe bien une inertie m , différente de $\frac{m}{2}$ qu'on obtient pour une bille qui glisse sur le plan

(B) calcul explicite des forces de contrainte

car contrainte $x = r\theta$, on a bien la forme différentielle $-dx + rd\theta = 0$

\Rightarrow de la forme générale $a_x dx + a_\theta d\theta = 0$, on identifie $a_x = -1, a_\theta = r$.

\Rightarrow il faut écrire deux équations d'Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \lambda a_x &= 0, & \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) + \lambda a_\theta &= 0 \\ mg \sin \alpha - m\ddot{x} + \lambda(-1) &= 0, & -mr^2\ddot{\theta} + \lambda r &= 0 \end{aligned}$$

ensemble avec la contrainte, on a un système des 3 équations différentielles pour les 3 variables x, θ, λ

$$m\ddot{x} - mg \sin \alpha + \lambda = 0$$

$$mr^2\ddot{\theta} - \lambda r = 0$$

$$r\dot{\theta} - \dot{x} = 0$$

techniquement, la solution est immédiate:

(3^e) $r\ddot{\theta} = \ddot{x} \Rightarrow$ (2^e) $m\ddot{x} = \lambda \Rightarrow$ (1^{er}) $2\lambda - mg \sin \alpha = 0$, donc

$$\lambda = \frac{1}{2}mg \sin \alpha = \text{cste.}, \quad \ddot{x} = \frac{1}{2}g \sin \alpha, \quad \ddot{\theta} = \frac{g \sin \alpha}{2r}$$

la contrainte freine la roue, par rapport à la bille qui ne glisse

force de contrainte: $F_x = \lambda a_x = -\frac{1}{2}mg \sin \alpha$

ceci est bien entendu compatible avec le bilan des forces

$$m\ddot{x} = F_{\text{ex}} + F_{\text{contr}} = mg \sin \alpha + \left(-\frac{1}{2}\right) mg \sin \alpha = \frac{1}{2}mg \sin \alpha$$

le facteur $\frac{1}{2}$ est consistant avec le résultat obtenu ci-dessus par élimination d'une variable

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Koordinate, <i>f</i>	coordonnée, <i>f</i>
Zwangsbedingung, <i>f</i>	contrainte, <i>f</i>
Zwangskraft, <i>f</i>	force de contrainte, <i>f</i>
Freiheitsgrad, <i>m</i>	degré de liberté, <i>m</i>
Potential, <i>n</i> (potentielle Energie, <i>f</i>)	potentiel, <i>m</i> (énergie potentielle, <i>f</i>)
kinetische Energie, <i>f</i>	énergie cinétique, <i>f</i>
Lagrangefunktion, <i>f</i>	lagrangien, <i>m</i>
Lagrangemultiplikator, <i>m</i>	multiplicateur de Lagrange, <i>m</i>
Zwangskraft, <i>f</i>	force de contrainte, <i>f</i>
holonom	holonome
nichtholonom	non holonome

le genre grammatical des substantifs (*m,f*) est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

2. Symétries et lois de conservation

comment peut-on trouver des lois de conservation plus systématiquement ?

système mécanique, avec \mathcal{N} degrés de liberté et coordonnées généralisées q_i

Définition: Une variable q_c s'appelle **cyclique** si elle n'est pas présente dans le lagrangien

$$\frac{\partial L}{\partial q_c} = 0$$

Définition: L'impulsion canoniquement conjuguée à la variable q_i est

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Théorème: Si q_c est cyclique, alors l'impulsion p_c est conservée.

Démonstration:

$$\dot{p}_c = \frac{d}{dt} p_c = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_c} = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

l'identification d'une variable cyclique donne directement une quantité conservée.

Exemple: particule de masse m , avec potentiel **central**,

c.à.d. $V = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

(a) coordonnées cartésiennes

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

aucune variable cyclique apparente \Rightarrow aucune quantité conservée évidente

(b) coordonnées sphériques

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

la variable ϕ est cyclique, car $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$. Donc le moment cinétique

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi} = \text{cste.}$$

est bien une quantité conservée.

cet résultat peut encore être considéré d'un point de vue légèrement différent:

Si q_c est cyclique, le lagrangien est *invariant* sous un changement de q_c :

$$L(q_c) = L(q_c + \varepsilon)$$

dans ce cas on parle d'une **symétrie** du lagrangien L

Théorème (Noether):

Si L est symétrique en q_c , alors l'impulsion p_c est conservée.

Exemple: considérons la coordonnée spatiale x_i ,

et admettons que L soit invariant sous translations en x_i

$$L(x_i) = L(x_i + \varepsilon) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

donc l'impulsion $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i = \text{cste.}$ est conservée

invariance sous translations spatiales \Rightarrow *conservation de l'impulsion*

👉 ainsi, nous avons inclu aussi l'axiome **III** de Newton

habituellement, l'énergie cinétique $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i)^2$, potentiel $V = V(\{x_i\})$

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$$

est bien la *quantité de mouvement*, dans la terminologie d'antan 

3. Collisions ou chocs élastiques

Lors d'un **choc élastique**, deux particules échangent impulsion et énergie

* les deux particules ne collent pas l'une sur l'autre, leurs masses restent constantes

* il n'y a pas de production d'autres particules (p.ex. par fragmentation)

(1) la **conservation de l'impulsion** s'écrit

$m_{1,2}$: masses des particules

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$$

on peut décomposer les vitesses en directions 'parallèles' et 'transverses'

$$\mathbf{v}_i = v_{i,\parallel} \mathbf{e}_{\parallel} + \mathbf{v}_{i,\perp}, \quad \text{où } \mathbf{e}_{\parallel} \perp \mathbf{v}_{i,\perp}$$

lors d'un choc élastique, les composantes transverses restent inchangées $\mathbf{v}_{i,\perp} = \mathbf{v}'_{i,\perp}$

\Rightarrow il suffit de se concentrer sur la composante 'parallèle' \Rightarrow notation $v_{i,\parallel} \mapsto v_i$



\Rightarrow réduction au cas uni-dimensionnel

(1') la conservation de l'impulsion s'écrit

avec réduction au cas 1D

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

(2) la conservation de l'énergie s'écrit

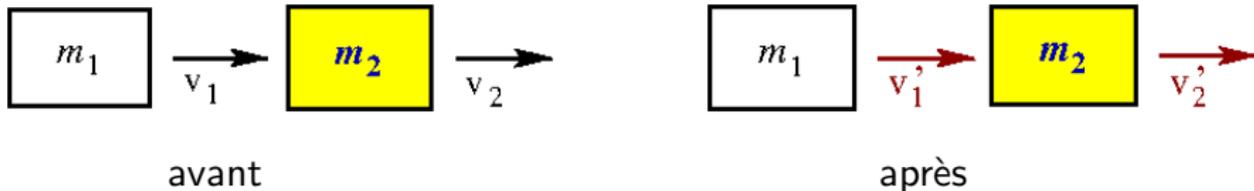
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

N.B.: on ne considère que l'état du système loin avant, et loin après, le choc aucune information sur les détails des interactions entre particules

⇒ on trouve facilement les vitesses après le choc élastique

exercice

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 (2v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{m_2 v_2 + m_1 (2v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

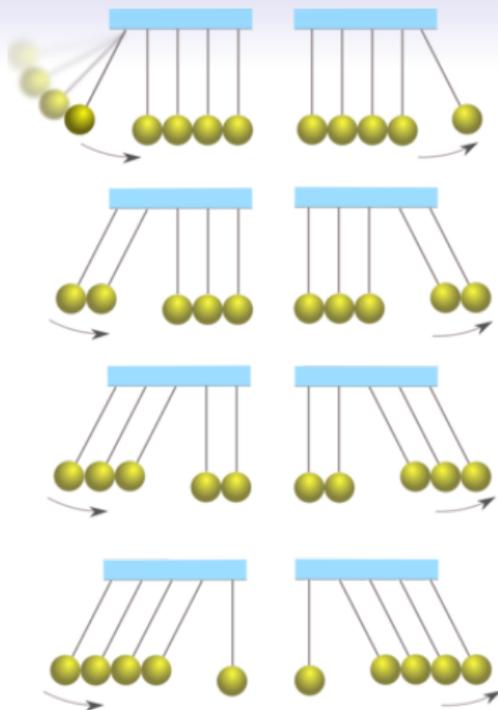


Exemple: le pendule de Newton

on place une série de billes identiques, et au repos, en contact direct

on jette une autre bille (ou plusieurs billes) contre cette chaîne

on peut admirer l'évolution du système, comme illustration de la conservation de l'impulsion et de l'énergie



source:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelstoßpendel>,

voir aussi pour une animation

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

zyklisch

Impuls, *m*, (ALT: Bewegungsgröße, *f*)

Impuls, *m*

kanonisch konjugierter Impuls, *m*

Erhaltungsgröße, *f*

Drehimpuls, *m*

Drehmoment, *n*

Symmetrie, *f*

Translationsinvarianz, *f*

Rotationsinvarianz, *f*

elastischer Stoß, *m*

Stoßpendel, *n*

cyclique

quantité de mouvement, *f*

impulsion, *f*

impulsion canoniquement conjuguée, *f*

quantité conservée, *f*

moment cinétique, *m*

couple, *m*

symétrie, *f*

invariance sous translations, *f*

invariance sous rotations, *f*

choc élastique, *m*

pendule de Newton, *m*

le genre grammatical des substantifs (*m,f*) est indiqué/*das grammaticalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

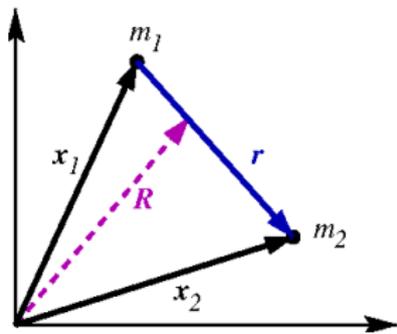
4. Forces centrales & séparation du centre de masses

on considère deux particules, de masses $m_{1,2}$, à des positions $\mathbf{x}_{1,2}$

Définition On dit qu'une force est **centrale**, si le potentiel associé ne dépend que de la valeur absolue de la distance entre les particules, c.à.d.

$$V = V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$$

Pour les forces centrales, on peut toujours séparer le problème de deux corps en deux problèmes à un seul corps



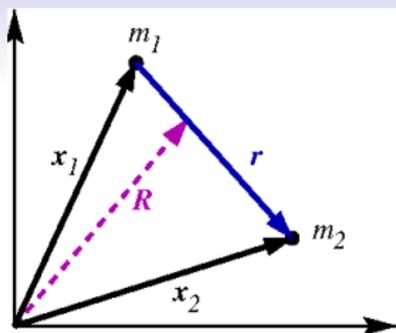
vecteur de distance $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$

vecteur **centre de masses** $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}$

pour des jolies animations, voir

https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_%C3%A0_deux_corps#%C3%A9quation_de_la_trajectoire_de_la_particule_fictive

N.B. ne jamais utiliser des caractères spéciaux comme ã, è, î, ó, ü, ç, ß dans les noms de sites/fichiers!



vecteur de distance $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$

vecteur **centre de masses** $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}$

énergie cinétique $T = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{x}}_2^2$

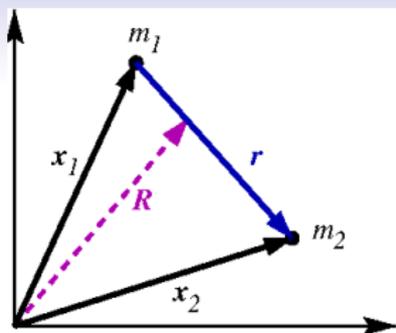
mais nous voulons $T \stackrel{!}{=} T(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}})$

$$(m_1 + m_2)\mathbf{R} = m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2, \quad \begin{cases} m_1 \mathbf{r} = -m_1 \mathbf{x}_1 + m_1 \mathbf{x}_2 \\ -m_2 \mathbf{r} = m_2 \mathbf{x}_1 - m_2 \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

additionner donne

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\mathbf{R} + m_1 \mathbf{r} = (m_1 + m_2)\mathbf{x}_2 \\ (m_1 + m_2)\mathbf{R} - m_2 \mathbf{r} = (m_1 + m_2)\mathbf{x}_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$



vecteur de distance $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$

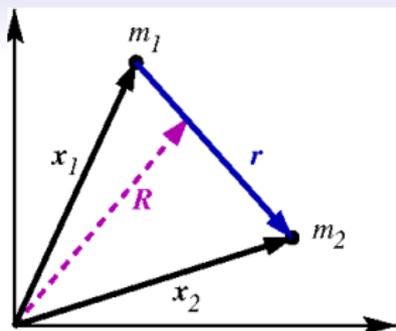
vecteur **centre de masses** $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$ et $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$

énergie cinétique $T = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{x}}_2^2$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{\mathbf{R}}^2 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) \\
 &+ \frac{m_2}{2} \left(\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) \\
 &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \\
 &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \quad \text{où } \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ est la } \mathbf{masse réduite}
 \end{aligned}$$

on peut aussi écrire $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$



vecteur de distance $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$

vecteur **centre de masses** $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

on a donc le lagrangien $L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)$

séparation en lagrangiens des sous-systèmes $L = L_1(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R}) + L_2(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$

(a) \mathbf{R} est cyclique $\Rightarrow \mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}} = \text{cste.}$

☞ **mouvement rectiligne uniforme du centre de masses**

on peut toujours choisir un repère tel que $\dot{\mathbf{R}} = 0$

☞ $L = L_2(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$ se réduit au lagrangien L_2 qui décrit le mouvement relatif, autour du centre de masses.

changement de notation: on écrit dès maintenant $L_2 \mapsto L$

COURS XI/ VORLESUNG XI

Rappel: Symétries et lois de conservation

système mécanique, avec \mathcal{N} degrés de liberté et coordonnées généralisées q_i

Définition: Une variable q_c s'appelle **cyclique** si elle n'est pas présente dans le lagrangien

$$\frac{\partial L}{\partial q_c} = 0$$

Définition: L'**impulsion** canoniquement conjuguée à la variable q_i est

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Théorème: Si q_c est cyclique, alors l'impulsion p_c est conservée.

Définition: Si q_c est cyclique, le lagrangien $L(q_c) = L(q_c + \varepsilon)$ est invariant sous un changement de q_c . On parle d'une **symétrie** du lagrangien L .

Théorème (Noether):

Si L est symétrique en q_c , alors l'impulsion p_c est conservée.

⇒ l'identification d'une symétrie donne directement une quantité conservée.

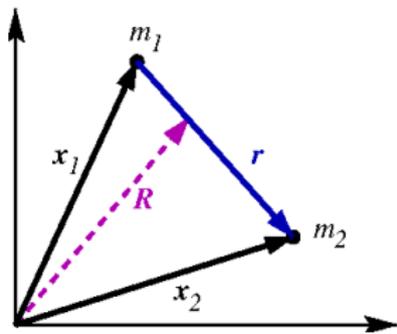
1. Forces centrales & problème de deux corps

on considère deux particules, de masses $m_{1,2}$, à des positions $\mathbf{x}_{1,2}$

Définition On dit qu'une force est **centrale**, si le potentiel associé ne dépend que de la valeur absolue de la distance entre les particules, c.à.d.

$$V = V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$$

Pour les forces centrales, on peut toujours séparer le problème de deux corps en deux problèmes à un seul corps



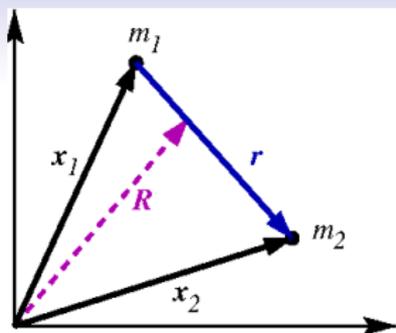
vecteur de distance $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$

vecteur **centre de masses** $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}$

pour des jolies animations, voir

https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_%C3%A0_deux_corps#%C3%A9quation_de_la_trajectoire_de_la_particule_fictive

N.B. ne jamais utiliser des caractères spéciaux comme ã, è, î, ó, ü, ç, ß dans les noms de sites/fichiers!



vecteur de distance $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$

vecteur **centre de masses** $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}$

énergie cinétique $T = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{x}}_2^2$

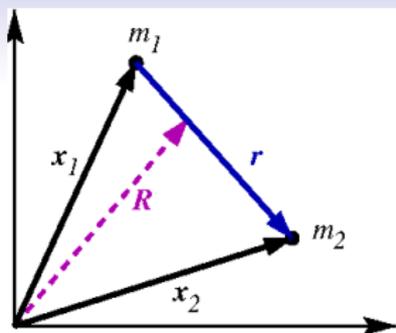
mais nous voulons $T \stackrel{!}{=} T(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}})$

$$(m_1 + m_2)\mathbf{R} = m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2, \quad \begin{cases} m_1 \mathbf{r} = -m_1 \mathbf{x}_1 + m_1 \mathbf{x}_2 \\ -m_2 \mathbf{r} = m_2 \mathbf{x}_1 - m_2 \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

additionner donne

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\mathbf{R} + m_1 \mathbf{r} = (m_1 + m_2)\mathbf{x}_2 \\ (m_1 + m_2)\mathbf{R} - m_2 \mathbf{r} = (m_1 + m_2)\mathbf{x}_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$



vecteur de distance $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$

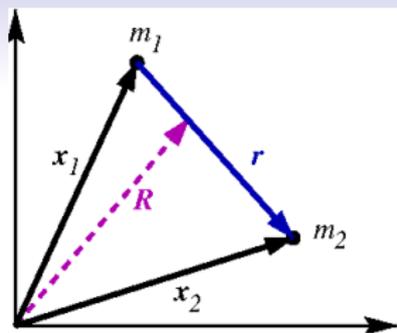
vecteur **centre de masses** $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$ et $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$

énergie cinétique $T = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{x}}_2^2$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{\mathbf{R}}^2 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) \\
 &+ \frac{m_2}{2} \left(\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) \\
 &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \\
 &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \quad \text{où } \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ est la } \mathbf{masse réduite}
 \end{aligned}$$

on peut aussi écrire $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$



vecteur de distance $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$

vecteur **centre de masses** $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

on a donc le lagrangien

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)$$

séparation en lagrangiens des sous-systèmes $L = L_1(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R}) + L_2(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$

(a) \mathbf{R} est cyclique $\Rightarrow \mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}} = \text{cste.}$

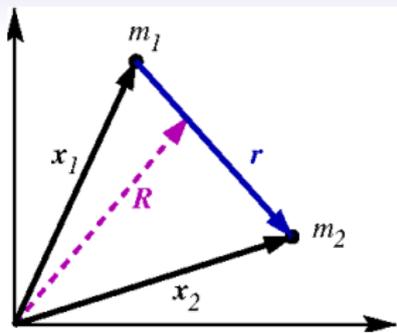
☞ mouvement rectiligne uniforme du centre de masses

on peut toujours choisir un repère tel que $\dot{\mathbf{R}} = 0$

☞ $L = L_2(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$ se réduit au lagrangien L_2 qui décrit le mouvement relatif, autour du centre de masses.

changement de notation: on écrit dès maintenant $L_2 \mapsto L$

Exercice: formuler et démontrer l'effet analogue pour un problème de *trois corps* avec forces centrales, c.à.d. on admet que $V = V(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|, |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2|)$.



vecteur de distance $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$

vecteur **centre de masses** $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$ et $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$

lagrangien du mouvement relatif $L = \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)$

👉 *problème effectif d'un seul corps*

(b) lagrangien du mouvement relatif, en coordonnées sphériques

$$L = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r)$$

ϕ est cyclique

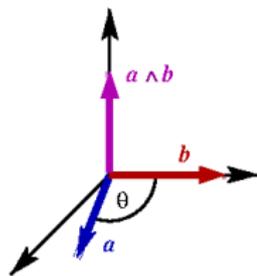
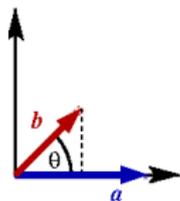
$$\Rightarrow p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi} = \text{cste.} \quad (*)$$

👉 conservation d'une composante du moment cinétique

Quelques mots sur les produits des vecteurs

? comment peut-on multiplier les vecteurs

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad ?$$



(\alpha) produit scalaire:

où θ est l'angle entre les deux vecteurs

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \in \mathbb{R}$$



Si le produit scalaire s'annule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, il s'ensuit $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

(\beta) produit vectoriel:

in Deutschland schreibt man $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & a_x & b_x \\ \mathbf{e}_y & a_y & b_y \\ \mathbf{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$$

Géométriquement, on a $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$ et la formule $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$.

* On a l'identité $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$

permutation cyclique

Loi de conservation provenant de l'invariance sous rotations

Rotation autour d'une axe fixe, avec angle de rotation $\delta\varphi$ infinitésimal

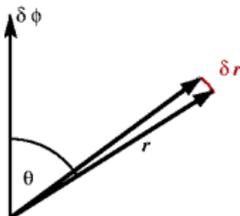
on a bien $|\delta\mathbf{r}| = r \sin(\theta)\delta\varphi$

et car $\delta\mathbf{r} \perp \delta\varphi, \mathbf{r}$, on peut écrire

$$\delta\mathbf{r} = \delta\varphi \wedge \mathbf{r}$$

de même pour la vitesse $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$:

$$\delta\mathbf{v} = \delta\varphi \wedge \mathbf{v}$$



* si système invariant sous rotations, φ est cyclique \Rightarrow symétrie du lagrangien L

* invariance $\delta L = 0 \Rightarrow$
$$0 = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \delta \mathbf{v}_i \right)$$

$$0 = \sum_i [\dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{p}_i \cdot \delta \mathbf{v}_i] \quad \text{rappel: } \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}$$

$$= \sum_i [\dot{\mathbf{p}}_i \cdot (\delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i) + \mathbf{p}_i \cdot (\delta\varphi \wedge \mathbf{v}_i)] \quad \text{rappel: } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$$

$$= \delta\varphi \cdot \sum_i (\mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{p}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \mathbf{p}_i) = \delta\varphi \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i) \right)$$

* alors, car $\delta L = 0$, on a $\frac{d\ell}{dt} = 0$, où $\ell := \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i$ **moment cinétique**

Nous retournons au mouvement relatif autour du centre de masses
 le vecteur $\ell = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ conservé définit une direction spatiale
 le mouvement est confiné dans le plan perpendiculaire à ℓ , car

$$\mathbf{r} \cdot \ell = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}) = 0$$

choix de l'orientation des coordonnées: $\phi = \frac{\pi}{2}$, tel que dans (*) $p_\phi = 0$.
 ainsi le lagrangien devient $L = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$.
 θ est cyclique, donc $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta}$ est conservé.

$$\mu r^2 \dot{\theta} =: \ell = \text{cste}$$

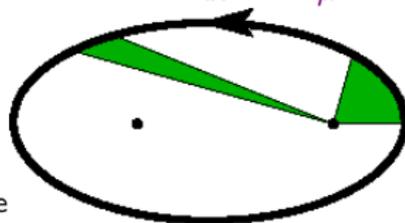
définir la **vitesse des aires** $\dot{\mathcal{A}} := \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$, loi de conservation $\dot{\mathcal{A}} = \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\ell}{2\mu} = \text{cste}$

👉 **2^e loi de Kepler**

ou loi des aires

en temps égaux le rayon soleil-planète couvre des surfaces égales

observation empirique de 2^e loi de Kepler \Rightarrow force doit être centrale



2. Le potentiel effectif

la dernière éq. d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$

Car nous savons que $\dot{\theta} = \ell(\mu r^2)^{-1}$, ceci devient $\mu\ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$ ou encore

$$\mu\ddot{r} + \frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = 0, \quad V_{\text{eff}}(r) := V(r) + \frac{\ell^2}{2\mu} \frac{1}{r^2}$$

Définition: $V_{\text{eff}}(r)$ s'appelle **potentiel effectif**.

👉 réduction à un problème effectif unidimensionnel à un seul corps.

le potentiel effectif est un outil très pratique pour la discussion qualitative en partant de

$$\mu \ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} + \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$

le potentiel effectif est un outil très pratique pour la discussion qualitative
on arrive à

$$\mu \dot{r} \ddot{r} - \frac{\ell^2 \dot{r}}{\mu r^3} + \dot{r} \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$

le potentiel effectif est un outil très pratique pour la discussion qualitative
on arrive à

$$\mu \dot{r} \ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu} \frac{\dot{r}}{r^3} + \dot{r} \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$

le potentiel effectif est un outil très pratique pour la discussion qualitative
et ensuite à

$$\mu \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{r}^2 - \frac{\ell^2}{\mu} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \right) + \frac{d}{dt} V(r) = 0$$

le potentiel effectif est un outil très pratique pour la discussion qualitative
ou encore à

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] = 0$$

le potentiel effectif est un outil très pratique pour la discussion qualitative
on arrive finalement à

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} + V(r) \right] = 0$$

ce qui implique la conservation de l'énergie

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} + V(r)}_{=V_{\text{eff}}(r)} = \text{cste.}$$

car $\dot{r}^2 \geq 0$, les points $\dot{r} = 0$ sont les points extrêmes, où V_{eff} est maximal.

On a donc toujours $V_{\text{eff}}(r) \leq E$.

critère de sélection pour les valeurs de r admissibles

 *très pratique ('zweckmäßig' dicit Poincaré) afin d'obtenir rapidement une idée physique sur les orbites, sans véritable calcul*

Exemple 1: oscillateur harmonique $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$,

avec $k > 0$

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} + \frac{k}{2} r^2$$

mouvement physique seulement possible si $V_{\text{eff}}(r) \leq E$
et ceci implique ici

$$r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$$

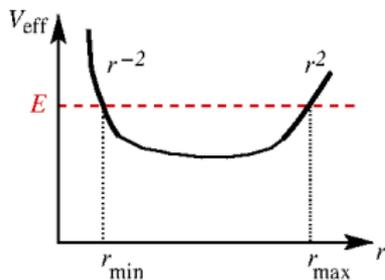
où $V_{\text{eff}}(r_{\min,\max}) \stackrel{!}{=} E$.

👉 on trouve $r_{\min,\max}^2 = \frac{2E}{k} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\ell^2 k}{4\mu E}} \right)$.

et on a aussi $E \geq \frac{\ell^2 k}{4\mu}$ pour tout mouvement physique

👉 toujours *mouvement lié*

car $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, r est toujours borné



Exemple 2: gravitation/électrostatique $V(r) = -kr^{-1}$, avec $k > 0$, attractif

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} - k \frac{1}{r}$$

il faut distinguer 4 cas:

(i) $E > 0$: on a $r \geq r_{\min}$, où $V_{\text{eff}}(r_{\min}) \stackrel{!}{=} E$

$$r_{\min} = -\frac{k}{2E} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E^2}{\mu k^2}} \right) > 0$$

☞ **mouvement non lié** car la particule peut s'échapper vers l'infini

(ii) $E = 0$: on a $r \geq r_{\min} = \frac{\ell^2 k}{2\mu}$, où $V_{\text{eff}}(r_{\min}) \stackrel{!}{=} E$

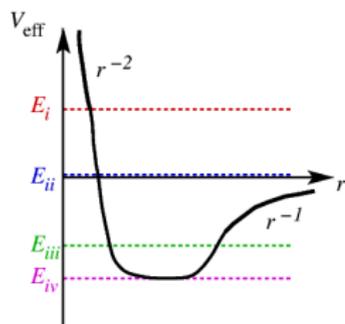
☞ **mouvement non lié** car la particule peut s'échapper vers l'infini,
avec vitesse $\rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$

(iii) $E < 0$: on a $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, où $V_{\text{eff}}(r_{\min, \max}) \stackrel{!}{=} E$

☞ **mouvement lié** car le rayon r d'orbite reste toujours borné

(iv) $E = E_{\min} < 0$: on a $r = \text{cste}$.

☞ **mouvement lié** orbite circulaire (stable)



un peu de vocabulaire fr-all/ ein wenig dt-frz Vokabular

Zentralkraft, <i>f</i>	force centrale, <i>f</i>
Zentralpotential, <i>n</i>	potentiel central, <i>m</i>
Schwerpunkt, <i>m</i>	centre de masses, <i>m</i>
reduzierte Masse, <i>f</i>	masse réduite, <i>f</i>
geradlinig-gleichförmige Bewegung, <i>f</i>	mouvement rectiligne uniforme, <i>m</i>
Relativbewegung, <i>f</i>	mouvement relatif, <i>m</i>
Skalarprodukt, <i>n</i>	produit scalaire, <i>m</i>
Vektorprodukt, <i>n</i> (Kreuzprodukt, <i>n</i>)	produit vectoriel, <i>m</i>
Spatprodukt, <i>n</i>	produit mixte, <i>m</i>
Flächengeschwindigkeit, <i>f</i>	vitesse des aires, <i>f</i>
Flächensatz, <i>m</i>	loi des aires, <i>f</i>
effektives Potential, <i>n</i>	potentiel effectif, <i>m</i>
gebundene Bewegung, <i>f</i>	mouvement lié, <i>m</i>
ungebundene Bewegung, <i>f</i>	mouvement non lié, <i>m</i>
anziehend	attractif
abstoßend	répulsif; [répugnant, dégoûtant (<i>sens moral</i>)]
wasserabstoßend; wasserabweisend	hydrofuge
Kreisbahn, <i>f</i>	orbite circulaire, <i>f</i>
ab sofort	dès maintenant

3. Calcul de l'orbite

nos équadiffs nous donnent $r = r(t)$ et puis $\theta = \theta(t)$
ce qui permet *a priori* de trouver l'**orbite** $r = r(\theta)$

👉 *il est plus efficace de trouver l'orbite directement*

la conservation du moment cinétique donne

$$\ell = \mu r^2 \dot{\theta} = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\ell}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta}}$$

l'éq. de mouvement: $\mu \ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} = f(r) + \frac{\ell^2}{\mu r^3}$ où $f(r)$ est la force

$$\frac{\ell}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\ell}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = f(r) \quad (*)$$

pour la fonction $r = r(\theta)$. Nous changeons la variable

$$u = u(\theta) = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{du}{d\theta}}$$

en apportant ce changement de variable dans l'équation de mouvement (*), il vient

$$\frac{\ell^2}{\mu} u^2 \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{du}{d\theta} \right) - \frac{\ell^2}{\mu} u^3 = f \left(\frac{1}{u} \right)$$

ce qui se simplifie, pour obtenir la **formule de Binet**

$$u = \frac{1}{r}$$

$$\boxed{\frac{\ell^2}{\mu} u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -f \left(\frac{1}{u} \right)}$$

cette formule peut s'utiliser dans les 2 sens:

(i) si $f(r)$ connu, on peut trouver l'orbite procédé de la *Principia* de Newton

(ii) si l'orbite connue des observations, on peut trouver la force

route historique Kepler → Newton; physique atomique/moléculaire et nucléaire

N.B.: si aucune force $f = 0$, orbite doit être ligne droite et alors on a $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = 0$

⇒ équation d'une ligne droite en coordonnées polaires pour $u = \frac{1}{r}$

? comment intégrer la formule de Binet, si $f = f(r)$ est supposée connue ?

nous avons $\frac{\ell^2}{\mu} u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -f \left(\frac{1}{u} \right)$.

notons $u' = \frac{du}{d\theta}$ etc.

$$u'' + u = -\frac{\mu}{\ell^2} \frac{1}{u^2} f \left(\frac{1}{u} \right) =: g(u)$$

on a donc

$$u'(u'' + u) = u'g(u) \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{2} u^2 - G(u) \right] = 0 \text{ où } G'(u) = g(u)$$

et la conservation de l'énergie s'écrit finalement sous la forme

$$u'^2 + u^2 - 2G(u) = K = \frac{2\mu E}{\ell^2} = \text{cste.}$$

cette équation se sépare $\frac{du}{d\theta} = \sqrt{2G(u) - u^2 + K}$, donc

$$\boxed{\frac{du}{\sqrt{2G(u) + K - u^2}} = d\theta}$$

ainsi, le problème de deux corps est réduit à seulement deux intégrations

Exemple: forces purement algébriques $f(r) = kr^n$

nous en tirons: $g(u) = \frac{\mu k}{\ell^2} u^{-2-n}$ et $G(u) = -\frac{\mu k}{\ell^2(n+1)} u^{-n-1}$, donc

$$d\theta = \frac{du}{\sqrt{K - \frac{2\mu k}{\ell^2(n+1)} u^{-n-1} - u^2}}$$

pour certains choix de $n \in \mathbb{Z}$, ceci s'intègre facilement

* réduction à l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, ce qui est possible si $-(n+1) \stackrel{!}{=} 0, 1, 2$

$\Rightarrow n = -2, -3$

le cas $n = -1$ est problématique

* on peut changer la variable $u^2 = x$, et réduire au même type d'intégrale

$\Rightarrow n = 1$

de cette façon, on sait résoudre les forces $f(r) \sim r, r^{-2}, r^{-3}$,

ou bien les potentiels $V(r) \sim r^2, r^{-1}, r^{-2}$.

inclut l'oscillateur harmonique et gravitation/électrostatique

autres valeurs de n : intégrales plus compliquées, à étudier avec des fonctions spéciales (p.ex. fonctions elliptiques)

4. Problème de Kepler



1571 -
1630

étudions le cas de la gravitation (ou force de Coulomb électrostatique)

$$f(r) = kr^{-2}$$

$k < 0$ pour forces attractives

$$\Rightarrow g(u) = -\frac{\mu k}{\ell^2} u^{-2} u^2 = -\frac{\mu k}{\ell^2} = \text{cste.} \quad \Rightarrow \quad u'' + u = -\frac{\mu k}{\ell^2}$$

☞ Équivalence du problème de Kepler avec un oscillateur harmonique sous force externe constante

'pesanteur' (!)

$$\text{posons donc } v = u + \frac{\mu k}{\ell^2} \Rightarrow v'' + v = 0 \Rightarrow v(\theta) = b \cos(\theta - \theta_0)$$

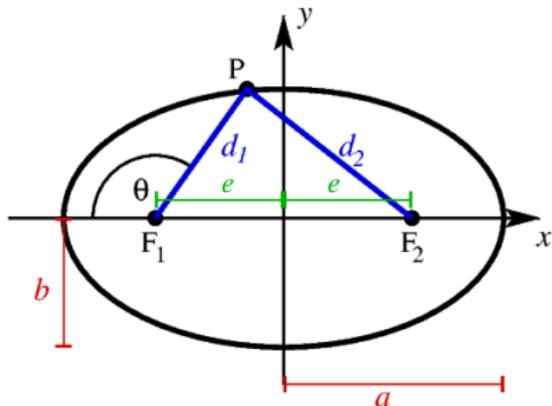
$$\frac{1}{r(\theta)} = u(\theta) = -\frac{\mu k}{\ell^2} + b \cos(\theta - \theta_0)$$

C'est l'équation d'une **conique**, ou la **1^{ère} loi de Kepler** de l'astronomie. Pour des orbites liées, il s'agit d'une **ellipse**.

propriété remarquable: orbite fermée après une période, ne se réalise que pour $n = 1, -2$

Quelques propriétés des ellipses

Définition: Une **ellipse** est une courbe plane, donnée par le lieu des points P dont la somme des distances à deux points fixes $F_{1,2}$, les **foyers**, est constante.



distances: $d_1 = |F_1P|$, $d_2 = |F_2P|$, $2e = |F_1F_2|$

somme des distances $d_1 + d_2 = 2a$

démi-axe majeure a ,

démi-axe mineure $b = \sqrt{a^2 - e^2}$,

* forme centrée sur l'origine: $\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

* forme en coordonnées polaires, autour du foyer F_1 , pour le rayon $r = d_1$: $d_2 = 2a - r$
 $(2a - r)^2 = (2e)^2 + r^2 - 2(2e)r \cos(\pi - \theta)$. On pose $b^2 = a^2 - e^2 = ap$ et $e = a\varepsilon$.

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \varepsilon \cos \theta)$$

où p : paramètre, ε : excentricité

☞ aire de l'ellipse $\mathcal{A} = \pi ab$

plus généralement, on peut écrire une **conique** sous la forme

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0))$$

où p est le **paramètre** et ε est l'**excentricité**.

En fonction de la valeur de ε , on trouve

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon > 1 & \text{hyperbole} \\ \varepsilon = 1 & \text{parabole} \\ 0 < \varepsilon < 1 & \text{ellipse} \\ \varepsilon = 0 & \text{cercle} \end{array} \right.$$

Définition: Une **hyperbole** est une courbe plane, donnée par le lieu des points P dont la différence des distances aux deux foyers fixes $F_{1,2}$ est constante.

retour à la solution du problème de Kepler:

Énoncé (KEPLER 1609): *Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers.*

N.B.: résultat d'une analyse purement empirique des observations astronomiques (T. Brahe)

N.B.': les orbites elliptiques sont un départ des *orbites purement circulaires* des grecs de l'antiquité de la solution explicite donnée auparavant, on identifie

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}}, \quad \frac{1}{p} = \frac{\mu k}{\ell^2}$$

d'ou la demi-axe majeure $a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{p}{2} \frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{p}{2} \frac{1}{1-\varepsilon} = p \frac{1}{1-\varepsilon^2}$
y injecter les valeurs de p et ε mène à

$$a = -\frac{k}{2E}$$

l'énergie E ne dépend que de a , mais elle est indépendante de l'excentricité ε

👉 résultat très important dans l'étude de l'atome d'hydrogène

(fait d'un proton et d'un électron, avec force électrostatique de Coulomb)

La 3^e loi de Kepler

revenons à la vitesse des aires $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{\ell}{2\mu}$

orbite elliptique: pour obtenir l'aire totale $\mathcal{A} \Rightarrow$ intégrer sur une **période** P

$$\mathcal{A} = \int_0^P dt \frac{dA}{dt} = \frac{\ell P}{2\mu} = \pi ab$$

nous avons eu: $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{ap} = \sqrt{\frac{\ell^2 a}{\mu k}}$. Il vient $P = a^{3/2} 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}$.

Pour la gravitation, avec les quantités du problème de deux corps $k = Gm_1 m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

La **3^e loi de Kepler** prend donc sa forme finale

trouvé 1619 empiriquement

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} a^{3/2}$$

N.B.: la proportionalité $P \sim a^{3/2}$ est spécifique du potentiel $V(r) \sim r^{-1}$.

très utilisé en astronomie pour trouver les masses des planètes, étoiles, ...

N.B.: il paraît que la terminologie '*lois de Kepler*' provient de VOLTAIRE (1738) et LALANDE (1774)

Illustration: les 4 grandes lunes de Jupiter

la planète Jupiter est entourée de 4 grands satellites

visibles déjà avec une paire des binoculaires
même si le contraste en lumière avec Jupiter est fort
et Kallisto en particulier est très sombre

importance physique: tout premier exemple des corps
célestes non pas en orbite autour du soleil et non visibles à
l'œil nu



Europa

Io

Ganymed

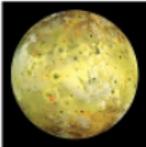
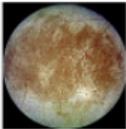
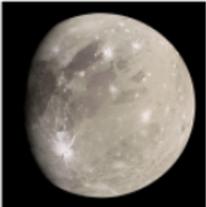
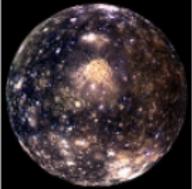
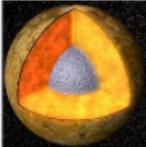
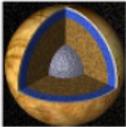
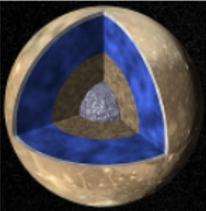
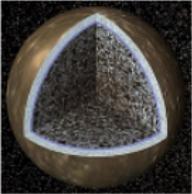
Kallisto

Découvertes en 1610 tout juste après l'invention du
téléscope

sources: https://de.wikipedia.org/wiki/Galileische_Monde,
https://fr.wikipedia.org/wiki/Satellites_galiléens



le tableau suivant donne quelques propriétés des 4 satellites galiléens

	Io <i>Jupiter I</i>	Europe <i>Jupiter II</i>	Ganymède <i>Jupiter III</i>	Callisto <i>Jupiter IV</i>
Photographie (par <i>Galileo</i>)				
Modèle de l'intérieur				
Rayon moyen (km)	1 821,5	1 560,8	2 631,2	2 410,3
Masse (kg)	$8,932 \times 10^{22}$	$4,8 \times 10^{22}$	$1,482 \times 10^{23}$	$1,076 \times 10^{23}$
Densité (g/cm ³)	3,530	3,010	1,940	1,830
Demi-grand axe (km)	421 800	671 100	1 070 400	1 882 700
Période orbitale (jours terrestres)	1,769 138	3,551 181	7,154 553	16,689 017
Période orbitale (relativement à Io)	1	2,0	4,0	9,4
Inclinaison de l'axe (degrés)	0,04	0,47	0,44	0,19
Excentricité orbitale	0,004	0,009	0,001	0,007

N.B.: on connaît aujourd'hui (2023) 92 satellites naturels de Jupiter, dont 57 nommés

pour comparaison: la **Lune** a un rayon de 1738[km], une densité de 3,345[g/cm³] et une masse de $7,348 \cdot 10^{22}$ [kg]. Elle est un peu plus sombre que Kallisto (albedos $\approx 0,1 - 0,2$). Io et Europe sont très brillant (albedos $\gtrsim 0,6$).

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Kegelschnitt, <i>m</i>	conique, <i>f</i>
Ellipse, <i>f</i>	ellipse, <i>f</i>
Parabel, <i>f</i>	parabole, <i>f</i>
Hyperbel, <i>f</i>	hyperbole, <i>f</i>
Exzentrizität, <i>f</i>	excentricité, <i>f</i>
Brennpunkt, <i>m</i>	foyer, <i>m</i> ; point focal, <i>m</i>
große/kleine Halbachse, <i>f</i>	démi-axe majeure/mineure, <i>f</i>
Wasserstoffatom, <i>n</i>	atome d'hydrogène, <i>m</i>
untersuchen	se pencher sur
prüfen	examiner
überprüfen	mettre à l'épreuve
Kosinussatz, <i>m</i>	loi des cosinus, <i>f</i> ; loi d'Al-Kachi, <i>f</i>
Sinussatz, <i>m</i>	loi des sinus, <i>f</i> ; loi de Mansur, <i>f</i>
Feldstecher, <i>m</i> ; Fernglas, <i>n</i>	paire des binoculaires, <i>f</i> ; jumelles (pl.), <i>f</i>
Auge, <i>n</i>	œil, <i>m</i> ; pl. les yeux
mit bloßem Auge	à l'œil nu
ohnmächtig werden	tourner de l'œil

le genre grammatical (*m,f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

COURS XII/ VORLESUNG XII

Rappel: lagrangien du mouvement relatif du problème de deux corps

$$L = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r)$$

- variable θ cyclique $\Rightarrow p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} =: \ell = \text{cste.}$
- moment cinétique ℓ conservé \Rightarrow mouvement dans le plan $\perp \ell$
- mouvement radial $\mu \ddot{r} = -\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr}$, $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2\mu} \frac{1}{r^2}$ **potentiel effectif**
réduction du mouvement radial à un problème d'une particule en une dimension spatiale
- discussion qualitative des orbites (liées, non liées), à partir de $V_{\text{eff}}(r) \leq E$

calcul de l'orbite $r = r(\theta)$: formule de Binet $\frac{\ell^2}{\mu} u^2 (u'' + u) = -f\left(\frac{1}{u}\right)$ $u = \frac{1}{r}$

☞ pour **problème de Kepler**, $f(r) = kr^{-2}$, on retrouve les 3 lois observées par Kepler pour le système solaire

(1) orbites ont forme d'ellipse, avec soleil en un point focal

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0))$$

(2) vitesse des aires constante $\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{cste.}$

(3) relation période-grande demi-axe $P^2 \sim a^3$

N.B.: l'énoncé et la démonstration n'ont de sens que dans un cadre Copernicien

5. Changement de repère

Définition: Deux repères d'inertie se déplacent en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

les repères d'inertie ont les coordonnées $I : (t, \mathbf{r})$ et $I' : (t, \mathbf{r}')$, telles que

$$\boxed{t' = t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t} \quad (\text{G})$$

où \mathbf{v} est la vitesse relative entre I et I' : on écrit $I \xrightarrow{\mathbf{v}} I'$.

Définition: La transformation (G) est une transformation de Galilée.

Exemple: si $I \xrightarrow{\mathbf{v}} I'$ et $I' \xrightarrow{\mathbf{v}'} I''$ alors $I \xrightarrow{\mathbf{u}} I''$ avec $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$.

pour le voir: $t'' = t' = t$ et $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{v}'t' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{v}'t = \mathbf{r} - (\mathbf{v} + \mathbf{v}')t \stackrel{!}{=} \mathbf{r} - \mathbf{u}t$

N.B.: ceci est la propriété de groupe des transformations de Galilée

Application: deux particules ont la vitesse relative \mathbf{V} par rapport à l'origine (admis fixe). Dans le repère d'inertie de l'origine, leur choc élastique se décrit comme suit:

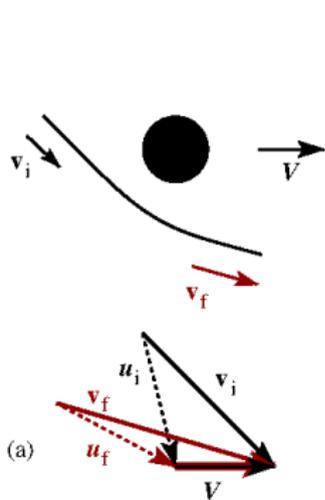
conservation de l'impulsion: $m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}) = m_1(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{V})$

conservation de l'énergie: $\frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V})^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{V})^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{V})^2$

N.B.: on peut y mettre tout autre repère d'inertie, bien entendu ! ☐ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↻

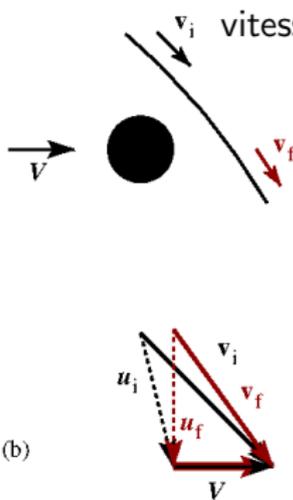
6. Effet catapulte

considérons le passage d'une sonde spatiale auprès d'une planète, vu du soleil



(a)

sonde passe derrière la planète
 \mathbf{u}_i tourne au sens positif
 sonde accélérée, car $|\mathbf{v}_f| > |\mathbf{v}_i|$
 extérieur du système solaire
 (Jupiter, Saturne, ...)



(b)

sonde passe devant la planète
 \mathbf{u}_i tourne au sens négatif
 sonde freinée, car $|\mathbf{v}_f| < |\mathbf{v}_i|$
 intérieur du système solaire
 (Mercure, Soleil)

vitesse $\mathbf{u}_{i,f} = \mathbf{v}_{i,f} - \mathbf{V}$ de la sonde,
 au repère de la planète

conservation de l'énergie

$$|\mathbf{u}_i| = |\mathbf{u}_f|$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_f = \mathcal{R}\mathbf{u}_i$$

\mathbf{u}_f tournée par rapport à \mathbf{u}_i

\Rightarrow l'explication suivra !

repère du
 soleil

sonde spatiale: masse m , vitesses \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_f avant et après le choc

planète: masse M , vitesses \mathbf{V}_i et \mathbf{V}_f avant et après le choc

Rappel: conservation du moment cinétique $\Rightarrow \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_f, \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_f$ dans le même plan

(1) conservation de l'impulsion: $m\mathbf{v}_i + M\mathbf{V}_i = m\mathbf{v}_f + M\mathbf{V}_f$

(2) conservation de l'énergie: $\frac{m}{2}\mathbf{v}_i^2 + \frac{M}{2}\mathbf{V}_i^2 = \frac{m}{2}\mathbf{v}_f^2 + \frac{M}{2}\mathbf{V}_f^2$

dans le repère du soleil

valeurs typiques de masses: $m \approx 1[\text{t}] = 10^3[\text{kg}]$, $M \sim 10^{24} - 10^{27}[\text{kg}]$ Venus - Jupiter

Exemples de sonde: Cassini: 5.9[t], Juno: 3.6[t], Galileo: 2.4[t], Messenger: 1.1[t], New Horizons: 0.5[t]

de (1): $\Rightarrow \mathbf{V}_f - \mathbf{V}_i = \frac{m}{M}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i) \approx (10^{-21} - 10^{-24})(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i)$

vitesse de la planète inchangée $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_f =: \mathbf{V}$

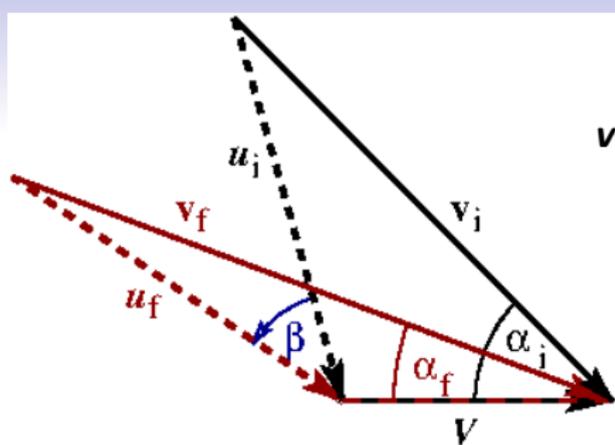
 (V)

(2') conservation de l'énergie, dans le repère de la planète

$$\frac{m}{2}(\mathbf{v}_i - \mathbf{V})^2 + \frac{M}{2}\mathbf{0}^2 = \frac{m}{2}(\mathbf{v}_f - \mathbf{V})^2 + \frac{M}{2}\mathbf{0}^2 \implies \mathbf{u}_i^2 = \mathbf{u}_f^2 \quad (\text{U})$$

avec les notations $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$ et $\mathbf{u}_f = \mathbf{v}_f - \mathbf{V}$

\Rightarrow il existe une rotation \mathcal{R} par un angle β , telle que $\mathbf{u}_f = \mathcal{R}\mathbf{u}_i$



$\mathbf{v}_{i,f}$: vitesse de sonde avant/après le choc

\mathbf{V} : vitesse de la planète

$\mathbf{u}_{i,f} = \mathbf{v}_{i,f} - \mathbf{V}$ vitesse relative

$\alpha_{i,f}$: angle entre $\mathbf{v}_{i,f}$ et \mathbf{V}

β : angle de rotation entre \mathbf{u}_i et \mathbf{u}_f

notation: $V = |\mathbf{V}|$, $v_i = |\mathbf{v}_i|$, $v_f = |\mathbf{v}_f|$

Lemme 1: On a les identités

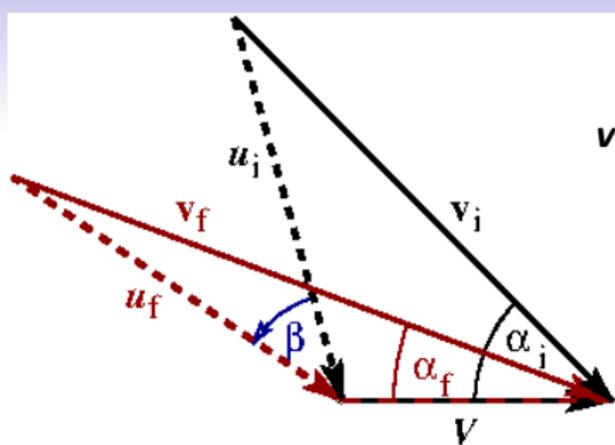
avec le choix $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$

$$v_f \cos \alpha_f = V(1 - \cos \beta) + v_i \cos(\alpha_i - \beta) \quad , \quad v_f \sin \alpha_f = V \sin \beta + v_i \sin(\alpha_i - \beta)$$

Démonstration: de la rotation $\mathbf{u}_f = \mathbf{v}_f - \mathbf{V} = \mathcal{R}(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) \Rightarrow \mathbf{v}_f = \mathbf{V} + \mathcal{R}(\mathbf{v}_i - \mathbf{V})$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_f &= \begin{pmatrix} v_f \cos \alpha_f \\ v_f \sin \alpha_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \cos \alpha_i - V \\ v_i \sin \alpha_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_i \cos \alpha_i \cos \beta - V \cos \beta + v_i \sin \alpha_i \sin \beta \\ -v_i \cos \alpha_i \sin \beta + V \sin \beta + v_i \sin \alpha_i \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V(1 - \cos \beta) + v_i(\cos \alpha_i \cos \beta + \sin \alpha_i \sin \beta) \\ V \sin \beta + v_i(\sin \alpha_i \cos \beta - \cos \alpha_i \sin \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(1 - \cos \beta) + v_i \cos(\alpha_i - \beta) \\ V \sin \beta + v_i \sin(\alpha_i - \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(on utilise les théorèmes d'addition pour cos et sin)



$\mathbf{v}_{i,f}$: vitesse de sonde avant/après le choc

\mathbf{V} : vitesse de la planète

$\mathbf{u}_{i,f} = \mathbf{v}_{i,f} - \mathbf{V}$ vitesse relative

$\alpha_{i,f}$: angle entre $\mathbf{v}_{i,f}$ et \mathbf{V}

β : angle de rotation entre \mathbf{u}_i et \mathbf{u}_f

notation: $V = |\mathbf{V}|$, $v_i = |\mathbf{v}_i|$, $v_f = |\mathbf{v}_f|$

Lemme 1: On a les identités

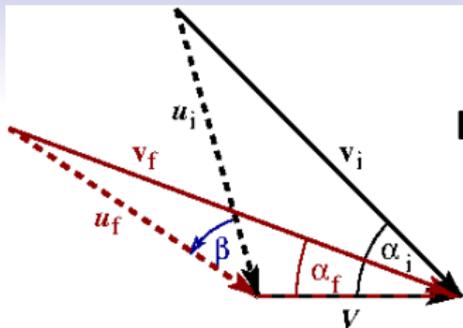
avec le choix $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$

$$v_f \cos \alpha_f = V(1 - \cos \beta) + v_i \cos(\alpha_i - \beta) \quad , \quad v_f \sin \alpha_f = V \sin \beta + v_i \sin(\alpha_i - \beta)$$

Démonstration: de la rotation $\mathbf{u}_f = \mathbf{v}_f - \mathbf{V} = \mathcal{R}(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) \Rightarrow \mathbf{v}_f = \mathbf{V} + \mathcal{R}(\mathbf{v}_i - \mathbf{V})$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_f &= \begin{pmatrix} v_f \cos \alpha_f \\ v_f \sin \alpha_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \cos \alpha_i - V \\ v_i \sin \alpha_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_i \cos \alpha_i \cos \beta - V \cos \beta + v_i \sin \alpha_i \sin \beta \\ -v_i \cos \alpha_i \sin \beta + V \sin \beta + v_i \sin \alpha_i \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V(1 - \cos \beta) + v_i(\cos \alpha_i \cos \beta + \sin \alpha_i \sin \beta) \\ V \sin \beta + v_i(\sin \alpha_i \cos \beta - \cos \alpha_i \sin \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(1 - \cos \beta) + v_i \cos(\alpha_i - \beta) \\ V \sin \beta + v_i \sin(\alpha_i - \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

comme énoncé.



Lemme 1: On a les identités, avec $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$

$$v_f \cos \alpha_f = V(1 - \cos \beta) + v_i \cos(\alpha_i - \beta) \quad (1)$$

$$v_f \sin \alpha_f = V \sin \beta + v_i \sin(\alpha_i - \beta) \quad (2)$$

Lemme 2: On a l'identité

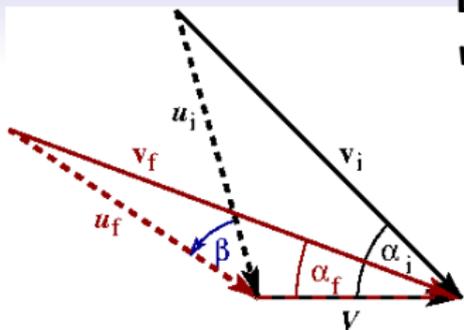
$$v_f^2 = v_i^2 + 2V^2(1 - \cos \beta) + 2Vv_i(\cos(\alpha_i - \beta) - \cos \alpha_i) \quad (3)$$

Démonstration: on reprend les éqs. (1,2), mises au carré, puis sommées

$$\begin{aligned} v_f^2 &= v_f^2 \cos^2 \alpha_f + v_f^2 \sin^2 \alpha_f \\ &= V^2(1 - \cos \beta)^2 + v_i^2 \cos^2(\alpha_i - \beta) + 2Vv_i(1 - \cos \beta) \cos(\alpha_i - \beta) \\ &\quad + V^2 \sin^2 \beta + v_i^2 \sin^2(\alpha_i - \beta) + 2Vv_i \sin \beta \sin(\alpha_i - \beta) \\ &= V^2 - 2V^2 \cos \beta + V^2(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + v_i^2 \\ &\quad + 2Vv_i [\cos(\alpha_i - \beta) - (\cos \beta \cos(\alpha_i - \beta) - \sin \beta \sin(\alpha_i - \beta))] \\ &= 2V^2 - 2V^2 \cos \beta + v_i^2 + 2Vv_i [\cos(\alpha_i - \beta) - \cos(\beta + \alpha_i - \beta)] \end{aligned}$$

en accord avec l'énoncé.

Lemmes 1 & 2: Avec $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$, on a $\mathbf{v}_f = \mathcal{R}\mathbf{v}_i + (1 - \mathcal{R})\mathbf{V}$ et les identités



$$v_f \cos \alpha_f = V(1 - \cos \beta) + v_i \cos(\alpha_i - \beta) \quad (1)$$

$$v_f \sin \alpha_f = V \sin \beta + v_i \sin(\alpha_i - \beta) \quad (2)$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2V^2(1 - \cos \beta) + 2Vv_i(\cos(\alpha_i - \beta) - \cos \alpha_i) \quad (3)$$

Corollaires:

(A) on a $|\mathbf{v}_f| \leq |\mathbf{v}_i| + 2|\mathbf{V}| \Rightarrow v_f - v_i = |\mathbf{v}_f| - |\mathbf{v}_i| \leq 2|\mathbf{V}| = 2V$

\Rightarrow catapulte de Venus ($v \simeq 35[\text{km/s}]$) plus forte que celui de Jupiter ($v \simeq 13[\text{km/s}]$) !

(B) vitesse v_f maximale obtenue de $\frac{\partial v_f}{\partial \beta} = 0$ en (3) avec v_i, V, α_i fixés

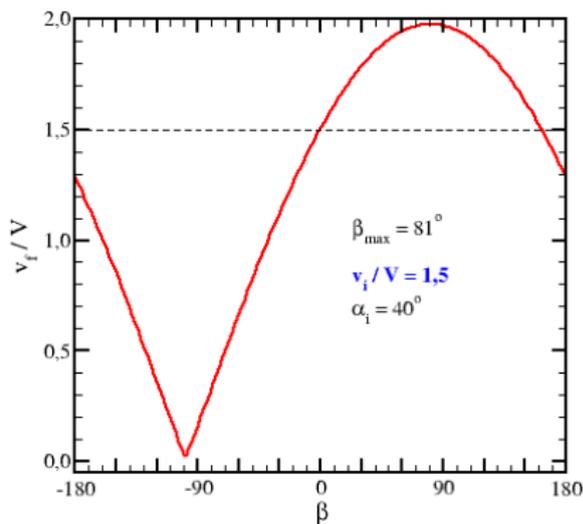
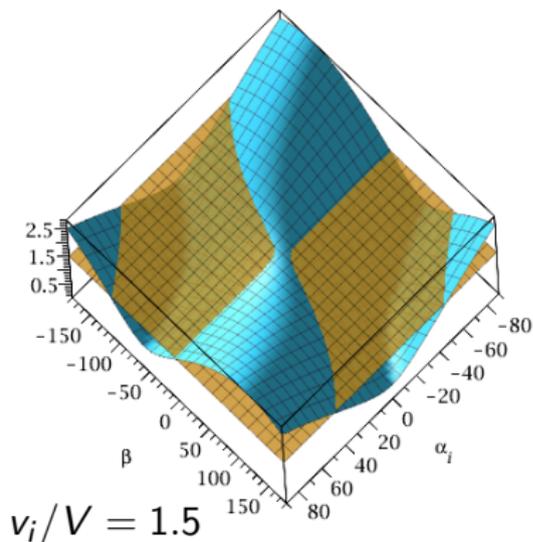
maximum de v_f à $\beta = \beta_{\max}$, où $\tan \beta_{\max} = \frac{v_i \sin \alpha_i}{v_i \cos \alpha_i - V}$

de (2): \Rightarrow accélération maximale pour $\alpha_f = 0$

ça veut dire qu'après le choc, sonde et planète vont dans la même direction

l'allure numérique de la fonction $v_f = v_f(v_i, \alpha_i, \beta)$

en unités de V



- * pour β petit, v_f augmente avec β , jusqu'à $\beta = \beta_{\max}$
 - * pour $\beta = 2\beta_{\max}$, on a de nouveau $v_f = v_i$
 - * si $v_i < v_f < v_{f,\max}$, il existe deux valeurs $\beta_{1,2}$, telles que $\beta_1 + \beta_2 = 2\beta_{\max}$
- Exemple:** si $\alpha_i = 40^\circ$, $v_f/V = 1.8 \Rightarrow v_f/v_i = 1.2$, on a $\beta_1 = 33^\circ$ et $\beta_2 = 129^\circ$
- * si $\beta < 0$ ou $\beta > 2\beta_{\max}$ on trouve $v_f < v_i \Rightarrow$ sonde freinée

Rappel: pour le potentiel gravitationnel $V(r) = -G \frac{mM}{r^2}$,
l'orbite autour d'une masse fixée est une conique

$$r(\varphi) = \frac{l^2/GM}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathfrak{E}l^2}{G^2M^2}}$$

où \mathfrak{E} , l : énergie et moment cinétique, *per unité de masse*, de la sonde,
au repère de la planète. Ici, r , φ : coordonnées polaires centrées sur la planète.

Distance minimale entre la sonde et la planète: $r_{\min} = \frac{l^2/GM}{1+\varepsilon}$.

Pour des grandes distances $r \rightarrow \infty$, on a $\varphi \rightarrow \pm \arccos(-\frac{1}{\varepsilon})$. Donc angle de diffusion

$$\beta = 2 \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) - \pi$$

? À quelle distance de la surface de la planète la sonde va-t-elle passer ?

on a $GM = gR^2$, où g : pesanteur à la surface de la planète, R : rayon de la planète

$$\text{Critère: } r_{\min} = \frac{l^2}{gR^2 + \sqrt{g^2R^4 + 2\mathfrak{E}l^2}} > R \implies l^2 > 2R^2(\mathfrak{E} + gR)$$

la sonde approche la planète avec la vitesse $u = |\mathbf{u}_i|$ et le *paramètre d'impact* b

énergie per masse $\mathfrak{E} = \frac{1}{2}u^2$, moment cinétique per masse $l = bu$

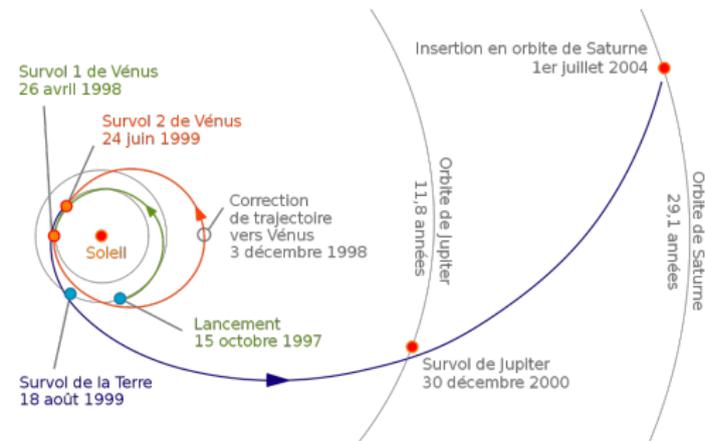
la condition $r_{\min} \stackrel{!}{>} R$ devient $b \stackrel{!}{>} R\sqrt{1 + \frac{2gR}{u^2}}$ voir [1]

Illustration numérique: passage près de Jupiter, de rayon $R_J = 71400[\text{km}]$

On utilise les mêmes paramètres v_i, α_i qu'auparavant $\Rightarrow b = 2.7 \cdot 10^6[\text{km}]$

si $\beta = \beta_1 = 33^\circ \Rightarrow r_{\min} = 2 \cdot 10^6[\text{km}]$ bonne distance de sécurité

si $\beta = \beta_2 = 129^\circ \Rightarrow r_{\min} = 87500[\text{km}]$ passage très proche, risquée



trajectoire de la sonde lourde Cassini (masse 5.9[t] !)

\Rightarrow nécessité de plusieurs (4!) assistances gravitationnelles, jusqu'à l'arrivée à Saturne

multitude de détails pour la mise en œuvre pratique

source: https://fr.wikipedia.org/wiki/Assistance_gravitationnelle, voir aussi les animations sur cette page

Réfs: [1] D.C. Johnson, <https://maths.dur.ac.uk/~dma0rcj/Psling/sling.pdf>

[2] B. Casselman, <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-slingshot>

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Stoß, <i>m</i>	collision, <i>f</i> ; choc, <i>m</i>
elastisch	élastique
Kugelstoßpendel, <i>n</i>	pendule de Newton, <i>f</i>
Tastatur, <i>f</i>	clavier, <i>m</i>
Rechnertastatur, <i>f</i>	clavier d'ordinateur, <i>m</i>
Inertialsystem, <i>n</i>	repère d'inertie, <i>m</i>
Galileitransformation, <i>f</i>	transformation de Galilée, <i>f</i>
Raumsonde, <i>f</i>	sonde spatiale, <i>f</i>
Drehung, <i>f</i>	rotation, <i>f</i>
Winkel, <i>m</i>	angle, <i>m</i>
(sich) drehen	tourner
Schleuder, <i>f</i>	catapulte, <i>f</i> ; fronde, <i>f</i>
Behauptung, <i>f</i>	affirmation, <i>f</i> ; énoncé, <i>m</i>
Aufgabenstellung, <i>f</i>	énoncé de problème, <i>m</i>
Überflug, <i>m</i>	survol, <i>m</i>
überfliegen	survoler
Vorbeiswungmanöver, <i>n</i> ; (engl. swing-by)	assistance gravitationnelle, <i>f</i>

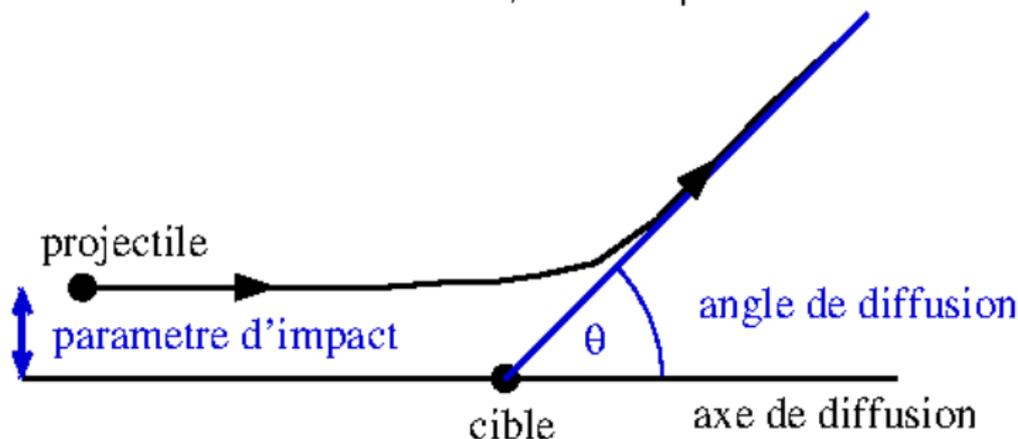
das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben/le genre grammatical des substantifs (m,f) est indiqué

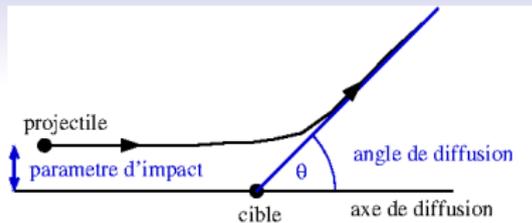
7. Introduction à la diffusion

Un malentendu potentiel: le mot 'diffusion' peut avoir deux sens distincts:

1. *diffusion d'un colorant dans un verre d'eau* → en allemand '**Diffusion**'
2. *diffusion d'un projectile par une cible* → en allemand '**Streuung**' ←

considérons un mouvement non lié, avec un potentiel central





habituellement, on observe un grand nombre de diffusions et on étudie les statistiques de tels processus

Définition: La section efficace par angle solide est donnée par

$$\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{\# \text{ particules diffusées par unite de temps dans l'angle solide } d\Omega}{\# \text{ particules incidentes}}$$

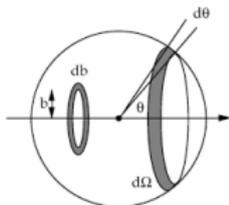
avec l'angle solide $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$.

La section efficace est l'observable centrale de la diffusion.

La notation habituelle est $\sigma(\Omega) = \frac{d\sigma}{d\Omega}$.

Ainsi, on a défini une procédure expérimentale pour l'obtenir.

Source: <https://web-docs.gsi.de>

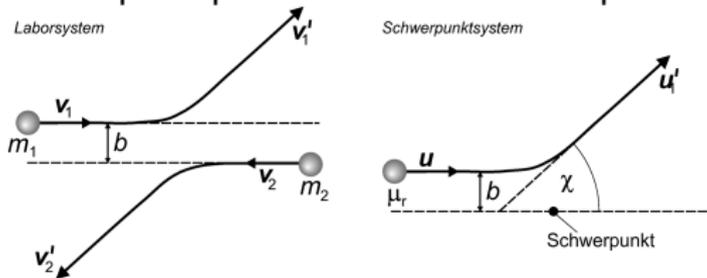


Définition: La section efficace totale est $\sigma := \int_{S^2} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$.

$$S^2 \subset \mathbb{R}^3 \text{ est la surface de la sphère, } \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} = \int_0^\infty dr r^2 \underbrace{\int_{S^2} d\Omega}_{2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta}$$

on travaille principalement dans deux repères différentes:

ici, b : paramètre d'impact



Bildquelle: U. Stroth, *Plasmaphysik* (Springer 2018)

notre notation $\chi \mapsto \theta$

- (a) le **repère du laboratoire**: avant la collision, le cible est au repos.
- (b) le **repère du centre de masse (CMS)**: le centre de masse du système cible + projectile est au repos.

Presque toutes les mesures expérimentales sont faites dans le repère du laboratoire (exception: collisionneurs de particules élémentaires p.ex. LHC au CERN). Tous les calculs théoriques sont effectués au repère du centre de masse.

👉 il existe des formules pour la transformation entre ces deux repères.

8. Calcul des sections efficaces

nous allons d'abord déduire une formule générique pour la section efficace
on s'imagine le repère labo, mais on ne calcule qu'avec le mouvement relatif !

* on part de la conservation du moment cinétique

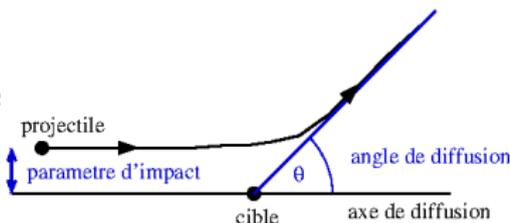
$$l = \mu v_0 s = s \sqrt{2\mu E}$$

où s : paramètre d'impact, v_0 : vitesse initiale du projectile, E : énergie

* si E et s fixés, l'angle de diffusion θ est déterminé.

* La conservation du nombre de particules donne

$$2\pi l s ds = -2\pi l \sigma(\theta) \sin \theta d\theta$$



N.B.: signe $-$: tient compte du fait que s diminue si θ augmente

$$\sigma(\theta) = -\frac{s}{\sin \theta} \frac{ds}{d\theta} \quad (\sigma)$$

de la conservation de l'énergie $E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$

la re-conversion en équation d'orbite, selon $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}$, donne

$$\varphi = \varphi(r) = \frac{\ell}{\mu} \int_r^\infty d\varrho \frac{1}{\varrho^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{\text{eff}}(\varrho))}}$$

La valeur minimale de r est donnée par $V_{\text{eff}}(r_{\min}) \stackrel{!}{=} E$.

L'angle total de diffusion est $\theta = \pi - 2\varphi(r_{\min})$, donc

$$\theta = \pi - \frac{2\ell}{\mu} \int_{r_{\min}}^\infty d\varrho \frac{1}{\varrho^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{\text{eff}}(\varrho))}} \quad (\theta)$$

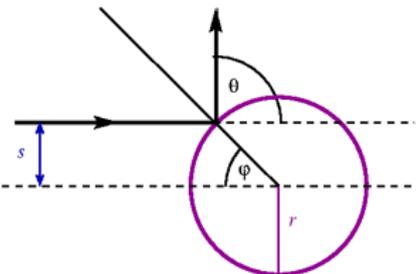
et le moment cinétique $\ell = 2\mu v_0$ contient le paramètre d'impact s .

N.B.: ici, on ne fait appel qu'au lagrangien du mouvement relatif

Exemple 1: diffusion auprès d'une sphère dure

diffusion auprès d'une sphère dure, de rayon r

repère labo



géométriquement: angle de diffusion $\theta = \pi - 2\varphi$

on peut voir de la géométrie

$$s = r \sin \varphi = r \sin \frac{\pi - \theta}{2} = r \cos \frac{\theta}{2}$$

Plus formellement: une sphère dure a le potentiel $V(\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varrho > r \\ \infty & \text{si } \varrho < r \end{cases}$

tel que $r_{\min} = 0$. Donc l'angle de diffusion devient, d'après (θ)

$$\theta = \pi - 2s \int_r^\infty d\varrho \frac{1}{\varrho^2} \frac{1}{\sqrt{1 - s^2/\varrho^2}} = \pi - 2 \int_0^{s/r} d\xi \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \pi - 2 \arcsin \frac{s}{r}$$

On retrouve donc $s = r \cos \frac{\theta}{2}$, comme il le faut. La section efficace sort de (σ)

$$\sigma(\theta) = \frac{r \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \frac{r \sin \frac{\theta}{2}}{2} = \frac{r^4}{4}$$

; section efficace totale

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{r^2}{4} \cdot 4\pi = \pi r^2$$

Exemple 2: diffusion dans un potentiel $V(r) = kr^{-1}$

pour diffusion de deux charges électriques $q_{1,2}$, on a $k = q_1 q_2$ (repulsif, si $q_1 q_2 > 0$) repère labo

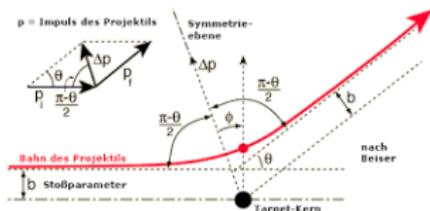
formule de Binet:
$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{q_1 q_2}{\mu v_0^2 s^2} = -\kappa$$

\Rightarrow conique $u = u_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - \kappa$

pour ce mouvement non lié, l'orbite est une hyperbole

Initialement, la particule arrive le long de l'axe de diffusion, donc on a la condition de bord $u \rightarrow 0$ et $r \sin \varphi \rightarrow b$ pour $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$. De plus, on a $\frac{du}{d\varphi} \rightarrow -\frac{1}{s}$. Il vient $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \arctan s\kappa$. Car $\theta = |\pi - 2\varphi_0|$, on arrive finalement à

$$s = \frac{q_1 q_2}{\mu v_0^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad \xRightarrow{(\sigma)} \quad \sigma(\theta) = \left(\frac{q_1 q_2}{4E_{\text{in}}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$



Ceci est la **formule de Rutherford** pour la diffusion dans le potentiel électrostatique avec force de Coulomb.

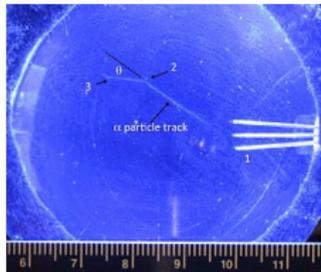
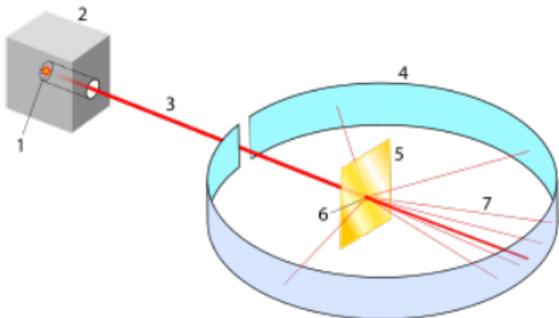
N.B.: historiquement important: la formule de RUTHERFORD reste valable en mécanique quantique. Il est donc justifié de se servir d'une formule déduite en mécanique classique pour comprendre la structure des atomes.

Modèle de l'atome, selon Rutherford

afin de comprendre la structure des atomes, on les bombarde avec des particules de la plus haute énergie possible

le 'mieux' disponible en 1909: rayons- α provenant de la désintégration du radium

particule α : noyau d'hélium



L'échantillon radioactif émet des particules α , dont on produit un faisceau en les laissant passer par un trou fin, et dirigée sur un film d'or. Les particules α sont détectées sur un écran et comptées.

Observation d'une collision d'une particule α avec un noyau:
la trace 1 est la particule α , qui collide au point 2 avec un atome (et une seconde fois dans le point 3).

au fil du temps, des modèles plus ou moins simplistes des atomes ont été proposés

<https://www.thegreatcoursedaily.com/what-is-an-atom-like/>

Atomic Models



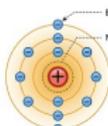
Solid sphere model (Dalton, 1803)



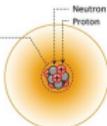
Plum pudding model (Thomson, 1897)



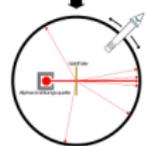
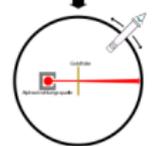
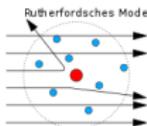
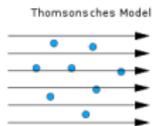
Nuclear model (Rutherford, 1911)



Planetary model (Bohr, 1913)



Quantum model (Schrödinger, 1926)



Beobachtetes Ergebnis

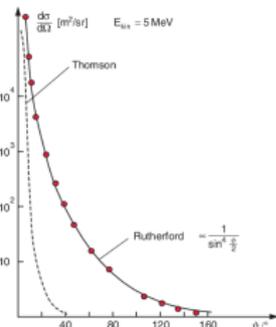
autour de 1900, le modèle en vogue fut celui du 'gâteau aux raisins' de THOMSON: des électrons localisées dans une distribution continue de charge électrique positive

l'expérience de RUTHERFORD met à l'épreuve ce modèle THOMSON prédit: très petits angles de diffusion en désaccord flagrant avec l'observation

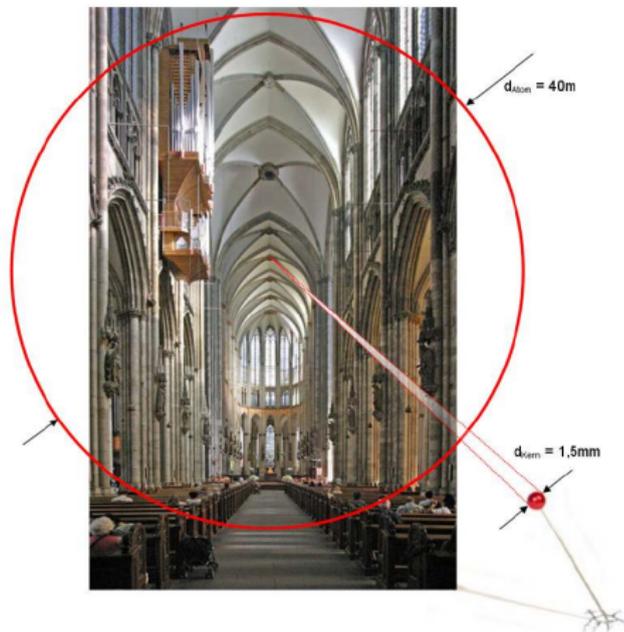
Modèle de RUTHERFORD: la charge positive et presque toute la masse concentrés dans le **noyau**, entouré sur des orbites Keplériennes par des électrons

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \sin^{-4} \frac{\theta}{2} \quad \text{confirmé brillamment par l'expérience}$$

👉 l'atome est dans l'essentiel vide !



Le resultat: structure et taille des atomes



Source: <https://web-docs.gsi.de/>

si l'on agrandissant un atome par un facteur 10^{11} , on obtiendrait une boule d'un diamètre de 40[m] qu'on pourra tout juste placer à l'intérieur de la cathédrale de Cologne. Au centre de cet atome, le noyau serait une graine de diamètre 1,5[mm]. Le 'reste' de l'atome est vide – un vide réellement parfait !

9. Le vecteur de Runge-Lenz

découvert par JACOB HERRMANN (1678-1733), puis par JEAN BERNOULLI, puis LAPLACE, ...
importance des symétries pour l'existence de quantités conservées:

invariance	quantité conservée
translation temporelle	énergie
rotation	moment cinétique
translation spatiale	impulsion

? peut-on en trouver autres exemples ?

une réponse affirmative est possible pour les potentiels de forme $V(r) = -\frac{k}{r}$
encore une fois, physiquement c'est la gravitation ou l'électrostatique

Théorème: *Pour le problème de un corps, avec potentiel $V(r) = -kr^{-1}$, on a le vecteur constant*

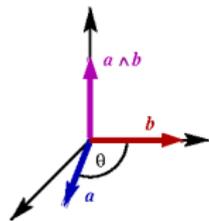
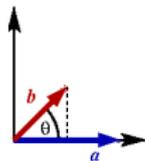
$$\mathbf{A} := \mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\ell} - \mu k \frac{\mathbf{r}}{r}$$

où $\mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}}$ impulsion

Quelques mots sur les produits des vecteurs

? comment peut-on multiplier les vecteurs

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad ?$$



(α) produit scalaire:

où θ est l'angle entre les deux vecteurs

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \in \mathbb{R}$$



Si le produit scalaire s'annule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, il s'ensuit $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

(β) produit vectoriel:

in Deutschland schreibt man $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & a_x & b_x \\ \mathbf{e}_y & a_y & b_y \\ \mathbf{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$$

Géométriquement, on a $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$ et la formule $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$.

* Identités:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$$

permutation cyclique

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$$

point de départ:

l'équation de mouvement $\dot{\mathbf{p}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$,

force $f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \in \mathbb{R}$

car la force est centrale, le moment cinétique $\ell = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ est conservé.

$$\dot{\mathbf{p}} \wedge \ell = \frac{\mu f(r)}{r} (\mathbf{r} \wedge (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}))$$

$$= \frac{\mu f(r)}{r} ((\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}})$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

$$= \frac{\mu f(r)}{r} (r\dot{\mathbf{r}}\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r^2) = r\dot{r}$$

$$= -\mu f(r)r^2 \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} \right)$$

$$= -\mu f(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

de plus $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \wedge \ell) = \dot{\mathbf{p}} \wedge \ell + \mathbf{p} \wedge \underbrace{\dot{\ell}}_{=0} = \dot{\mathbf{p}} \wedge \ell$. Ainsi

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \wedge \ell) = -\mu f(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \wedge \ell) = -\mu f(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

cas spécial: force gravitationnelle/électrostatique de forme $f(r) = -\frac{k}{r^2}$. Alors

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{p} \wedge \ell - \mu k \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{0}$$

Si $f(r) = -\frac{k}{r^2}$, le vecteur Runge-Lenz $\mathbf{A} := \mathbf{p} \wedge \ell - \mu k \frac{\mathbf{r}}{r}$ est constant.

Propriétés:

1. orthogonalité: $\mathbf{A} \cdot \ell = 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ est dans le plan du mouvement.

se déduit de $\mathbf{r} \cdot \ell = \mathbf{p} \cdot \ell = 0$

2. orbite: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \theta = (\mathbf{p} \wedge \ell) \cdot \mathbf{r} - \mu kr$.

de plus $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \wedge \ell) = \ell \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) = \ell \cdot \ell = \ell^2$

et on obtient $Ar \cos \theta = \ell^2 - \mu kr$, d'où l'orbite

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{\ell^2} \left(1 + \frac{A}{\mu k} \cos \theta \right)$$

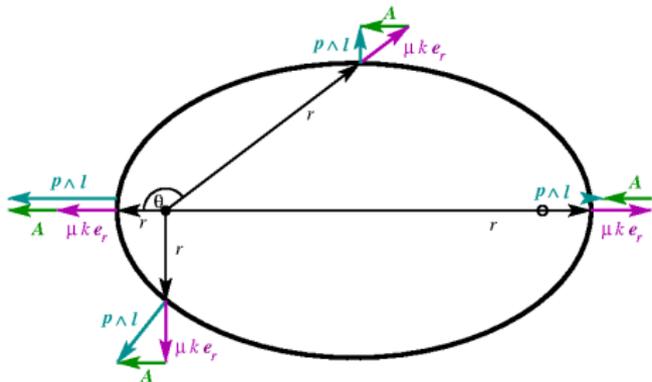
La conique retrouvée, sans résoudre une équadiff \Rightarrow intégrabilité algébrique

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{\ell^2} \left(1 + \frac{A}{\mu k} \cos \theta \right)$$

☞ $A = |\mathbf{A}| = \mu k \varepsilon$ est relié à l'excentricité ε .

3. interprétation géométrique, pour le cas d'une ellipse, donc $k > 0$

$$e_r = \frac{r}{r}$$



- * \mathbf{A} dans le plan de l'orbite
- * \mathbf{A} orienté le long de la grande axe

donc direction de cette axe est fixée

- * addition des vecteurs, selon

$$\mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\ell} = \mathbf{A} + \mu k \frac{\mathbf{r}}{r} \perp \dot{\mathbf{r}}$$

4. la conservation de \mathbf{A} signale une **nouvelle symétrie**, de nature dynamique.

- * reliée au fait que les orbites sont fermées

* si dans un système on trouve que $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$, alors c'est une évidence pour que $f(r) \neq -\frac{k}{r^2}$

* reliée à l'invariance de L sous changement de variables (infinitésimal)

$$r_i \mapsto r'_i = r_i + \mu \sum_k \epsilon_k \left(v_i r_k - \frac{1}{2} r_i v_k - \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \delta_{ik} \right)$$

* seulement une composante de \mathbf{A} est algébriquement indépendante des autres quantités

un peu de vocabulaire fr-all/ ein wenig dt-frz Vokabular

Streuung, <i>f</i>	diffusion, <i>f</i>
Diffusion, <i>f</i>	diffusion, <i>f</i> , dispersion, <i>f</i>
Ziel, <i>n</i>	cible, <i>f</i>
Projektil, <i>n</i>	projectile, <i>m</i>
Streuquerschnitt, <i>m</i>	section efficace, <i>f</i>
Streuachse, it <i>f</i>	axe de diffusion, <i>f</i>
Stoßparameter, <i>m</i>	paramètre d'impact, <i>m</i>
Streuwinkel, <i>m</i>	angle de diffusion, <i>m</i>
genau dann, wenn	si et seulement si (<i>ssi</i>)
Laborsystem, <i>n</i>	repère du laboratoire, <i>m</i>
Schwerpunktsystem, <i>n</i>	repère du centre de masse, <i>m</i>
Raumwinkel, <i>m</i>	angle solide, <i>m</i>
geschlossene Bahn, <i>f</i>	orbite fermée, <i>f</i>
Schwerkraft, <i>f</i>	pesanteur, <i>f</i> ⚠ avec article: la pesanteur
Schwereelosigkeit, <i>f</i>	apesanteur, <i>f</i> ⚠ avec article: l'apesanteur

le genre grammatical (*m,f*) des substantifs est indiqué/ das grammatikalische Geschlecht (*m,f,n*) der Substantive ist angegeben

COURS XIII/ VORLESUNG XIII

L'hamiltonien

1. Conservation de l'énergie

Afin de procéder vers une formulation avancée de la mécanique, on considère d'abord l'énergie d'un système mécanique

Calculons la dérivée totale du lagrangien L par rapport au temps t :

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\dot{q}_j) \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] + \frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}$$

et il vient

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (C)$$

Définition: La quantité $H := \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$ s'appelle l'**hamiltonien**.

on retient la définition de l'hamiltonien $H := \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$

Théorème 1: *Si le lagrangien L ne dépend pas explicitement du temps t , alors l'hamiltonien H est conservé.*

Démonstration: de (C), on tire $\frac{d}{dt} H + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$ et de plus $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. QED

Théorème 2: *Pour des systèmes conservatifs, on a $H = E =$ énergie totale, si les forces de contrainte sont indépendantes du temps.*

Démonstration: si forces conservatives $V = V(q_i) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}$ et on a toujours eu $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2$, avec vitesse $\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$. On passe aux coordonnées généralisées

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_N)$$

si les forces de contrainte sont indépendantes du temps. Ainsi on peut écrire

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \underbrace{\left(\sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right)}_{\text{}} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

et T devient une forme quadratique homogène dans les \dot{q}_j

T devient une forme quadratique homogène dans les \dot{q}_j

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad , \quad T_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$$

et il vient

facteur 2, car 2 manières comment prendre la dérivée

$$\sum_{\ell} \dot{q}_{\ell} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\ell}} = \frac{1}{2} \sum_{\ell,j} T_{j,\ell} \dot{q}_{\ell} \dot{q}_j \cdot 2 = 2T$$

de sorte qu'on obtient enfin

$$H = \sum_{\ell} \dot{q}_{\ell} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\ell}} - L = 2T - (T - V) = T + V$$

ce qui est bien l'énergie totale, comme énoncé.

QED

Définition: Le passage $L \mapsto H$ est une **transformation de Legendre**.

nous avons eu: $L = L(q, \dot{q}, t)$.

☞ maintenant, nous avons $H = H(q, p, t)$ et l'impulsion $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$.

N.B.: ! un hamiltonien dépend des impulsions p et **jamais** des vitesses \dot{q} !

2. Transformation de Legendre

L'hamiltonien $H = \sum_{\ell} \dot{q}_{\ell} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\ell}} - L = \sum_{\ell} \dot{q}_{\ell} p_{\ell} - L = H(q, p, t)$

? comment écrire les équations de mouvement à l'aide de H ?

pour le voir, on étudie le différentiel total

$$d(ab) = da \cdot b + a \cdot db$$

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (\text{H})$$

$$= \sum_i \left(-\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \dot{q}_i dp_i + \underbrace{d\dot{q}_i p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i}_{=0} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_i \left(-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (\text{L})$$

avec l'éq. d'Euler-Lagrange $\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$.

Comparaison des éqs. (H) et (L) donne les équations canoniques

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Exemple d'une transformation de Legendre (presque trivial):
une particule en $1D$, force conservative

(1) le lagrangien s'écrit $L = T - V = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$

(2) du lagrangien on trouve l'impulsion p , canoniquement conjugué à q

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad (*)$$

(3) on exprime les vitesses \dot{q} à l'aide des impulsions p , via (*): $\Rightarrow \dot{q} = \frac{1}{m}p$

(4) on calcule l'hamiltonien, tout en éliminant \dot{q}

$$H = \dot{q}p - L = \frac{p}{m}p - \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m} \right)^2 + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

(5) les équations canoniques s'écrivent comme suit

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} = -V'(q)$$

N.B.: la 1ère est la transformation entre vitesses et impulsions,
la 2e est bien entendu le second axiome de Newton

Pour un système avec N degrés de liberté, les équations canoniques sont un système de $2N$ équadiffs couplées du 1er ordre. Mathématiquement, elles sont équivalentes aux N équadiffs d'Euler-Lagrange du 2e ordre.

Les équations canoniques traitent les coordonnées q_i et les impulsions p_i de la même manière.

On a l'habitude de spécifier des systèmes physiques en donnant leur hamiltonien.

Définition: La coordonnée q_i et l'impulsion p_i sont des **variables canoniquement conjuguées**.

Définition: Une coordonnée q_c est **cyclique**, si $\frac{\partial H}{\partial q_c} = 0$.

Théorème: Si q_c est cyclique, alors l'impulsion p_c est conservée.

Démonstration: q_c cyclique $\Rightarrow 0 = \frac{\partial H}{\partial q_c} = -\dot{p}_c \Rightarrow p_c = \text{cste}$.

QED.

N.B.: ceci n'est qu'une répétition du résultat analogue déjà tiré du lagrangien.

Exemple: une perspective vers la relativité restreinte d'EINSTEIN (1905)

(1) Soit le **lagrangien** d'une particule $L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{q}^2/c^2} - V(q)$

$N = 1$ degré de liberté

où c : vitesse lumière

(2) on trouve l'**impulsion** p , canoniquement conjuguée à la coordonnée q

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -mc^2 \frac{1}{2} \frac{-2\dot{q}c^{-2}}{\sqrt{1 - \dot{q}^2/c^2}} = \frac{m\dot{q}}{\sqrt{1 - \dot{q}^2/c^2}} \quad (*)$$

(3) exprimer \dot{q} à l'aide de p , en partant de (*)

$$p^2 \left(1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}\right) = m^2 \dot{q}^2 \implies \dot{q} = \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}} = \frac{p}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}}$$

(4) on calcule l'hamiltonien, tout en éliminant \dot{q}

$$H = \dot{q}p - L = \frac{p^2}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{p}{m}\right)^2 c^{-2}}{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}} + V(q) = \frac{p^2/m + mc^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}} + V(q) = mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} + V(q)$$

ou encore $H = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} + V(q) = T + V$ est bien l'énergie totale.

N.B.: Si l'on développe H , pour p assez petit

$$H \simeq mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 c^2} + \dots\right) + V(q) = \underbrace{mc^2}_{=E_{\text{repos}}} + \underbrace{\frac{p^2}{2m} + V(q)}_{=E_{\text{NR}}} + \dots$$

où E_{NR} : énergie non relativiste; $E_{\text{repos}} = mc^2$ énergie au repos (**équivalence masse-énergie**).

3. Principe d'Hamilton

Pour le mouvement du système entre les temps fixes t_1 et t_2 , on a eu la stationarité de l'action

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0$$

et où $q(t_1)$ et $q(t_2)$ sont maintenus fixes. Car $L = \sum_i \dot{q}_i p_i - H$, on peut dire aussi que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) = 0$$

ou encore

$$\delta S = \delta \sum_i \int_{q_1}^{q_2} p_i dq_i - \delta \int_{t_1}^{t_2} dt H = 0 \quad (\#)$$

comme auparavant pour le lagrangien, on introduit les variations

$$q_i(t, \alpha) = q_i(t, 0) + \delta q_i(t) \quad , \quad p_i(t, \alpha) = p_i(t, 0) + \delta p_i(t) \quad (*)$$

☞ Mais les variations δq_i et δp_i sont mutuellement indépendantes !

Avec la paramétrisation (*), on considère l'action $S = S(\alpha)$, et la variation

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} d\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) \cdot d\alpha \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \right) \cdot d\alpha \end{aligned}$$

à l'aide de l'intégration par partie $\int_{t_1}^{t_2} dt p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} = \underbrace{p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}$

et de $\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} d\alpha$ et $\delta p_i = \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} d\alpha$ on trouve de (#)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\underbrace{\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{\text{}} \delta q_i + \underbrace{\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)}_{\text{}} \delta p_i \right] \stackrel{!}{=} 0$$

ce qui est vrai pour toutes variations $\delta q_i, \delta p_i$. Ainsi on retrouve les équations canoniques

$$\boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}}$$

4. Transformations canoniques

BUT: trouver des nouvelles coordonnées Q_i et des nouvelles impulsions P_i telles que

$$Q_i = Q_i(q, p, t) \quad , \quad P_i = P_i(q, p, t) \quad (K_1)$$

⚠ notation ici: $q = q_1, \dots, q_N$ et $p = p_1, \dots, p_N$

De plus, on cherche un nouvel hamiltonian $K = K(Q, P, t)$ tel que

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad , \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (K_2)$$

Définition: Une transformation $(q, p, H) \mapsto (Q, P, K)$ qui respecte (K_1) et (K_2) est une **transformation canonique**.

N.B.: les transformations canoniques sont les changements de variable qui respectent la structure des équations canoniques

Exemple: soit K tel que toutes les Q_i sont cycliques.

$$\Rightarrow \dot{P}_i = 0 \Rightarrow P_i = \alpha_i = \text{cste.} \quad \Rightarrow K = K(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \omega_i = \text{cste.}$$

$$\Rightarrow Q_i(t) = \omega_i t + \beta_i \quad \Rightarrow \text{résoudre ce système est une trivialité !}$$

👉 nouvelle stratégie pour trouver le mouvement:

au lieu d'essayer de résoudre les équations canoniques (ou d'Euler-Lagrange), transformer sur un nouvel système avec dynamique évidente !

? comment trouver une telle transformation ?

👉 à partir du principe d'Hamilton $\delta \int_{t_1}^{t_2} dt (\sum_i p_i \dot{q}_i - H) = 0$,
il faut aussi avoir, pour les nouvelles variables

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - K \right) = 0$$

pour une fonction $F: I = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dF}{dt} = F(t_2) - F(t_1)$, donc $\delta I = \delta(F(t_2) - F(t_1)) = 0$
où les points d'extrême sont fixés ! Comparaison donne

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}$$

La fonction F est la **fonction génératrice** de la transformation canonique.

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \quad (K_3)$$

La fonction génératrice F relie les anciennes variables q, p avec les nouvelles variables Q, P . Donc il existe quatre possibilités

$$1. \quad F = F_1(q, Q, t) \quad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad , \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad (k.1)$$

$$2. \quad F = F_2(q, P, t) \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad , \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad (k.2)$$

$$3. \quad F = F_3(Q, p, t) \quad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad , \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \quad (k.3)$$

$$4. \quad F = F_4(p, P, t) \quad q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad , \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \quad (k.4)$$

Démonstration: rendons les transformations explicites pour la fonction $F_1 = F_1(q, Q, t)$

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

on l'injectant ceci dans la relation (K₃), on trouve

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i = H - K + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Doit être valable pour tout $\dot{q}_i, \dot{Q}_i \Rightarrow$ l'éq. (k.1) et $K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$.

La fonction génératrice F_2 est traitée à l'aide d'une transformation de Legendre

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i$$

ce qui est compatible avec $\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i$. On l'injecte dans (K₃)

$$\begin{aligned} \sum_i (p_i \dot{q}_i - H) &= \sum_i (P_i \dot{Q}_i - K) + \frac{d}{dt} (F_2 - \sum_i P_i Q_i) \\ &= \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_2}{dt} - \sum_i (\dot{P}_i Q_i + P_i \dot{Q}_i) = -\sum_i \dot{P}_i Q_i - K + \frac{dF_2}{dt} \end{aligned}$$

et de plus $\frac{dF_2}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$. En l'injectant dans l'éq. ci-dessus, on trouve

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \left(Q_i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right) \dot{P}_i = H - K + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Car ceci doit être vrai pour tout \dot{q}_i, \dot{P}_i , on arrive aux éqs. (k.2) et $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$.
Les deux autres cas F_3, F_4 se traitent de manière analogue. QED

N.B.: les éqs. (k.1)-(k.4) donnent les règles de transformation canonique.

Exemples des transformations canoniques

N.B.: pour simplicité, on ne traite que le cas de $N = 1$ degré de liberté.

1. $F_2 = F_2(q, P, t) = qP$

ou $F_2 = \sum_i q_i P_i$

$$\implies p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q$$

ceci est la transformation identique $Q = q$ et $P = p$.

2. $F_2 = F_2(q, P, t) = f(q, t)P$

ou $F_2 = \sum_i f_i(q, t)P_i$

$$\implies p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = f'(q, t)P, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = f(q, t)$$

☞ *chaque changement de coordonnée $Q = f(q, t)$ est canonique*

structure des équations canoniques est la même pour toutes les coordonnées !

3. $F_1 = F_1(q, Q, t) = qQ$

$$\implies p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = Q, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -q$$

☞ permutation de p et de q

à un signe près

! les variables q et p jouent exactement les mêmes rôles !

4. Soit $F_1 = F_1(q, Q) = \frac{m}{2}\omega q^2 \cot Q$.

On calcule d'abord les 2 variables manquantes, puis on peut invertir

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q \\ P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \end{cases} \implies \begin{cases} q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \\ p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \end{cases}$$

Soit $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2$, avec $\omega^2 = \frac{k}{m}$

⚠ honi soit qui mal y pense et ne reconnaît pas l'oscillateur harmonique
car $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$, on a $K = H$.

$$\implies K = H = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P = \text{énergie } E$$

Les équation canoniques s'écrivent

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega$$

on a donc $P = \frac{E}{\omega} = \text{cste.}$ and $Q(t) = \omega t + \beta$.

☞ la transformation inverse permet de trouver le mouvement

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta)$$

et ce résultat a été trouvé par les seules transformations !

5. Théorie de Hamilton et Jacobi

? Comment trouver systématiquement une fonction génératrice ?

☞ nous allons esquisser une manière comment y répondre

? quel est l'hamiltonien K le plus simple possible et/ou imaginable ?

5. Théorie de Hamilton et Jacobi

? Comment trouver systématiquement une fonction génératrice ?

☞ nous allons esquisser une manière comment y répondre

? quel est l'hamiltonien K le plus simple possible et/ou imaginable ?

☞ évidemment $K = 0$!

dans ce cas, on tire des équations canoniques

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0$$

par conséquent

$$P_i = \alpha_i = \text{cste.}, \quad Q_i = \beta_i = \text{cste.}$$

et de plus $0 = K = H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t}$. Nous utilisons $F = F_2(q, P, t)$. Ainsi

$$H(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_N}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

Ceci est l'équation Hamilton-Jacobi.

$$H \left(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_N}, t \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (*)$$

L'équation Hamilton-Jacobi (*) est une équation différentielle partielle en $N + 1$ variables: q_1, \dots, q_N, t . La solution est spécifiée à l'aide de $N + 1$ constantes d'intégration $\alpha_1, \dots, \alpha_N, \alpha_{N+1}$.

Car (*) ne contient que des dérivées de F_2 : si F_2 en est solution, $F_2 + \alpha$ l'est aussi.

- Prenons donc $\alpha = \alpha_{N+1}$ comme une des constantes.

- pour le reste: choisir $P_i = \alpha_i, i = 1, \dots, N$

- changement de notation: à la place de F_2 , on écrit S

$$S = S(q_1, \dots, q_N, \alpha_1, \dots, \alpha_N, t) = S(q_1, \dots, q_N, t)$$

et l'équation Hamilton-Jacobi prend la forme

$$H \left(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (**)$$

- une fois la solution S obtenue, on peut calculer

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}$$

et on met ensuite les q_i en évidence.

Interprétation de S :

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L$$

donc $S = \int dt L + \text{cste}$ est l'action.

à une constante additive près

N.B.: dans la pratique, presque toujours $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, donc $H = H(q, p)$.

☞ L'équation Hamilton-Jacobi (***) prend alors la forme

$$H \left(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (***)$$

Une solution de (***) s'obtient avec l'ansatz $S(q, t) = W(q) - \alpha_1 t$

⇒ $H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = \alpha_1 = E$ et on identifie l'énergie comme la constante α_1

⇒ $Q_1 = \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - t$

$$t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad \text{pour } i = 2, \dots, N$$

Exemple d'application: un corps avec force centrale

Pour un potentiel central $V(r)$ (on ne considère que le mouvement autour du centre de masses), l'hamiltonien en coordonnées sphériques s'écrit

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 \right) + V(r)$$

où p_r , p_θ sont les impulsions canoniquement conjuguées à r et θ .

Car H est cyclique en θ , on fait l'ansatz $W = W(r, \theta) = W_1(r) + \alpha_\theta \theta$

L'injection dans l'équation Hamilton-Jacobi $H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = \alpha_1$ donne

$$\frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} \right] + V(r) = \alpha_1$$
$$\Rightarrow \frac{dW_1}{dr} = \sqrt{2\mu \left(\alpha_1 - V(r) \right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}$$

ainsi, la fonction génératrice s'écrit

$$W = \int dr \sqrt{2\mu \left(\alpha_1 - V(r) \right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} + \alpha_\theta \theta$$

et la dernière relation pour le mouvement devient

$$\beta_\theta = \text{cste.}$$

$$\beta_\theta = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\theta} = - \int \frac{\alpha_\theta dr}{r^2 \sqrt{2\mu \left(\alpha_1 - V(r) \right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} + \theta$$

Ceci n'est rien d'autre que l'*équation pour l'orbite* $r = r(\theta)$. avec $\begin{cases} \alpha_1 = E \\ \alpha_\theta = \ell \end{cases}$

⇒ On peut définir un algorithme pour obtenir l'orbite:

- (1) déterminer l'hamiltonien $H = H(q, p)$.
- (2) remplacer p par $\frac{\partial W}{\partial q}$ en H
- (3) trouver des coordonnées cycliques, p.ex. θ si symétrie sphérique
si possible, ansatz de séparation $W = W_1 + \alpha_\theta \theta$
- (4) écrire l'éq. pour W_1 et la résoudre
- (5) écrire les équations $\beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$, $i \neq 1$ pour l'orbite.

le calcul explicite des
intégrales reste à faire

👉 *nettement plus efficace que méthodes antérieures.*

Défi: pour la force gravitationnelle $V(r) = -\frac{k}{r}$, retrouver les coniques comme orbites !

nous connaissons déjà deux autres manières pour le démontrer, non ?

Indication: changement de variable d'intégration $u = \frac{1}{r}$.

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Hamiltonfunktion, <i>f</i>	l'hamiltonien, <i>m</i>
kanonische Gleichung, <i>f</i>	équation canonique, <i>f</i>
kanonisch konjugiert	canoniquement conjugué
erzeugende Funktion, <i>f</i>	fonction génératrice, <i>f</i>
skizzieren	esquisser
Herausforderung, <i>f</i>	défi, <i>m</i>
herausfordern	lancer un défi

le genre grammatical (*m,f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*