Mécanique Analytique 2

Malte Henkel

[a] Laboratoire de Physique de Chimie Théoriques (CNRS UMR 7019),
Université de Lorraine **Nancy**, France

[b] Centro de Física Téorica e Computacional, Universidade de Lisboa, Portugal

courriel/E-Post: malte.henkel@univ-lorraine.fr

Cours Semestre de printemps 2021, Université de Lorraine **Nancy**

Un peu de lecuture complémentaire/*Literaturhinweise*

L.D. Landau et E.M. Lifchitz, *Mécanique*, Ellipses (Paris) traduction allemande

H. Goldstein *et al.*, *Classical Mechanics*, 3e traductions allemandes & françaises

M.L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 3e, Wiley (New York)

Vl. Dotsenko *et al.*, *Méthodes mathématiques pour la physique*, Dunod (Paris 2018)

B. Noble et J.W. Daniel, *Applied linear algebra*, 3e, Prentice Hall (New York)

P. Olver, C. Shakiban, *Applied linear algebra*, Springer (Heidelberg)

encyclopédique, avec plein d'exemples

Contenu/*Inhalt*

Cours I/Vorlesung I: Collision elastiques; effet catapulte/*Elastische Stöße; Schleudereffekt*
Petites oscillations I/*Kleine Schwingungen I*

Cours II/Vorlesung II: Vecteurs et espaces vectoriels/*Vektoren und Vektorräume*

Cours III/Vorlesung III: Applications linéaires/*Lineare Abbildungen*

Cours IV/Vorlesung IV: Équations linéaires & orthogonalité/
Lineare Gleichungen & Orthogonalität

Cours V/Vorlesung V: Valeurs propres et vecteurs propres/
Eigenwerte und Eigenvektoren

Cours VI/Vorlesung VI: Petites oscillations II/*Kleine Schwingungen II*
L'exemple CO_2 et l'effet de serre/*Das Beispiel CO_2 und der Treibhauseffekt*

Cours VII/Vorlesung VII: L'hamiltonien/*Die Hamiltonfunktion*

COURS I/ VORLESUNG I

IV.) Compléments de la Mécanique Analytique

1. Collisions ou chocs élastiques

Lors d'un **choc élastique**, deux particules échangent impulsion et énergie

* les deux particules ne collent pas l'une sur l'autre, leurs masses restent constantes

* il n'y a pas de production d'autres particules (p.ex. par fragmentation)

(1) la conservation de l'impulsion s'écrit $m_{1,2}$: masses des particules

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = m_1 \boldsymbol{v}'_1 + m_2 \boldsymbol{v}'_2$$

on peut décomposer les vitesses en directions 'parallèles' et 'transverses'

$$\boldsymbol{v}_i = v_{i,\parallel} \boldsymbol{e}_\parallel + \boldsymbol{v}_{i,\perp} \quad , \quad \text{où } \boldsymbol{e}_\parallel \perp \boldsymbol{v}_{i,\perp}$$

lors d'un choc élastique, les composantes transverses restent inchangées $\boldsymbol{v}_{i,\perp} = \boldsymbol{v}'_{i,\perp}$

$\Rightarrow$ il suffit de se concentrer sur la composante 'parallèle' $\Rightarrow$ notation $v_{i,\parallel} \mapsto v_i$

$\Rightarrow$ réduction au cas uni-dimensionnel

(1') la conservation de l'impulsion s'écrit

avec réduction au cas $1D$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

(2) la conservation de l'énergie s'écrit

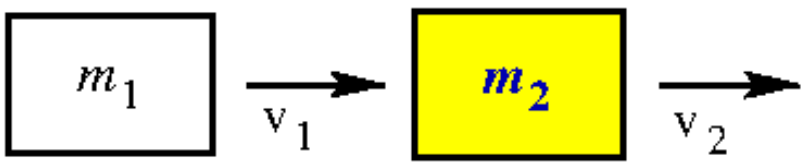
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

N.B.: on ne considère que l'état du système loin avant, et loin après, le choc
aucune information sur les détails des interactions entre particules

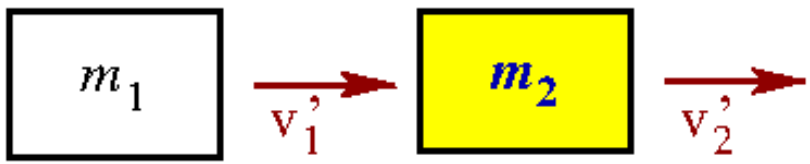
$\Rightarrow$ on trouve facilement les vitesses après le choc élastique

exercice

$$\boxed{v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 (2v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \quad , \quad v_2' = \frac{m_2 v_2 + m_1 (2v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}}$$



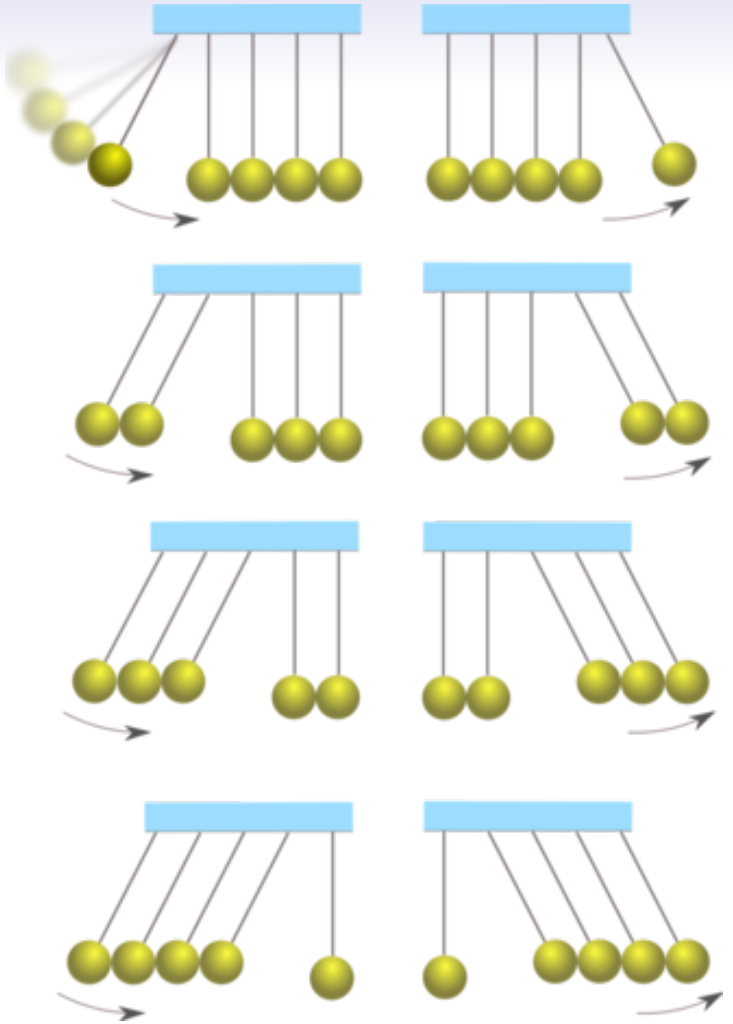
avant



après

voir https://de.wikipedia.org/wiki/Stoß_(Physik) pour des animations des collisions élastiques

Exemple: le **pendule de Newton**



on place une série de billes identiques, et au repos, en contact direct

on jette une autre bille (ou plusieures billes) contre cette chaîne

on peut admirer l'évolution du système, comme illustration de la conservation de l'impulsion et de l'énergie

source:

`https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelstoßpendel`,

voir aussi pour une animation

N.B.: si le clavier n'a pas ß, on peut écire 'stoss' au lieu de 'stoß'

2. Changement de repère

Définition: *Deux* **repères d'inertie** *se déplacent en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.*

les repères d'inertie ont les coordonnées $I : (t, \boldsymbol{r})$ et $I' : (t, \boldsymbol{r}')$, telles que

$$\boxed{t' = t \quad , \quad \boldsymbol{r}' = r - \boldsymbol{v}t} \qquad \text{(G)}$$

où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse relative entre I et I': on écrit $I \xrightarrow{\boldsymbol{v}} I'$.

Définition: *La transformation* (G) *est une* **transformation de Galilée**.

Exemple: si $I \xrightarrow{\boldsymbol{v}} I'$ et $I' \xrightarrow{\boldsymbol{v}'} I''$ alors $I \xrightarrow{\boldsymbol{u}} I''$ avec $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'$.

pour le voir: $t'' = t' = t$ et $\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{v}'t' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t - \boldsymbol{v}'t = \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}')t \overset{!}{=} \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}t$

N.B.: ceci est la **propriété de groupe** des transformations de Galilée

Application: deux particules ont la vitesse relative $\boldsymbol{V}$ par rapport à l'origine (admis fixe). Dans le repère d'inertie de l'origine, leur choc élastique se décrit comme suit:

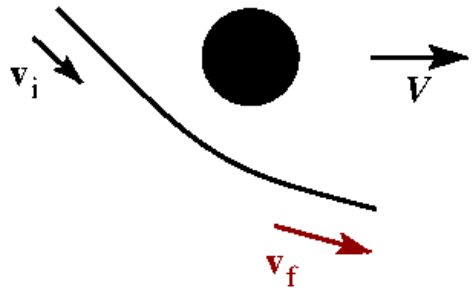
$$\text{conservation de l'impulsion:} \quad m_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}) + m_2(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}) = m_1(\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{V}) + m_2(\boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{V})$$

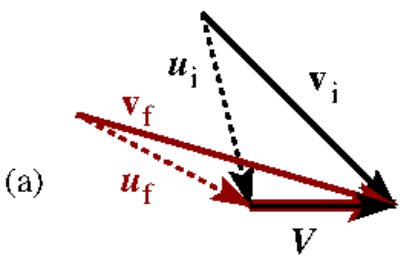
$$\text{conservation de l'énergie:} \quad \tfrac{1}{2}m_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V})^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V})^2 = \tfrac{1}{2}m_1(\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{V})^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{V})^2$$

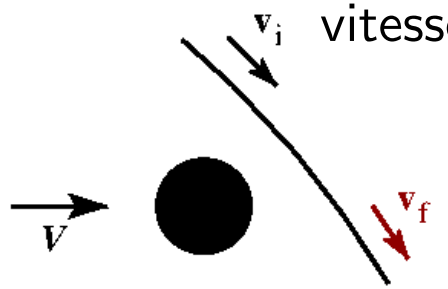
N.B.: on peut y mettre tout autre repère d'inertie, bien entendu ...

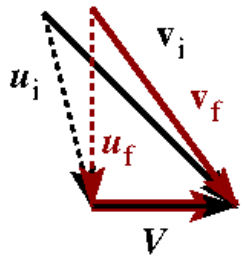
3. Effet catapulte

considérons le passage d'une sonde spatiale auprès d'une planète, vu du soleil









vitesses $\boldsymbol{u}_{i,f} = \boldsymbol{v}_{i,f} - \boldsymbol{V}$ de la sonde,
au repère de la planète

conservation de l'énergie

$$\boxed{\left|\boldsymbol{u}_i\right| = \left|\boldsymbol{u}_f\right|}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{u}_f = \mathscr{R}\boldsymbol{u}_i$

$\boldsymbol{u}_f$ tournée par rapport à $\boldsymbol{u}_i$

$\Rightarrow$ l'explication suivra !

sonde passe derrière la planète
$\boldsymbol{u}_i$ tourne au sens positif
sonde accélérée, car $\left|\boldsymbol{v}_f\right| > \left|\boldsymbol{v}_i\right|$
extérieur du système solaire
(Jupiter, Saturne, ...)

sonde passe devant la planète
$\boldsymbol{u}_i$ tourne au sens négatif
sonde freinée, car $\left|\boldsymbol{v}_f\right| < \left|\boldsymbol{v}_i\right|$
intérieur du système solaire
(Mercure, Soleil)

repère du soleil

sonde spatiale: masse m, vitesses $\boldsymbol{v}_i$ et $\boldsymbol{v}_f$ avant et après le choc

planète: masse M, vitesses $\boldsymbol{V}_i$ et $\boldsymbol{V}_f$ avant et après le choc

Rappel: conservation du moment cinétique $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_f$, $\boldsymbol{V}_i$, $\boldsymbol{V}_f$ dans le même plan

(1) conservation de l'impulsion: $m\boldsymbol{v}_i + M\boldsymbol{V}_i = m\boldsymbol{v}_f + M\boldsymbol{V}_f$

(2) conservation de l'énergie: $\frac{m}{2}\boldsymbol{v}_i^2 + \frac{M}{2}\boldsymbol{V}_i^2 = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}_f^2 + \frac{M}{2}\boldsymbol{V}_f^2$

dans le repère du soleil

valeurs typiques de masses: $m \approx 1[\mathrm{t}] = 10^3[\mathrm{kg}]$, $M \sim 10^{24} - 10^{27}[\mathrm{kg}]$ Venus - Jupiter

Exemples de sonde: Cassini: 5.9[t], Juno: 3.6[t], Galileo: 2.4[t], Messenger: 1.1[t], New Horizons: 0.5[t]

de (1): $\Rightarrow \boldsymbol{V}_f - \boldsymbol{V}_i = \frac{m}{M}(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_i) \approx (10^{-21} - 10^{-24})(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_i)$

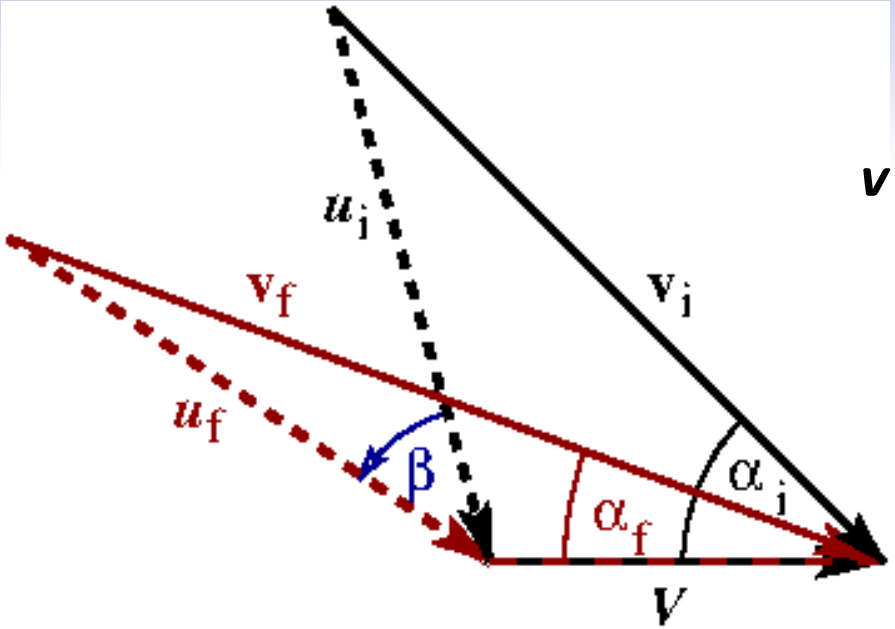
vitesse de la planète inchangée $\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{V}_f =: \boldsymbol{V}$ (V)

(2') conservation de l'énergie, dans le repère de la planète

$$\frac{m}{2}(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V})^2 + \frac{M}{2}\boldsymbol{0}^2 = \frac{m}{2}(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{V})^2 + \frac{M}{2}\boldsymbol{0}^2 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{u}_i^2 = \boldsymbol{u}_f^2 \qquad \text{(U)}$$

avec les notations $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{u}_f = \boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{V}$

$\Rightarrow$ il existe une rotation $\mathscr{R}$ par un angle β, telle que $\boldsymbol{u}_f = \mathscr{R}\boldsymbol{u}_i$



$\boldsymbol{v}_{i,f}$: vitesse de sonde avant/après le choc

$\boldsymbol{V}$: vitesse de la planète

$\boldsymbol{u}_{i,f} = \boldsymbol{v}_{i,f} - \boldsymbol{V}$ vitesse relative

$\alpha_{i,f}$: angle entre $\boldsymbol{v}_{i,f}$ et $\boldsymbol{V}$

β: angle de rotation entre $\boldsymbol{u}_i$ et $\boldsymbol{u}_f$

notation: $V = |\boldsymbol{V}|$, $v_i = |\boldsymbol{v}_i|$, $v_f = |\boldsymbol{v}_f|$

Lemme 1: *On a les identités*

avec le choix $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{e}_x$

$$v_f \cos\alpha_f = V\big(1-\cos\beta\big) + v_i\cos\big(\alpha_i-\beta\big) \quad , \quad v_f \sin\alpha_f = V\sin\beta + v_i\sin\big(\alpha_i-\beta\big)$$

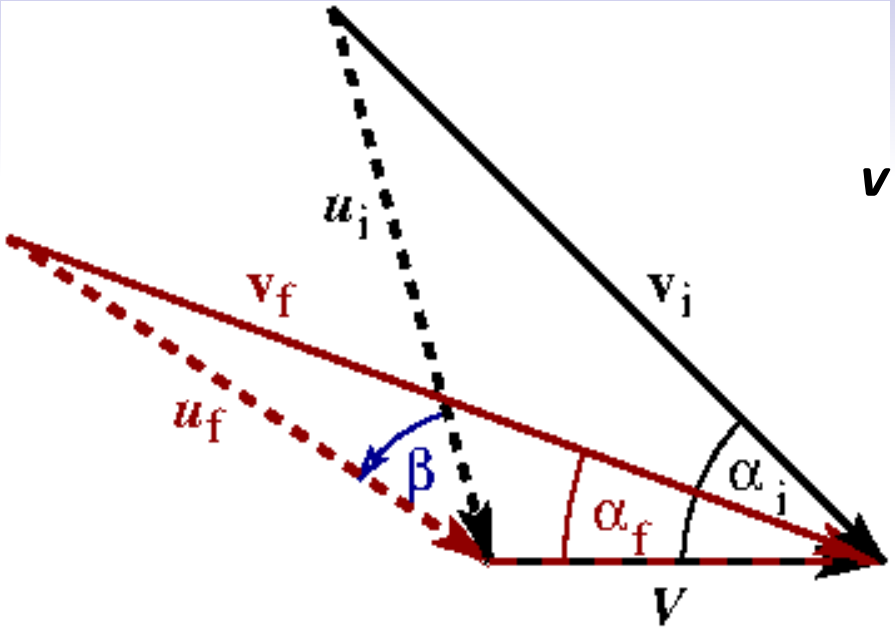
Démonstration: de la rotation $\boldsymbol{u}_f = \boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{V} = \mathscr{R}\big(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}\big) \Rightarrow \boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{V} + \mathscr{R}\big(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}\big)$

$$\boldsymbol{v}_f = \begin{pmatrix} v_f\cos\alpha_f \\ v_f\sin\alpha_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i\cos\alpha_i - V \\ v_i\sin\alpha_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_i\cos\alpha_i\cos\beta - V\cos\beta + v_i\sin\alpha_i\sin\beta \\ -v_i\cos\alpha_i\sin\beta + V\sin\beta + v_i\sin\alpha_i\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V\big(1-\cos\beta\big) + v_i\big(\cos\alpha_i\cos\beta + \sin\alpha_i\sin\beta\big) \\ V\sin\beta + v_i\big(\sin\alpha_i\cos\beta - \cos\alpha_i\sin\beta\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V\big(1-\cos\beta\big) + v_i\cos\big(\alpha_i-\beta\big) \\ V\sin\beta + v_i\sin\big(\alpha_i-\beta\big) \end{pmatrix}$$

(on utilise les théorèmes d'addition pour cos et sin)



$\boldsymbol{v}_{i,f}$: vitesse de sonde avant/après le choc

$\boldsymbol{V}$: vitesse de la planète

$\boldsymbol{u}_{i,f} = \boldsymbol{v}_{i,f} - \boldsymbol{V}$ vitesse relative

$\alpha_{i,f}$: angle entre $\boldsymbol{v}_{i,f}$ et $\boldsymbol{V}$

β: angle de rotation entre $\boldsymbol{u}_i$ et $\boldsymbol{u}_f$

notation: $V = |\boldsymbol{V}|$, $v_i = |\boldsymbol{v}_i|$, $v_f = |\boldsymbol{v}_f|$

Lemme 1: *On a les identités*

avec le choix $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{e}_x$

$$v_f \cos\alpha_f = V\big(1-\cos\beta\big) + v_i\cos\big(\alpha_i-\beta\big) \quad , \quad v_f \sin\alpha_f = V\sin\beta + v_i\sin\big(\alpha_i-\beta\big)$$

Démonstration: de la rotation $\boldsymbol{u}_f = \boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{V} = \mathscr{R}\big(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}\big) \Rightarrow \boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{V} + \mathscr{R}\big(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}\big)$

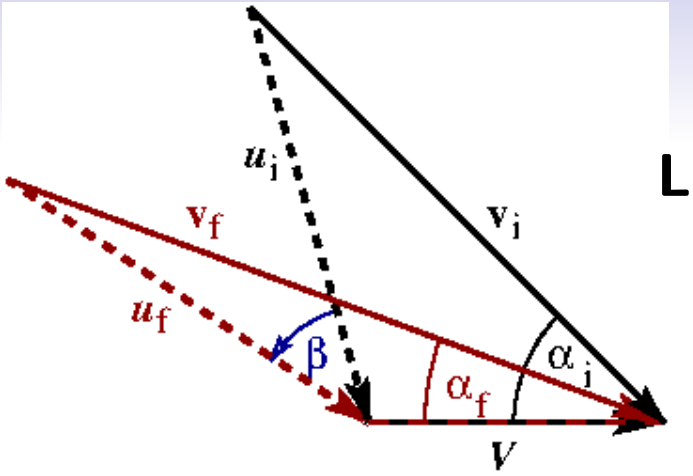
$$\boldsymbol{v}_f = \begin{pmatrix} v_f\cos\alpha_f \\ v_f\sin\alpha_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_i\cos\alpha_i - V \\ v_i\sin\alpha_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_i\cos\alpha_i\cos\beta - V\cos\beta + v_i\sin\alpha_i\sin\beta \\ -v_i\cos\alpha_i\sin\beta + V\sin\beta + v_i\sin\alpha_i\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V\big(1-\cos\beta\big) + v_i\big(\cos\alpha_i\cos\beta + \sin\alpha_i\sin\beta\big) \\ V\sin\beta + v_i\big(\sin\alpha_i\cos\beta - \cos\alpha_i\sin\beta\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V\big(1-\cos\beta\big) + v_i\cos\big(\alpha_i-\beta\big) \\ V\sin\beta + v_i\sin\big(\alpha_i-\beta\big) \end{pmatrix}$$

comme énoncé.

QED



Lemme 1: *On a les identités, avec* $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{e}_x$

$$v_f \cos\alpha_f = V\big(1-\cos\beta\big) + v_i\cos\big(\alpha_i-\beta\big) \quad (1)$$

$$v_f \sin\alpha_f = V\sin\beta + v_i\sin\big(\alpha_i-\beta\big) \quad (2)$$

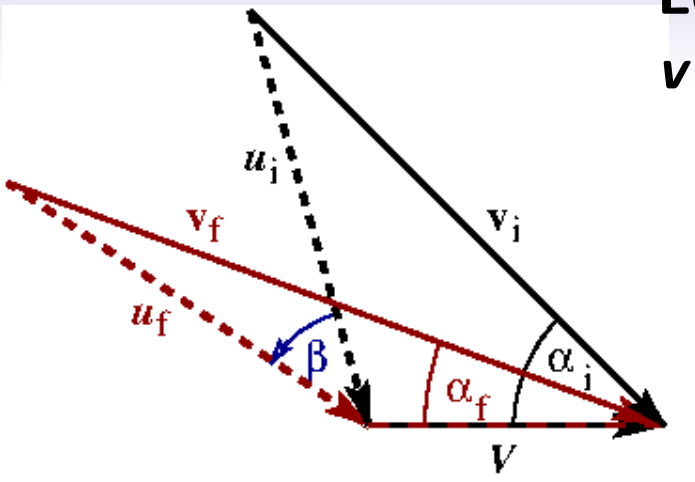
Lemme 2: *On a l'identité*

$$v_f^2 = v_i^2 + 2V^2\big(1-\cos\beta\big) + 2Vv_i\big(\cos(\alpha_i-\beta)-\cos\alpha_i\big) \quad (3)$$

Démonstration: on reprend les éqs. (1,2), mises au carré, puis sommées

$$\begin{aligned}
v_f^2 &= v_f^2\cos^2\alpha_f + v_f^2\sin^2\alpha_f \\
&= V^2\big(1-\cos\beta\big)^2 + v_i^2\cos^2(\alpha_i-\beta) + 2Vv_i\big(1-\cos\beta\big)\cos(\alpha_i-\beta) \\
&\quad + V^2\sin^2\beta + v_i^2\sin^2(\alpha_i-\beta) + 2Vv_i\sin\beta\sin(\alpha_i-\beta) \\
&= V^2 - 2V^2\cos\beta + V^2\big(\cos^2\beta+\sin^2\beta\big) + v_i^2 \\
&\quad + 2Vv_i\left[\cos(\alpha_i-\beta) - \big(\cos\beta\cos(\alpha_i-\beta) - \sin\beta\sin(\alpha_i-\beta)\big)\right] \\
&= 2V^2 - 2V^2\cos\beta + v_i^2 + 2Vv_i\left[\cos(\alpha_i-\beta) - \cos(\beta+\alpha_i-\beta)\right]
\end{aligned}$$

en accord avec l'énoncé. QED



Lemmes 1 & 2: *Avec* $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{e}_x$, *on a* $\boldsymbol{v}_f = \mathscr{R}\boldsymbol{v}_i + (1-\mathscr{R})\boldsymbol{V}$ *et les identités*

$$v_f \cos\alpha_f = V(1-\cos\beta) + v_i\cos(\alpha_i-\beta) \quad (1)$$

$$v_f \sin\alpha_f = V\sin\beta + v_i\sin(\alpha_i-\beta) \quad (2)$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2V^2(1-\cos\beta) + 2Vv_i(\cos(\alpha_i-\beta)-\cos\alpha_i) \quad (3)$$

Corollaires:

(A) on a $|\boldsymbol{v}_f| \le |\boldsymbol{v}_i| + 2|\boldsymbol{V}| \Rightarrow \boxed{v_f - v_i = |\boldsymbol{v}_f| - |\boldsymbol{v}_i| \le 2|\boldsymbol{V}| = 2V}$

$\Rightarrow$ catapulte de Venus ($V \simeq 35[\mathrm{km/s}]$) plus forte que celui de Jupiter ($V \simeq 13[\mathrm{km/s}]$) !

(B) vitesse v_f maximale obtenue de $\frac{\partial v_f}{\partial\beta} = 0$ en (3) avec v_i, V, α_i fixés

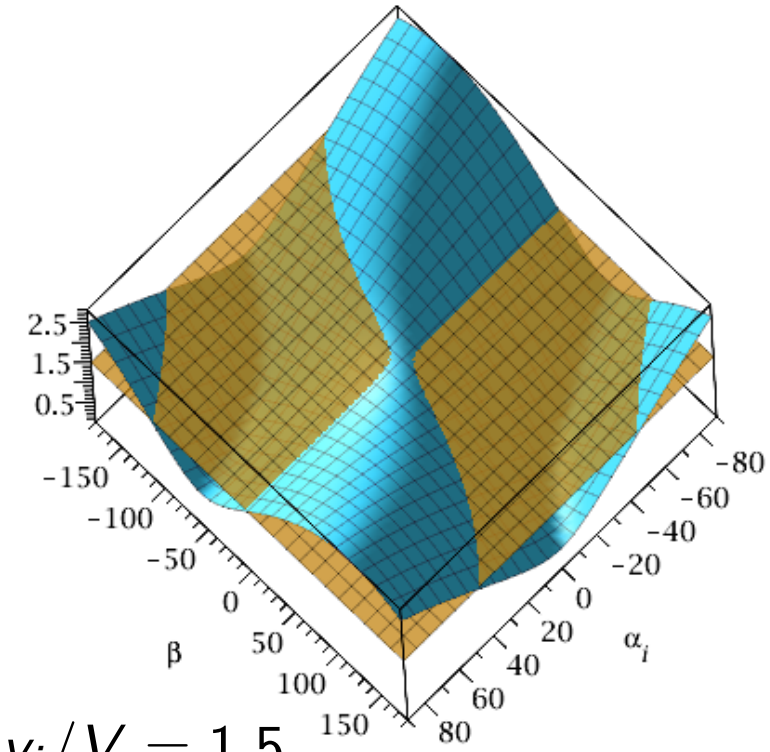
$$\text{maximum de } v_f \text{ à } \beta = \beta_{\max}, \text{ où} \qquad \tan\beta_{\max} = \frac{v_i\sin\alpha_i}{v_i\cos\alpha_i - V}$$

de (2): $\Rightarrow$ accélération maximale pour $\alpha_f = 0$

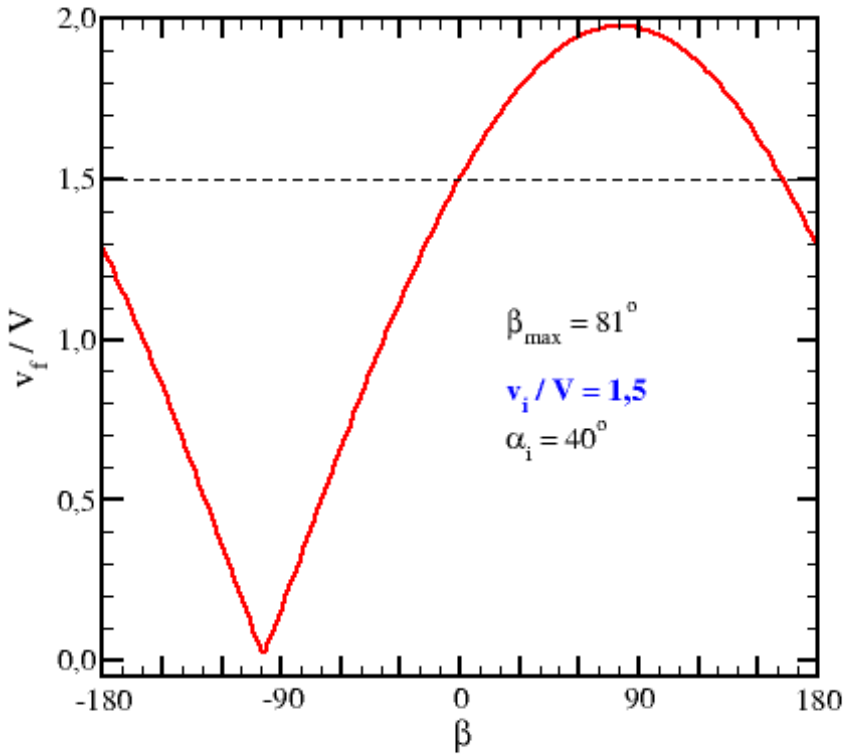
ça veut dire qu'après le choc, sonde et planète vont dans la même direction

dans le repère du soleil !

l'allure numérique de la fonction $v_f = v_f(v_i, \alpha_i, \beta)$ en unités de V



$v_i/V = 1.5$



* pour β petit, v_f augemente avec β, jusqu'à $\beta = \beta_{\max}$
* pour $\beta = 2\beta_{\max}$, on a de nouveau $v_f = v_i$
* si $v_i < v_f < v_{f,\max}$, il existe deux valeurs $\beta_{1,2}$, telles que $\beta_1 + \beta_2 = 2\beta_{\max}$

  Exemple: si $\alpha_i = 40^o$, $v_f/V = 1.8 \Rightarrow v_f/v_i = 1.2$, on a $\beta_1 = 33^o$ et $\beta_2 = 129^o$
* si $\beta < 0$ ou $\beta > 2\beta_{\max}$ on trouve $v_f < v_i \Rightarrow$ sonde freinée

Rappel: pour le potentiel gravitationnel $V(r) = -G\frac{mM}{r^2}$,
l'orbite autour d'une masse fixée est une conique

$$r(\varphi) = \frac{\mathfrak{l}^2/GM}{1+\varepsilon\cos\varphi} \quad , \quad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2\mathfrak{E}\mathfrak{l}^2}{G^2M^2}}$$

où $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{l}$: énergie et moment cinétique, *per unité de masse,* de la sonde,
au repère de la planète. Ici, r, φ: coordonnées polaires centrées sur la planète.

Distance minimale entre la sonde et la planète: $r_{\min} = \frac{\mathfrak{l}^2/GM}{1+\varepsilon}$.
Pour des grandes distances $r \to \infty$, on a $\varphi \to \pm\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Donc angle de diffusion

$$\beta = 2\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) - \pi$$

? À quelle distance de la surface de la planète la sonde va-t-elle passer ?
on a $GM = gR^2$, où g: pesanteur à la surface de la planète, R: rayon de la planète

$$\text{Critère: } r_{\min} = \frac{\mathfrak{l}^2}{gR^2+\sqrt{g^2R^4+2\mathfrak{E}\mathfrak{l}^2}} \overset{!}{>} R \implies \mathfrak{l}^2 > 2R^2\left(\mathfrak{E}+gR\right)$$

la sonde approche la planete avec la vitesse $u = \left|\boldsymbol{u}_i\right|$ et le *paramètre d'impact* b

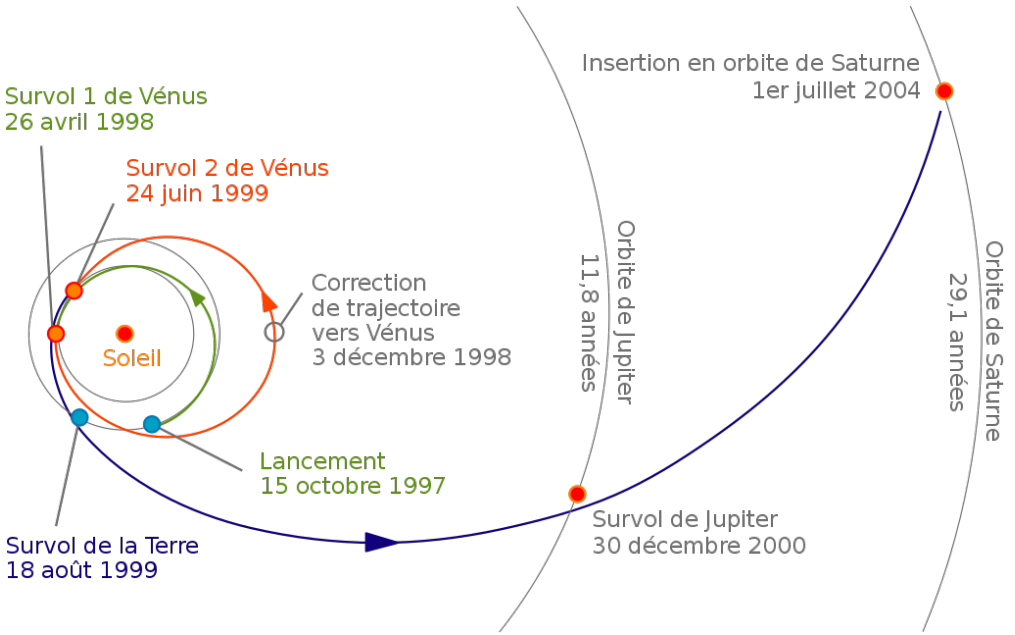
$$\text{énergie per masse } \mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}u^2 \quad , \quad \text{moment cinétique per masse } \mathfrak{l} = bu$$

la condition $r_{\min} \overset{!}{>} R$ devient $b \overset{!}{>} R\sqrt{1+\frac{2gR}{u^2}}$ voir [1]

Illustration numérique: passage près de Jupiter, de rayon $R_J = 71400[\mathrm{km}]$
On utilise les mêmes paramètres v_i, α_i qu'auparavant $\Rightarrow b = 2.7 \cdot 10^6[\mathrm{km}]$

si $\beta = \beta_1 = 33^o \Rightarrow r_{\min} = 2 \cdot 10^6[\mathrm{km}]$ bonne distance de sécurité

si $\beta = \beta_2 = 129^o \Rightarrow r_{\min} = 87500[\mathrm{km}]$ passage très proche, risquée



trajectoire de la sonde lourde Cassini (masse $5.9[\mathrm{t}]$ **!**)

$\Rightarrow$ nécessité de plusieurs (4!) assitances gravitationnelles, jusqu'à l'arrivé à Saturne

multitude de détails pour la mise en œuvre pratique

source: `https://fr.wikipedia.org/wiki/Assistance_gravitationnelle`, voir aussi les animations sur cette page

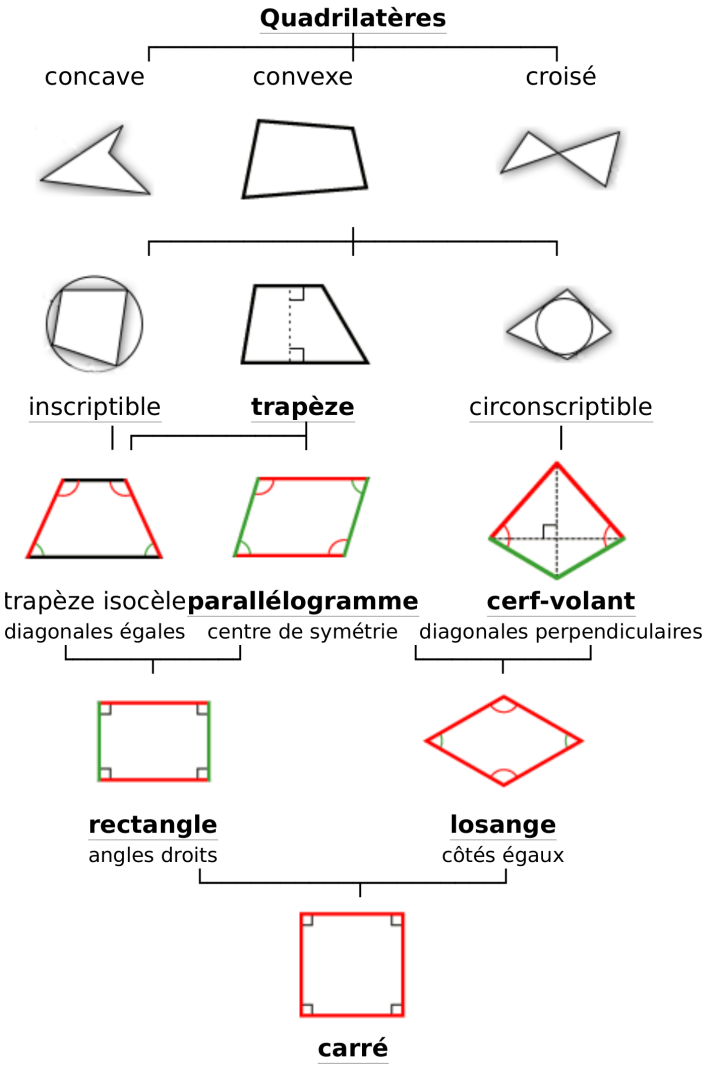
Réfs: [1] D.C. Johnson, `https://maths.dur.ac.uk/~dma0rcj/Psling/sling.pdf`
[2] B. Casselman, `http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-slingshot`

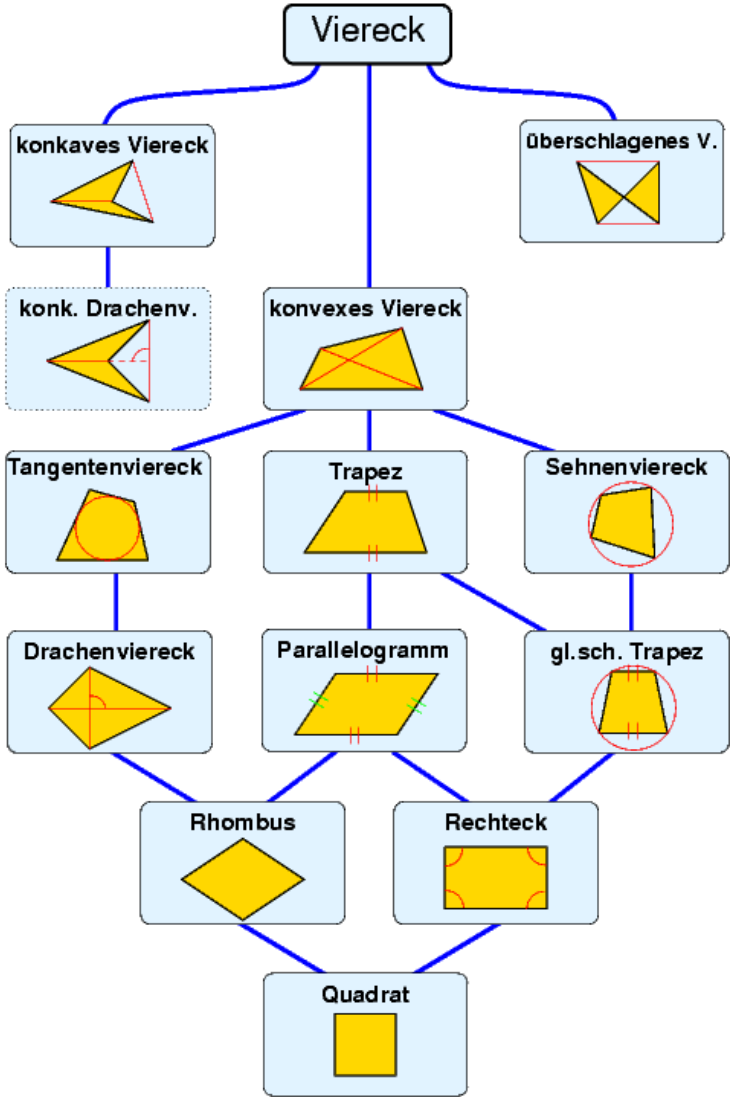
un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Stoß, *m*	collision, *f*; choc, *m*
elastisch	élastique
Kugelstoßpendel, *n*	pendule de Newton, *f*
Tastatur, *f*	clavier, *m*
Rechnertastatur, *f*	clavier d'ordinateur, *m*
Inertialsystem, *n*	repère d'inertie, *m*
Galileitransformation, *f*	transformation de Galilée, *f*
Raumsonde, *f*	sonde spatiale, *f*
Drehung, *f*	rotation, *f*
Winkel, *m*	angle, *m*
(sich) drehen	tourner
Schleuder, *f*	catapulte, *f*
Behauptung, *f*	affirmation, *f*; énoncé, *m*
Aufgabenstellung, *f*	énoncé de problème, *m*
Überflug, *m*	survol, *m*
überfliegen	survoler
Vorbeischwungmanöver, *n*; (engl. swing-by)	assistance gravitationnelle, *f*

das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben/le genre grammatical des substantifs (*m,f*) est indiqué

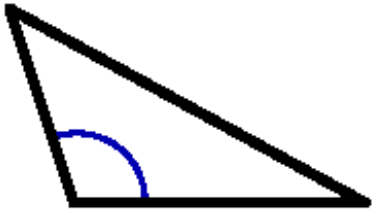
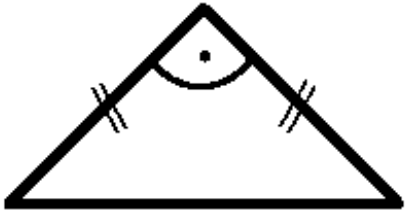
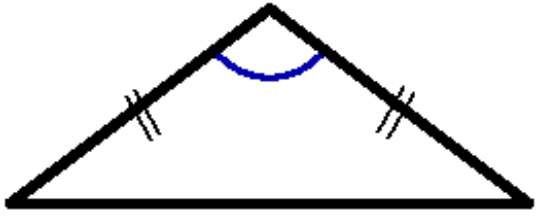
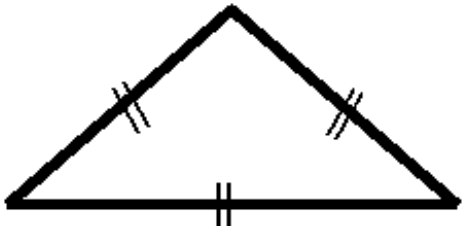
Terminologie française des quadrilatères /*deutsche Terminologie der Vierecke*





sources: `https://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrilatère` ; `https://de.wikipedia.org/wiki/Viereck`

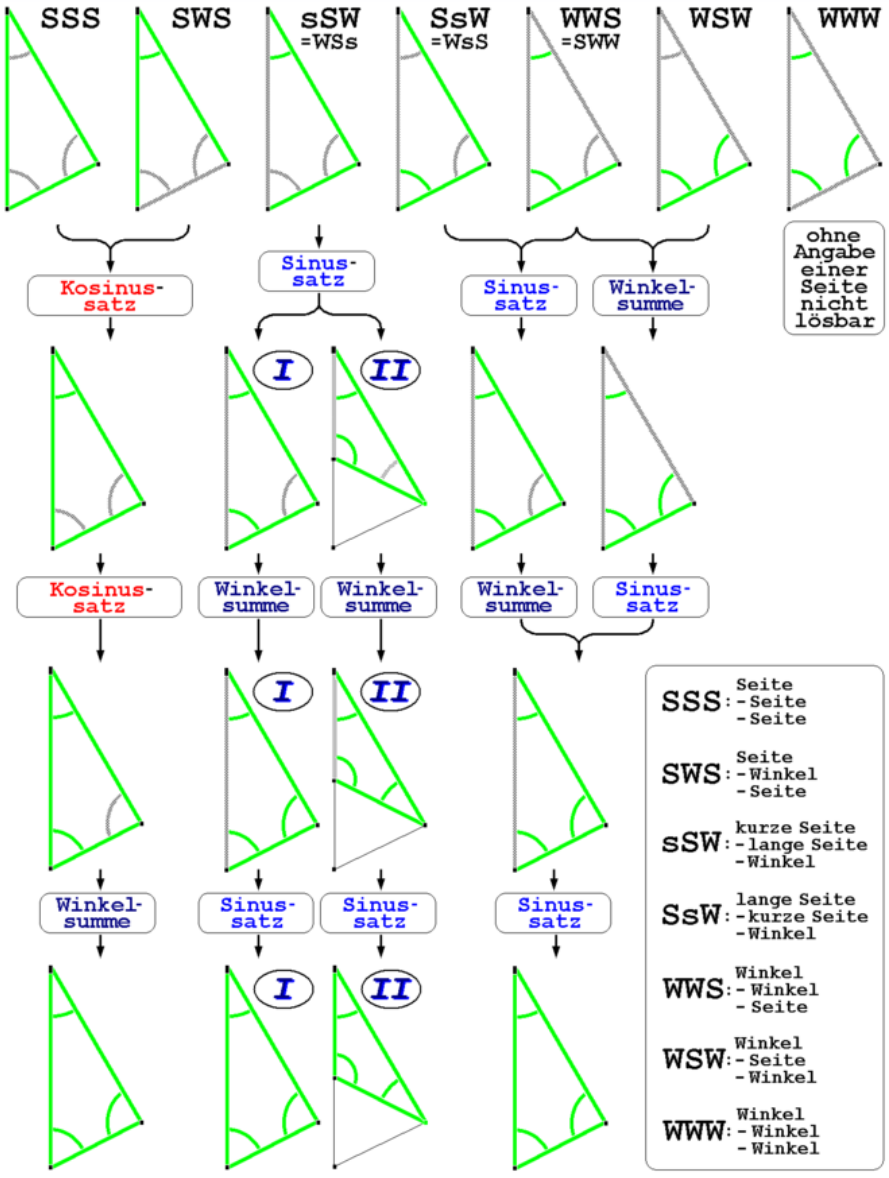
Terminologie française des triangles / *deutsche Terminologie der Dreiecke*

	spitzwinkelig acutangle	*rechtwinkelig* rectangle	*stumpfwinkelig* obtusangle
unregelmäßig irrégulier			
gleichschenkelig isocèle			
gleichseitig équilatérale			

Un triangle acutangle s'appelle un *oxygone*.
Un triangle obtusangle s'appelle un *ambligone*.

Pour un triangle équilatérale, les trois angles intérieurs sont égaux à 60°.
In einem gleichseitigen Dreieck sind die drei Innenwinkel gleich 60°.

voici un schéma sur la route à suivre pour construire un triangle arbitraire



S: côte (**S**eite) donné
W: angle (**W**inkel) donné
s: côte inconnu

outils requis:
Kosinussatz: théorème du cosinus
Sinussatz: théorème du sinus
Winkelsumme: formule sur la somme des angles

source: https://de.wikipedia.org/wiki/Dreieck

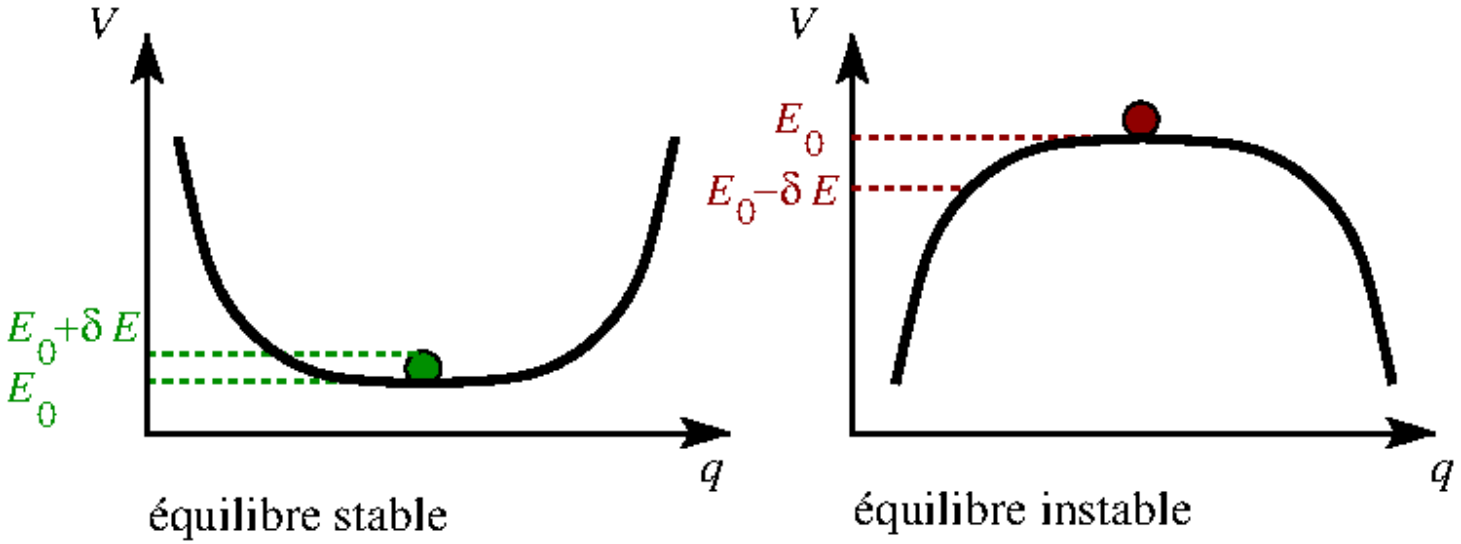
4. Petites oscillations I

système mécanique, N degrés de liberté

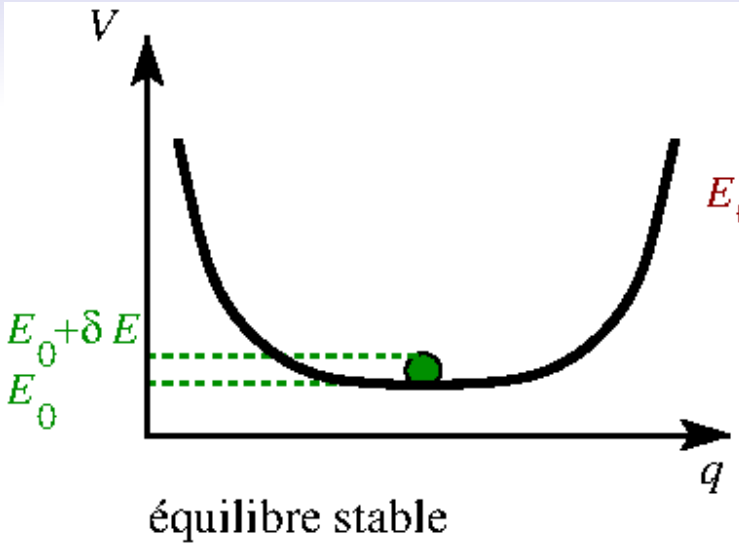
si système en équilibre mécanique: force totale $\boldsymbol{F}_{\text{tot}} = \boldsymbol{0}$

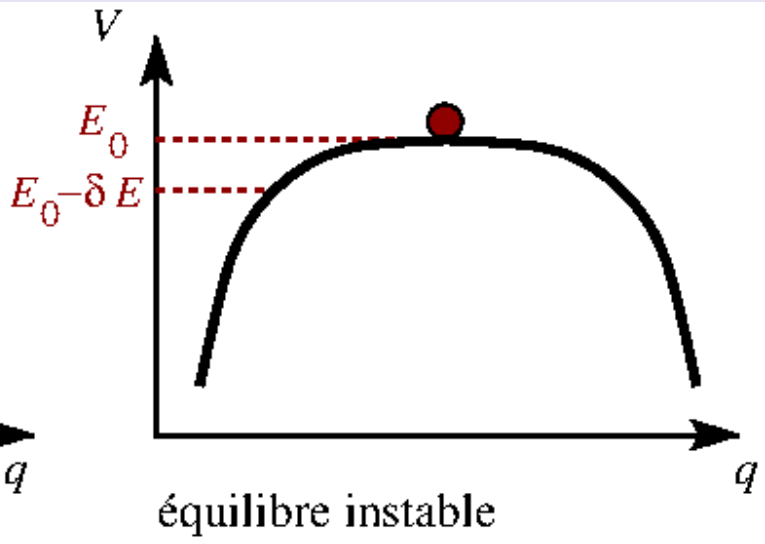
si forces conservatives, ceci implique pour le potentiel $V = V(q_1, \ldots, q_N)$:

condition d'équilibre: $\boxed{\dfrac{\partial V}{\partial q_i} = 0}$, $i = 1, \ldots N$



☞ il existe deux types d'équilibre: **stable** et **instable**





si **équilibre stable**, avec énergie E_0:

une perturbation δE maintient le mouvement au voisinage du point d'équilibre

si **équilibre instable**, avec énergie E_0:

une perturbation δE éloigne le mouvement loin du point d'équilibre

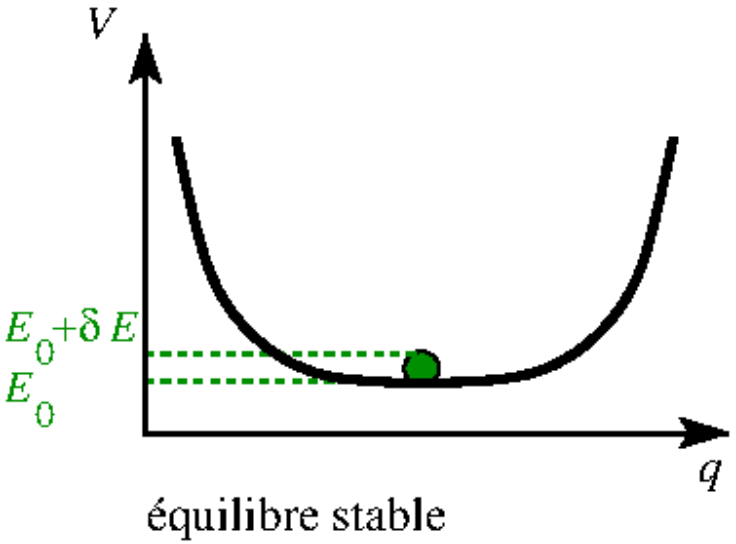
☞ relation avec orbites circulaires stables et instables – potentiel effectif

ici: *étude du mouvement autour d'un équilibre stable*

$$q_i = q_{i,0} + \eta_i \quad , \quad i = 1, \ldots N$$

où $q_{i,0}$: position d'équilibre, η_i: coordonnée relative

étude du mouvement autour d'un équilibre stable



décomposition

$$q_i = q_{i,0} + \eta_i \quad , \quad i = 1, \dots N$$

où $q_{i,0}$: position d'équilibre, η_i: coordonnée relative

(a) développement limité du potentiel

$$V(q_1, \dots q_n) = V_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_0 \eta_i}_{=0 \text{ à l'équilibre}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_0 \eta_i \eta_j + \dots$$

où $V_0 = V(q_{1,0}, \dots q_{n,0})$.

☞ On peut toujours choisir $V_0 = 0$. sans restriction de la généralité

☞ notons encore: $V_{ij} := \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_0$.

[**Rappel mathématique**: développement de Taylor en deux variables

pour une fonction dite *'analytique'* $f = f(x)$ en une variable, on peut écrire un développement autour du point x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

Considérons une fonction $F = F(x, y)$ en deux variables x et y, autour du point (x_0, y_0):
(i) d'abord, on fixe y et on développe en x, autour de x_0:

$$F(x, y) = F(x_0, y) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y) \cdot (x - x_0)^2 + \dots$$

(ii) ensuite on développe les termes restants aussi en y, autour de y_0: on s'arrête au 2e ordre

$$\begin{aligned} F(x, y) \quad = \quad & F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 + \dots \\ & + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)(x - x_0) + \dots \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Théorème: (Schwarz) *Si la fonction $F = F(x, y)$ est deux fois partiellement dérivable et si la dérivée partielle mixte $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ existe en un point (x_0, y_0) et y est continue, alors l'autre dérivée partielle mixte $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ existe aussi au point (x_0, y_0) et*

Schwarz a appris cette formule dans un cours de Weierstrass 1861 à Berlin

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \qquad \text{pour } (x, y) = (x_0, y_0)$$

Avec le théorème de Schwarz, on peut arranger (et symétriser !) ces termes comme suit

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= F(x_0,y_0) \\
&\quad + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\cdot(x-x_0)(y-y_0)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right] \\
&\quad + \dots \\
&= F(x_0,y_0) + \sum_{i=1}^{2}\left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_0 (x_i - x_{i,0}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right|_0 (x_i - x_{i,0})(x_j - x_{j,0}) + \dots
\end{aligned}
$$

avec la notation $x_1 = x$ et $x_2 = y$. De plus, $\left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_0$ indique la valeur de cette dérivée au point (x_0, y_0).

Ceci est le *développement de Taylor pour une fonction de deux variables et jusqu'au 2e ordre*.
La démonstration du théorème de Schwarz et des estimations pour les restes dans le développement de Taylor sont thèmes des cours d'analyse mathématique.

p.ex. S. Hildebrandt, *Analysis 2*, Springer (Heidelberg)

les cas de plus que deux variables et/ou des ordres supérieurs s'obtiennent d'une manière analogue.]

avec ces conventions et notations, on retient du potentiel les termes

$$V(q_1, \ldots, q_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} V_{ij} \eta_i \eta_j$$

Définition: *La restriction aux termes quadratiques en V s'appelle* **régime de petites oscillations**.

N.B.: ces oscillations sont toujours des oscillations harmoniques

(b) développement limité de l'énergie cinétique

en général, l'énergie cinétique T est au moins quadratique dans les vitesses. On écrit

$$T(q_1, \ldots, q_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

où $T_{ij}(q_1, \ldots, q_N) \simeq \underbrace{T_{ij}(q_{1,0}, \ldots, q_{N,0})}_{\text{constante}} + \underbrace{\sum_k \left.\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k}\right|_0 \eta_k}_{\text{déjà 'petit'}} + \ldots$

Lagrangien d'un système de N degrés de liberté, au régime de petites oscillations

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \left(T_{ij}\, \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij}\, \eta_i \eta_j \right)$$

où T_{ij} et V_{ij} sont des constantes (et contiennent toute information pertienente sur le système).

Les équations de mouvement s'écrivent (procédure standard d'Euler-Lagrange)

$$\sum_{j=1}^{N} \left(T_{ij}\, \ddot{\eta}_j + V_{ij}\, \eta_j \right) = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \qquad \text{(E)}$$

donc N équadiffs *linéaires* du 2e ordre pour les N variables η_i

Propriété: les coefficients $T_{ij} = T_{ji}$ et $V_{ij} = V_{ji}$ sont symétriques

Propriété: les coefficients $T_{ij} = T_{ji}$ et $V_{ij} = V_{ji}$ sont symétriques

Démonstration: on se concentre sur V_{ij}. Si V_{ij} n'etait pas symétrique, on aurait

$$V_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S_{ij} = S_{ji} & \text{symétrique} \\ A_{ij} = -A_{ji} & \text{anti-symétrique} \end{cases}$$

et on peut même les construire explicitement

$$S_{ij} := \tfrac{1}{2}\big(V_{ij} + V_{ji}\big) = S_{ji} \quad , \quad A_{ij} := \tfrac{1}{2}\big(V_{ij} - V_{ji}\big) = -A_{ji}$$

Ainsi, le potentiel s'écrit comme suit

$$V = \tfrac{1}{2}\sum_{ij}\left(\underbrace{S_{ij}}_{\text{sym.}}\underbrace{\eta_i\eta_j}_{\text{sym.}} + \overbrace{\underbrace{A_{ij}}_{\text{anti}}\underbrace{\eta_i\eta_j}_{\text{sym.}}}^{=0}\right) = \frac{1}{2}\sum_{ij} S_{ij}\,\eta_i\eta_j$$

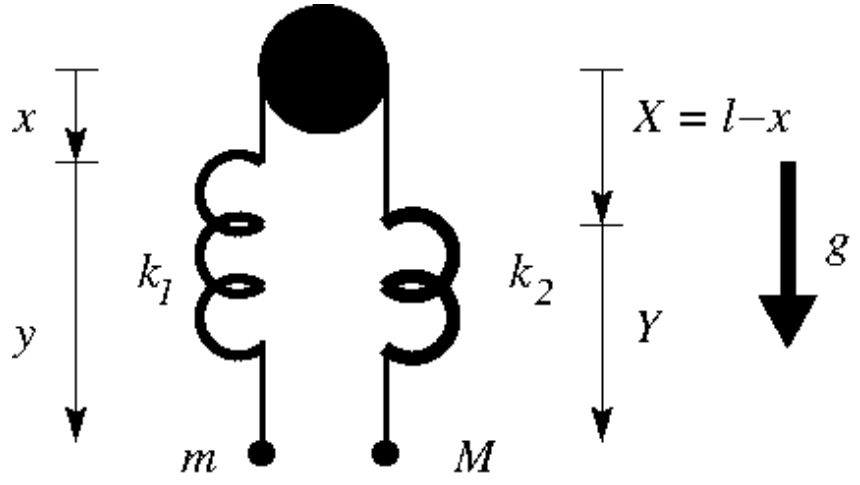
car on peut calculer explicitement (afin de vérifier que $A = -A = 0$)

$$\begin{aligned} A := \sum_{ij} A_{ij}\,\eta_i\eta_j &= -\sum_{ij} A_{ji}\,\eta_i\eta_j && \text{anti-symétrie } A_{ij} = -A_{ji} \\ &= -\sum_{ij} A_{ji}\,\eta_j\eta_i && \text{permuter } \eta_i \leftrightarrow \eta_j \\ &= -\sum_{ji} A_{ij}\,\eta_i\eta_j && \text{renommer les indices } i \leftrightarrow j \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ seule la partie symétrique contribue à V. $T_{ij} = T_{ji}$ se voit de manière analoge. QED

Exemple physique: machine d'Atwood avec 2 ressorts

système: 2 particules, attachées aux ressorts de raideur $k_{1,2}$, liés par un fil de longueur ℓ



le fil est de longueur ℓ constante
$\Rightarrow$ contrainte $X = \ell - x$
$\Rightarrow$ $4 - 1 = 3$ degrés de liberté

positions des 2 masses

$$x_m = x + y \quad , \quad x_M = \ell - x + Y$$

énergie cinétique

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}_m^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_M^2 = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{M}{2}\dot{Y}^2 + m\dot{x}\dot{y} - M\dot{x}\dot{Y}$$

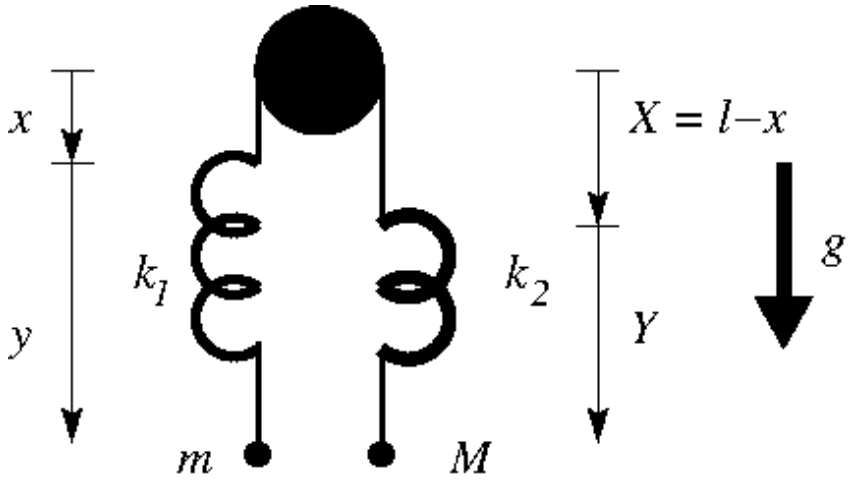
potentiel

$$V = -mgx_m - Mgx_M + \tfrac{1}{2}k_1 y^2 + \tfrac{1}{2}k_2 Y^2 = -(m-M)gx - mgy - MgY + \tfrac{1}{2}k_1 y^2 + \tfrac{1}{2}k_2 Y^2 + \text{cste.}$$

lagrangien

$$L = T - V = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + (m-M)gx + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + mgy + \frac{M}{2}\dot{Y}^2 + MgY + m\dot{x}\dot{y} - M\dot{x}\dot{Y} - \frac{k_1}{2}y^2 - \frac{k_2}{2}Y^2$$

système: 2 particules, attachées aux ressorts de raideur $k_{1,2}$, liés par un fil de longueur ℓ



le fil est de longueur ℓ constante
$\Rightarrow$ contrainte $X = \ell - x$
$\Rightarrow$ $4 - 1 = 3$ degrés de liberté

positions des 2 masses

$$x_m = x + y \quad , \quad x_M = \ell - x + Y$$

équations de mouvement

$$\begin{array}{rrrrrcl}
(m+M)\ddot{x} & + m\ddot{y} & - M\ddot{Y} & & - (m-M)g & = & 0 \\
m\ddot{x} & + m\ddot{y} & & + k_1 y & - mg & = & 0 \\
-M\ddot{x} & & + M\ddot{Y} & + k_2 Y & - Mg & = & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow$ système pour 3 oscillations couplées, sous l'influence de la pesanteur
les forces externes peuvent être éliminées à l'aide des transformations en x, y, Y
étudier d'abord le cas des oscillations non forcées, sans pesanteur: $g = 0$

étudier d'abord le cas des oscillations non forcées, sans pesanteur: $g = 0$

équations de mouvement (cas non forcé)

$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{x} + m\ddot{y} - M\ddot{Y} &= 0 \\ m\ddot{x} + m\ddot{y} + k_1 y &= 0 \\ -M\ddot{x} + M\ddot{Y} + k_2 Y &= 0 \end{aligned}$$

on résout de tels systèmes à l'aide de l'ansatz

$$\eta_j(t) = C a_j e^{-i\omega t} \quad , \quad j = 1, \ldots, N$$

où ω: fréquence angulaire, a_j: amplitudes, C: constante de normalisation

N.B.: déjà pour un seul oscillateur harmonique, on a utilisé un tel ansatz

$\Rightarrow$ en général, les équations de mouvement (E) prennent la forme

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right) a_j = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N}$$

intérêt de l'ansatz: réduction d'une équadiff à une équation algébrique

$\Rightarrow$ la solution des équations de mouvement se réduit à la solution du système

problème de valeurs et vecteurs propres généralisés

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N}\Big(V_{ij}-\omega^2 T_{ij}\Big)a_j=0 \quad , \quad i=1,\ldots,N}$$

où $V_{ij}=V_{ji}$ et $T_{ij}=T_{ji}$ sont symétriques

* système d'équations linéaires homogènes pour les a_j
* de plus, ω^2 est aussi à déterminer

☞ en général, pour des équations linéaires homogènes:

une des a_j peut être choisie librement (choix de C)

* on a donc $\big(N-1\big)+1=N$ variables pour N équations

les a_j ω^2

le compte y est !

☞ *solution explicite requiert des techniques d'algèbre linéaire*

ce que nous allons développer dans le prochain chapitre . . .

. . . avant de comprendre comment l'interpréter pour la physique !

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Näherung, *f*	approximation, *f*
Gleichgewicht, *n*	équilibre, *m*
stabil	stable
unstabil	instable
Zerlegung, *f*	décomposition, *f*
zerlegen	décomposer
vertauschen	permuter
erzwungene Schwingung, *f*	oscillation forcée, *f*
lineare Algebra, *f*	algèbre linéaire, *f*
Ansatz, *m*	ansatz, *m*
Lösung, *f*	solution, *f*
lösen (eine Gleichung, ein Rätsel)	résoudre (une équation, une énigme)
Gleichung, *f*	équation, *f*
algebraische Gleichung, *f*	équation algébrique, *f*
Differentialgleichung, *f*	équation différentielle, *f*
Integralgleichung, *f*	équation intégrale, *f*

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

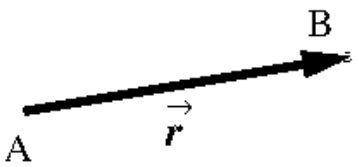
COURS II/ VORLESUNG II

V) Vecteurs et matrices

1. Vecteurs et espaces vectoriels

la notion d'un vecteur est à peu près connue de la géométrie élémentaire:

"c'est une ligne orientée entre deux points" ou *'flèche indienne'/'Indianerpfeil'*



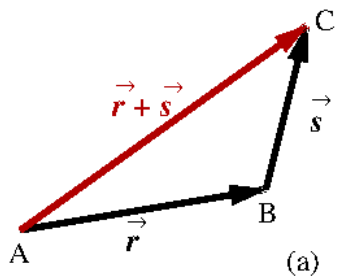
on écrit $\overrightarrow{AB}$ pour la ligne orientiée qui relie le point A avec le point B

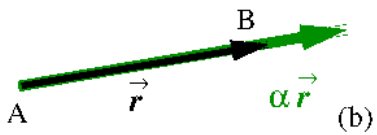
ou bien on écrit le vecteur $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{AB}$ (ou $\vec{r}$)

(a) on peut prendre la 'somme' de deux vecteurs

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\boldsymbol{t} \quad = \boldsymbol{r} \quad + \boldsymbol{s}$ est vecteur





(b) on peut multiplier un vecteur avec un nombre ('scalaire') $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

si $\boldsymbol{r}$ est vecteur, alors $\alpha\boldsymbol{r}$ est aussi vecteur

(c) un vecteur a une 'longueur' $r = |\boldsymbol{r}| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ = distance entre A et B

'évidemment' $\left|\overrightarrow{AC}\right| \leq \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| \Leftrightarrow |\boldsymbol{t}| \leq |\boldsymbol{r}| + |\boldsymbol{s}|$ le détour est plus long

$$\boxed{|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}| \leq |\boldsymbol{r}| + |\boldsymbol{s}|} \quad , \quad \text{inégalité du triangle}$$

nous donnons une définition abstraite et générale de ces propriétés

Définition: *Un ensemble V est un* **espace vectoriel**, *s'il existe des applications*

$$
\begin{array}{rcll}
+ & : & V \otimes V \longrightarrow V & \text{addition des vecteurs} \\
 & & (x, y) \mapsto x + y & \\
\cdot & : & \mathbb{R} \otimes V \longrightarrow V & \text{multiplication d'un vecteur par un scalaire} \\
 & & (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x &
\end{array}
$$

telles que $\forall x, y, z \in V$ *et* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i) $(x + y) + z = x + (y + z)$

ii) $x + y = y + x$

iii) $\exists 0 \in V : \; x + 0 = x$

iv) $\forall x \in V \, \exists (-x) \in V : \; x + (-x) = 0$

v) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

vi) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

vii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

viii) $\exists 1 \in \mathbb{R} : \; 1 \cdot x = x$

On dit que $(V, +)$ *est un* **groupe** *(abélien).* *(sans la multiplication avec un scalaire)*

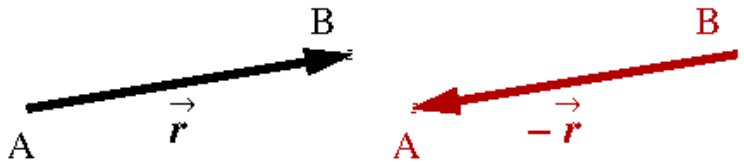
Les éléments $x \in V$ *s'appellent* **vecteurs**, $\alpha \in \mathbb{R}$ *s'appelle* **scalaire**.

N.B.: on a défini des **espaces vectoriels réels**. Si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, on obtient des **espaces vectoriels complexes**.

Notation: presque toujours, on écrit αx au lieu de $\alpha \cdot x$. On écrit aussi $\alpha x = x\alpha$.

Exemples des espaces vectoriels

1) les 'flèches indiennes': avec des opérations habituelles tirées de la géométrie élémentaire



il suffit d'identifier

(α) le vecteur nul: $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$

(β) si $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{AB}$, alors $-\boldsymbol{r} = \overrightarrow{BA}$

exercice

2) les 'vecteurs cartésiens' $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ avec $a_i \in \mathbb{R}$. On pose $(\alpha \in \mathbb{R})$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha\, \boldsymbol{a} = \alpha \cdot \boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur nul $\mathbf{0}$ et le vecteur inverse de $\boldsymbol{a}$ sont identifiés comme suit

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad -\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

La vérification des axiomes d'espace vectoriel est directe.

exercice

Cet espace vectoriel s'écrit $\mathbb{R}^3$.

[pour cet exemple $\mathbb{R}^3$, la vérification des axiomes de l'espace vectoriel se fait ainsi:

(i) $$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ a_2+b_2+c_2 \\ a_3+b_3+c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \\ b_3+c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

(ii) $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+a_1 \\ b_2+a_2 \\ b_3+a_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

(iii) soit $$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} a_1+0 \\ a_2+0 \\ a_3+0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$

(iv) soit $$(-\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} a_1+(-a_1) \\ a_2+(-a_2) \\ a_3+(-a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

(v) $$\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} \alpha(a_1+b_1) \\ \alpha(a_2+b_2) \\ \alpha(a_3+b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha b_1 \\ \alpha b_2 \\ \alpha b_3 \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$$

(vi) $$(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a_1 \\ (\alpha+\beta)a_2 \\ (\alpha+\beta)a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_1 \\ \beta a_2 \\ \beta a_3 \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$$

(vii) $$(\alpha\,\beta)\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha\beta\, a_1 \\ \alpha\beta\, a_2 \\ \alpha\beta\, a_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta a_1 \\ \beta a_2 \\ \beta a_3 \end{pmatrix} = \alpha(\beta\boldsymbol{a})$$; (viii) $$(1\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 1\,a_1 \\ 1\,a_2 \\ 1\,a_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$]

3) les 'vecteurs cartésiens' en d dimensions $\mathbb{R}^d$: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$ avec $a_i \in \mathbb{R}$.

On pose ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_d + b_d \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha\, \boldsymbol{a} = \alpha \cdot \boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_d \end{pmatrix}$$

On a le vecteur nul $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur inverse de $\boldsymbol{a}$: $-\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_d \end{pmatrix}$.

4) soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle réel (p.ex. $I = [a, b]$) et soit V l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$. Ici, chaque fonction f est un vecteur. On pose

$$\big(f + g\big)(x) := f(x) + g(x) \quad , \quad \big(\alpha\, f\big)(x) = \big(\alpha \cdot f\big)(x) := \alpha\, f(x)$$

à gauche, on a les operations en V, à droite ce sont des opérations de nombres réels

on identifie: (α) vecteur nul, c'est la fonction $0 : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$

(β) vecteur inverse $-f$ de f: $-f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -f(x)$.

Encore une fois, la vérification des axiomes d'espace vectoriel est directe exercice

N.B.: ce genre d'exemple est utilisé souvent en mécanique quantique

5) une **matrice** 2×2 est un schéma quadratique

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{avec } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

On pose pour l'addition et la multiplication avec un scalaire réel

$$a + b := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha\, a = \alpha \cdot a := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

à gauche, on a les operations en V, à droite ce sont des opérations de nombres réels

L'ensemble $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de telles matrices est un espace vectoriel. exercice

on peut aisément multiplier de telles exemples, avec une vérification directe

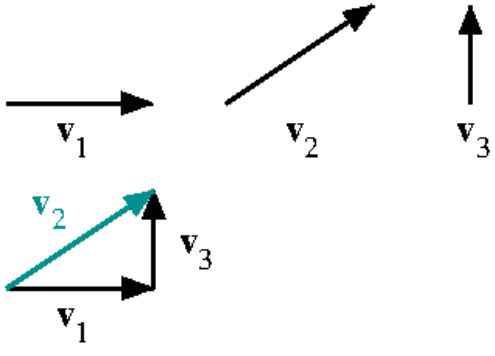
2. Dimensions

Définition: *Soit V espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ces vecteurs sont* **linéairement indépendants** *si l'équation*

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

a pour seule solution $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.
Sinon, les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont **linéairement dépendants**.

Exemples: **1)** les flèches indiennes (dans le plan).

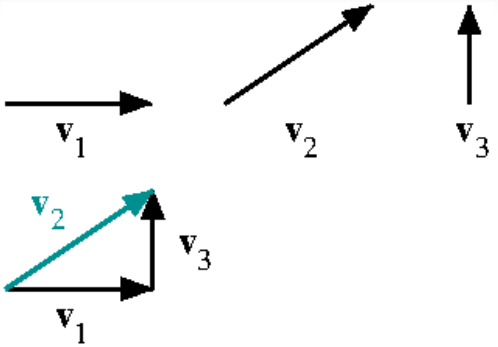


les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ sont linéairement indépendants

les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ sont linéairement dépendants, car

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$$

1) les flèches indiennes (dans le plan).



les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ sont linéairement indépendants

les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ sont linéairement dépendants, car

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$$

2) pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on admet

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc, de nouveau $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$.
L'ensemble $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ est linéairement dépendant, mais chacun des ensembles $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, $\{\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3\}$ est linéairement indépendant.

Définition: *Le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel V est sa* **dimension**, *notée* $\dim V$.

Exemples:

$$1) \ \dim \mathbb{R}^2 = 2 \ , \ 2) \ \dim \mathbb{R}^d = d \ , \ 3) \ \dim \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$$

Définition: *Soit* $\dim V = n$ *et soit* $\{v_1, \ldots, v_n\} \in V$ *un ensemble maximal de vecteurs linéairement indépendants. Si pour chaque* $v \in V$*, on a*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad ; \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

alors $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une **base** de V. Les nombres α_i sont les **composantes** *de* v*.*

Exemple: pour $V = \mathbb{R}^d$, on a une **base canonique**

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \boldsymbol{v}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un vecteur $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$ a les composantes $a_1, a_2, \ldots, a_d$ dans cette base canonique.

N.B.: on écrit souvent $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d = \boldsymbol{v}_d$ pour la base canonique (ou $\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_3$ en $\mathbb{R}^3$)

Définition: *Soient V, W des espaces vectoriels et* $\dim V = \dim W$. *V et W sont* **isomorphes** *(noté $V \overset{\triangle}{=} W$) s'il existe une application bijective $f : V \to W$ telle que*

$$f\left(\alpha \cdot v + \beta \cdot v'\right) = \alpha \cdot f(v) + \beta \cdot f(v') \;\; ; \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; \forall v, v' \in V$$

à gauche: opération en V; à droite: opération en W

N.B.: car f est bijective, son inverse $f^{-1} : W \to V$ existe et

$$f^{-1}\left(\alpha \cdot w + \beta \cdot w'\right) = \alpha \cdot f^{-1}(w) + \beta \cdot f^{-1}(w')$$

On dit qu'un **isomorphisme** 'préserve la structure'.

Proposition: *L'espace vectoriel des 'flèches indiennes' dans le plan et l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes.*

N.B.: l'isomorphie est la manière mathématique d'exprimer l'identité entre espaces vectoriels

Proposition: *L'espace vectoriel des 'flèches indiennes' dans le plan et l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes.*

Démonstration: dans le plan, on prend la base $\boldsymbol{e}_1 =$ et $\boldsymbol{e}_2 =$
pour les flèches et dans $\mathbb{R}^2$, on prend la base $\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Pour les flèches $\in V$, chaque vecteur $\boldsymbol{v} =$ $= \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2$. On y associe
en $W = \mathbb{R}^2$ le vecteur $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2$.
Évidemment, cette application $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{w}$ est définie pour chaque vecteur, est bijective et préserve la structure. QED

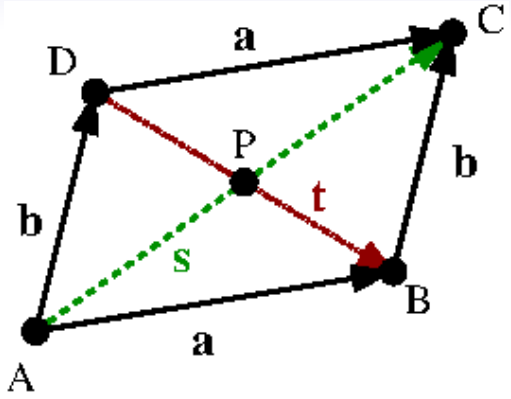
☞ ainsi, on a un lien important entre la géométrie et l'algèbre DESCARTES

Exemple: utilité de relier les opérations vectorielles aux figures géométriques

* construire le parallélogramme ABCD

ses diagonales sont reliées aux vecteurs $\boldsymbol{a} \not\parallel \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{s} = \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad , \quad \boldsymbol{t} = \overrightarrow{DB} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$$



Proposition: *Les deux diagonales $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ s'entrecoupent en leurs milieux.*

Démonstration: un point sur la diagonale $\overline{AC}$ a le vecteur de position origine à A

$$\lambda \overrightarrow{AC} = \lambda \boldsymbol{s} = \lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad \text{(P1)}$$

et un point sur la diagonale $\overline{DB}$ a le vecteur de position

$$\boldsymbol{b} + \mu \overrightarrow{DB} = \boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{t} = \boldsymbol{b} + \mu(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \quad , \quad 0 \leq \mu \leq 1 \qquad \text{(P2)}$$

Les deux diagonales s'entrecoupent ssi $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \stackrel{!}{=} \boldsymbol{b} + \mu(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$. Car les vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sont linéairement indépendants, on peut comparer leurs coéfficients. Ceci donne

$$\boxed{\lambda = \mu \quad , \quad \lambda = 1 - \mu} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \mu = \tfrac{1}{2} \quad \text{fixe un seul point P}$$

Le point P donné par $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ est au milieu des segments $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$. QED

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Vektor, *m*	vecteur, *m*
Vektorraum, *m*	espace vectoriel, *m*
Untervektorraum, *m*; Unterraum, *m*	sous-espace vectoriel, *m*
Skalar, *m*	scalaire, *m*
Dreiecksungleichgung, *f*	inégalité du triangle, *f*
Gruppe, *f*	groupe, *m*
Untergruppe, *f*	sous-groupe, *m*
linear unabhängig	linéairement indépendant
linear abhängig	linéairement dépendant
umkehrbar eindeutig; bijektiv	biunivoque; bijectif
eindeutig; injektiv	univoque; injectif
Isomorphismus, *m*	isomorphisme, *m*
isomorph	isomorphe
Strecke, *f*	segment, *m*
Gerade, *f*	droite, *f*
sich schneiden	s'entrecouper
Mittelpunkt, *m*	milieu, *m*
genau dann, wenn	si et seulement si (souvent abregé en: ssi)

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

COURS III/ VORLESUNG III

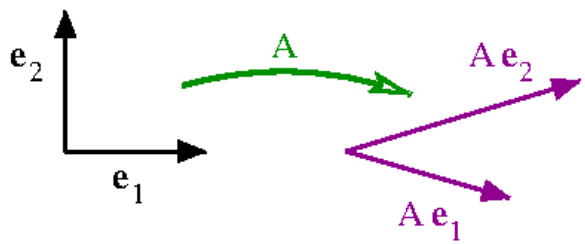
3. Applications linéaires

Définition: *Soient V, W des espaces vectoriels et $A : V \to W$ une application. A est* **linéaire**, *si* $\forall x, y \in V$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{(i)}\ \ A(x+y) = Ax + Ay \ \ , \ \ \text{(ii)}\ \ A(\alpha\, x) = \alpha\, Ax}$$

Exemples: **1)** soit $V = W \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}^2$ et soit $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de V. Si A est linéaire, on a les 2 vecteurs

$$A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \ \ , \ \ A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$



on peut donc associer à l'application linéaire $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

en écrivant

$$A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \ \ , \ \ A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

en général, $\boldsymbol{v} \in V \stackrel{\wedge}{=} \mathbb{R}^2$ s'écrit $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, donc

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

ceci donne la *règle comment multiplier une matrice avec un vecteur* (pour $\mathbb{R}^2$)

2) Soient $U = V = W \stackrel{\wedge}{=} \mathbb{R}^2$ et $A : U \to V$ et $B : V \to W$ linéaires.
Donc l'application $C := BA : U \to W$ est linéaire, car

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad C(x+y) &= B\big(A(x+y)\big) = B\big(Ax + Ay\big) = BAx + BAy = Cx + Cy \\ \text{(ii)} \quad C(\alpha x) &= B\big(A(\alpha x)\big) = B\big(\alpha Ax\big) = \alpha BAx = \alpha Cx \end{aligned}$$

on associe des matrices à B et à A

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} \in U$, on a $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$

l'application de la règle ci-dessus donne

$$
\begin{aligned}
C\boldsymbol{v} &= B(A\boldsymbol{v}) = B\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11}\big(a_{11}x + a_{12}y\big) + b_{12}\big(a_{21}x + a_{22}y\big) \\ b_{21}\big(a_{11}x + a_{12}y\big) + b_{22}\big(a_{21}x + a_{22}y\big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \big(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}\big)x + \big(b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}\big)y \\ \big(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}\big)x + \big(b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}\big)y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

on le compare à la formule $C\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c_{11}x + c_{12}y \\ c_{21}x + c_{22}y \end{pmatrix}$ pour obtenir

$$
\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}
$$

ceci donne la *règle comment multiplier deux matrices $C = BA$* (pour $\mathbb{R}^2$)

3) Soient $V = W = \mathbb{R}^d$, $A : V \to W$ linéaire et $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On associe à l'application A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

où $A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{d1} \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{d2} \end{pmatrix}$, $\ldots$, $A\boldsymbol{e}_d = \begin{pmatrix} a_{1d} \\ a_{2d} \\ \vdots \\ a_{dd} \end{pmatrix}$ sont les images des $\boldsymbol{e}_i$

Si $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + v_d\boldsymbol{e}_d$, avec $v_i \in \mathbb{R}$

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1d}v_d \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2d}v_d \\ \vdots \\ a_{d1}v_1 + a_{d2}v_2 + \ldots + a_{dd}v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{d} a_{1i}v_i \\ \sum_{i=1}^{d} a_{2i}v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{d} a_{di}v_i \end{pmatrix}$$

ce qu'on peut aussi écrire en notation des composantes

$$\boxed{(Av)_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ji}v_i \quad ; \quad j = 1, \ldots d}$$

règle sur la multiplication
d'une matrice avec un vecteur

$$(Av)_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ji} v_i \quad ; \quad j = 1, \dots d$$

de même, si B est
application linéaire

$$(BA\,v)_k = \sum_{j=1}^{d} b_{kj} (Av)_j = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} b_{kj} a_{ji}\, v_i \quad ; \quad k = 1, \dots d$$

ou encore, directement pour les matrices $(BA)_{ki} = \sum_{j=1}^{d} b_{kj} a_{ji}$

si l'on veut écrire pour les matrices $d \times d$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1d} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d1} & b_{d2} & \cdots & b_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdots & \\ \cdot & c_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdot & \cdots & \end{pmatrix}$$

p.ex. $c_{22} = b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22} + \ldots + b_{2d} a_{d2}$

règle: **ligne** $*$ **colonne** du produit matriciel Zeile $*$ Spalte

4) Soit $I = [-1,1] \subset \mathbb{R}$ et $C^0(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} |\, f \text{ continû sur } I \}$.

en analyse mathématique on démontre qu'alors f est borné sur I, c.à.d. $|f(x)| \leq M \; \forall x \in I$.

L'opérateur $A : C^0(I) \to C^0(I)$, $\big(Af\big)(x) := \int_{-1}^{x} \mathrm{d}y \; f(y)$ est linéaire, car

$$\big(A(f+g)\big)(x) = \int_{-1}^{x} \mathrm{d}y \; \big(f(y)+g(y)\big) = \int_{-1}^{x} \mathrm{d}y \; f(y) + \int_{-1}^{x} \mathrm{d}y \; g(y) = \big(Af\big)(x) + \big(Ag\big)(x)$$

$$\big(A(\alpha f)\big)(x) = \int_{-1}^{x} \mathrm{d}y \; \alpha f(y) = \alpha \int_{-1}^{x} \mathrm{d}y \; f(y) = \alpha \big(Af\big)(x)$$

Un **opérateur** renvoie une fonction f sur une autre fonction.

5) Soit $I = [-1,1] \subset \mathbb{R}$ et
$C^1(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} |\, f \text{ continûment dérivable sur } I \}$.

L'opérateur $A : C^1(I) \to C^0(I)$, $\big(Af\big)(x) := f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$
est linéaire, car

$$\begin{aligned} \big(A(f+g)\big)(x) &= \big(f+g\big)'(x) = f'(x) + g'(x) = \big(Af\big)(x) + \big(Ag\big)(x) \\ \big(A(\alpha f)\big)(x) &= \big(\alpha f\big)'(x) = \alpha f'(x) = \alpha \big(Af\big)(x) \end{aligned}$$

N.B.: prendre la primitive ou la dérivée d'une fonction est une opération linéaire.

Proposition: *Soit V un ensemble et soient f, g des applications bijectives $V \to V$. L'ensemble de telles applications est un groupe sous l'opération de composition*

$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) \;\; ; \;\; \forall x \in V$$

Démonstration: (i) l'ensemble est fermé, car si f, g sont bijectives, leur composition $g \circ f$ l'est aussi, car $x \overset{f}{\mapsto} x' \overset{g}{\mapsto} x''$ et à chaque x correspond exactement un x''.

(ii) $\big(h\circ(g\circ f)\big)(x) = h\big(g\circ f\big)(x) = h\big(g(f(x))\big) = \big(h\circ g\big)(f(x)) = \big((h\circ g)\circ f\big)(x)$

(iii) élément neutre $n : V \to V$ tel que $x \mapsto n(x) = x \Rightarrow \big(f \circ n\big)(x) = f(n(x)) = f(x)$

(iv) éléments inverses: à chaque f on associe son (unique) inverse f^{-1}. Alors

$$\big(f\circ f^{-1}\big)(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x = n(x) \qquad \text{QED}$$

Corollaire: *Les matrices associées aux applications linéaires bijectives (c.à.d. avec inverses) forment un groupe, avec la multiplication des matrices.*

Démonstration: Il suffit de vérifier la linéarité de la composition

$$\begin{aligned} \big(g \circ f\big)(x+y) &= g\big(f(x+y)\big) = g\big(f(x)+f(y)\big) = g\big(f(x)\big) + g\big(f(y)\big) \\ &= \big(g \circ f\big)(x) + \big(g \circ f\big)(y) \\ \big(g \circ f\big)(\alpha x) &= g\big(f(\alpha x)\big) = g\big(\alpha f(x)\big) = \alpha g\big(f(x)\big) = \alpha\big(g \circ f\big)(x) \end{aligned}$$

et les autres propriétés ont déjà été établies ci-dessus. QED

on considère des applications linéaires $A, B, C : V \to V$, avec $V = \mathbb{R}^d$.
On a les propriétés élémentaires du produit matriciel

(i) associativé $A(BC) = (AB)C$ déjà démontré

(ii) distributivité $A(B + C) = AB + AC$ calcul facile

(iii) non commutativité $AB \neq BA$

contre-exemple: soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq AB$$

(iv) absence de division $AB = 0$ n'implique point $A = 0$ ou $B = 0$

contre-exemple: $$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Définition: *Si V est espace vectoriel, et $A : V \to V$ est linéaire et bijective, il existe une* **inverse** *linéaire $A^{-1} : V \to V$. On y associe une matrice A^{-1} telle que*

$$\boxed{A\,A^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}}$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice associée à l'identité $1 : V \to V$ et $\mathbf{1}x = x$. On appelle A^{-1} *la* **matrice inverse** *de la matrice A.*

N.B.: si $V \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}^d$, on écrit $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ (matrice d'unité). On a toujours $A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A$.

Proposition: *On a la formule pour les inverses*

$$\boxed{\big(AB\big)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}}$$

Démonstration: $\big(AB\big)\big(B^{-1}A^{-1}\big) = A\big(BB^{-1}\big)A^{-1} = AA^{-1} = \mathbf{1}$. Donc $B^{-1}A^{-1}$ est bien l'inverse de AB. QED

Proposition: *Pour l'inverse double* $\boxed{\big(A^{-1}\big)^{-1} = A}$.

Démonstration: Évident, car l'inverse de A^{-1} est A. QED

4. Équations linéaires I

Exemple: souvent on a affaire aux systèmes d'équations linéaires, comme

$$\begin{aligned} 2x \qquad - \; z &= 2 \\ 6x + 5y + 3z &= 7 \\ 2x - y \qquad\quad &= 4 \end{aligned}$$

on peut le rendre sous forme matricielle comme suit

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \quad \text{si } A^{-1} \text{ existe}$$

N.B.: on a 3 équations pour 3 variables $\Rightarrow$ on s'attend à une solution unique (non nulle)

? comment résoudre de telles équations ?

N.B.: il n'existe (presque) pas de formules simples pour le calcul de A^{-1}, hélas !

Méthode 1: réduction

on écrit les équations

$$\begin{aligned} 2x \quad\quad - \; z &= 2 \\ 6x + 5y + 3z &= 7 \\ 2x - y \quad\quad &= 4 \end{aligned}$$

on écrit une matrice (non quadratique)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

soustraire $3\times$ la 1ere éq. de la 2e éq.

$$\begin{aligned} 2x \quad\quad - \; z &= 2 \\ 5y + 6z &= 1 \\ 2x - y \quad\quad &= 4 \end{aligned}$$

soustraire $3\times$ la 1ere ligne de la 2e ligne

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

soustraire la 1ere éq. de la 3e éq.

$$\begin{aligned} 2x \quad\quad - \; z &= 2 \\ 5y + 6z &= 1 \\ -y + \; z &= 2 \end{aligned}$$

soustraire la 1ere ligne de la 3e ligne

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

échanger les 2e et 3e éqs.

$$\begin{aligned} 2x \quad - \quad z &= 2 \\ -y + \quad z &= 2 \\ 5y + 6z &= 1 \end{aligned}$$

ajouter 5$\times$ la 2e éq. à la 3e éq.

$$\begin{aligned} 2x \quad - \quad z &= 2 \\ -y + \quad z &= 2 \\ 11z &= 11 \end{aligned}$$

diviser la 3e éq. par 11

$$\begin{aligned} 2x \quad - \quad z &= 2 \\ -y + \quad z &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

échanger les 2e et 3e lignes

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

ajouter 5$\times$ la 2e ligne à la 3e ligne

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

diviser la 3e ligne par 11

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a obtenu les structures suivantes:

$$\begin{array}{rrcl} 2x & - z & = & 2 \\ & -y + z & = & 2 \\ & z & = & 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c|c|cc} 2 & 0 & -1 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

reconnaître l'escalier bleu

$\Rightarrow$ c'est fini !

☞ *on peut maintenant lire la solution*:

de la 3e équation/ligne: directement $\boxed{z = 1}$

injecter ce résultat dans la 2e éq./ligne: $-y + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{y = -1}$

injecter ces résultats dans la 1ere éq./ligne: $2x - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$

cette méthode s'appelle **l'élimination de Gauss**

N.B.: sur les matrices (à droite) les opérations suivantes sont admissibles

(a) échanger 2 lignes

(b) multiplier une ligne par une constante (non nulle !)

(c) ajouter un multiple d'une ligne à une autre

5. Déterminants

on associe à chaque matrice $d \times d$, provenant de l'application $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, un nombre, le **déterminant**, écrit $\det A$.

(i) matrices 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det A = ad - bc$$

(ii) matrices 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

5. Déterminants

on associe à chaque matrice $d \times d$, provenant de l'application $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, un nombre, le **déterminant**, écrit $\det A$.

(i) matrices 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\det A = ad - bc}$$

(ii) matrices 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

les diagonales descendent: positif !

premières contributions à $\det A$:

$\det A = a\,e\,i + d\,h\,c + g\,b\,f + \ldots$

5. Déterminants

on associe à chaque matrice $d \times d$, provenant de l'application $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, un nombre, le **déterminant**, écrit $\det A$.

(i) matrices 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\det A = ad - bc}$$

(ii) matrices 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

les diagonales montent: négatif !

premières et secondes contributions à $\det A$:

$\det A = a\,e\,i + d\,h\,c + g\,b\,f - h\,f\,a - d\,b\,i - g\,e\,c$

5. Déterminants

on associe à chaque matrice $d \times d$, provenant de l'application $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, un nombre, le **déterminant**, écrit $\det A$.

(i) matrices 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\det A = ad - bc}$$

(ii) matrices 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\det A = aei + bfg + dhc - gec - hfa - dbi}$$

encore une fois, avec une autre notation habituelle

(i) matrices 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(ii) matrices 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - gec - hfa - dbi$$

voir le site `https://www.dcode.fr/determinant-matrice` pour le calcul en ligne des déterminants

(iii) développement des **mineurs**: formule de Laplace

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-7) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Règle: * on effectue une expansion le long d'une ligne ou d'une colonne.
(dans l'exemple, c'est pour la 1ere colonne)

* Pour chaque élément du développement, on barre les éléments de la matrice dans la même ligne ou dans la même colonne.
* Les éléments du développement sont écrits en préfacteur, avec des signes en alternance.
* Les éléments non barrés (ici en noir) forment un **mineur** ou sous-déterminant 2×2 qu'on calcule 'normalement'.

(iii) développement des **mineurs**: formule de Laplace

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-7) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Exemples:

pour l'élément $a_{11} = 1$, le mineur est $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

pour l'élément $a_{21} = 7$, le mineur est $M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

pour l'élément $a_{31} = 2$, le mineur est $M_{31} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

(iii) développement des **mineurs**: formule de Laplace

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-7) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

notation symbolique

ne s'écrit **pas** !

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (15 - 4) - 7 \cdot (-25 - 2) + 2 \cdot (-20 - 6) = 148$$

en général, la *formule de Laplace* affirme, pour les matrices 3×3

$$\det A = a_{11} M_{11} - a_{21} M_{21} + a_{31} M_{31}$$

formes alternatives, p.ex.:

$$\det A = -a_{21} M_{21} + a_{22} M_{22} - a_{23} M_{23} = -7 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

ou encore

$$\det A = a_{13} M_{13} - a_{23} M_{23} + a_{33} M_{33} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

(iv) la formule de Laplace est le seul moyen pour trouver les déterminants plus grands, p.ex. 4×4:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = a_{11} M_{11} - a_{21} M_{21} + a_{31} M_{31} - a_{41} M_{41}$$

$$= +3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} +(-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

où les éléments de la première colonne sont indiqués.

Dans l'application de cette règle, les signes sont donnés selon le schéma suivant

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \ddots \\ - & + & - & + & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}$$

N.B.: calculer les déterminants $n \times n$ pour $n \gg 1$ est très fastidieux . . . et susceptible aux erreurs . . .

Règles de manipulation des déterminants

1) si chaque élément d'une ligne (ou d'une colonne) est multiplié avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\det A \mapsto \alpha \det A$

$$\det \begin{pmatrix} 3 \cdot x & 3 \cdot y \\ 3 \cdot z & 0 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{pmatrix} x & y \\ 3z & 0 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{pmatrix} x & 3y \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

2) si l'on échange deux lignes (ou deux colonnes), le déterminant change le signe, alors $\det A \mapsto -\det A$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & c \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} b & a \\ c & 2a \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2a & c \\ a & b \end{pmatrix}$$

3) si l'on additonne à chaque élément d'une ligne (ou d'une colonne) le même multiple d'une autre ligne (d'une autre colonne), le déterminant ne change pas, $\det A \mapsto \det A$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}}_{\text{addition de } 2\times \text{ de la } 1^{\text{ere}} \text{ colonne à la } 2^{e}} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}}_{\text{addition de } (-5)\times \text{ de la } 1^{\text{ere}} \text{ ligne à la } 2^{e}}$$

Exemple d'application: calculons

action pour arriver à droite
action pour arriver à gauche

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

échanger colonnes 1 & 4

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

extraire facteur 2 de 3e colonne
ligne 2 + $(-3)\times$ ligne 1 $\mapsto$ ligne 2

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

ligne 3 + $(-1)\times$ ligne 1 $\mapsto$ ligne 3
développer en 1ere colonne

$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

extraire facteur -1 de 1ere colonne
échanger colonnes 1 & 2

↙ ligne 2 + $(-1)\times$ ligne 1 $\mapsto$ ligne 2 ↙ ligne 3 + $(-2)\times$ ligne 1 $\mapsto$ ligne 3

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 9 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = -2(9+9) = -36$$

COURS IV/ VORLESUNG IV

Rappel: application linéaire $A : V \to V$ sur un espace vectoriel V

$$\boxed{\text{(i)}\ \ A\big(x+y\big) = Ax + Ay \ \ , \ \ \text{(ii)}\ \ A\big(\alpha\, x\big) = \alpha\, Ax} \qquad \forall x, y \in V$$

si $V = \mathbb{R}^d$, on peut associer à chaque application A une matrice $d \times d$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} \quad ; \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

règle sur la multiplication d'une matrice avec un vecteur

$$\boxed{\big(Av\big)_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ji}\, v_i \ \ ; \ \ j = 1, \ldots d}$$

de même, si B est application linéaire

$$\boxed{\big(BA\, v\big)_k = \sum_{j=1}^{d} b_{kj} \big(Av\big)_j = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} b_{kj}\, a_{ji}\, v_i \ \ ; \ \ k = 1, \ldots d}$$

de même, si B est application linéaire

$$\left(BA\,v\right)_k = \sum_{j=1}^{d} b_{kj}\left(Av\right)_j = \sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d} b_{kj}a_{ji}\right) v_i \quad ; \quad k = 1,\dots d$$

ceci donne, directement pour les matrices $\left(BA\right)_{ki} = \sum_{j=1}^{d} b_{kj}a_{ji}$

et explicitement pour le produit de deux matrices $d \times d$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1d} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d1} & b_{d2} & \cdots & b_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & a_{13} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & \cdot & a_{23} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \cdot & a_{d3} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \\ \cdot & \cdot & c_{23} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \end{pmatrix}$$

p.ex. $c_{23} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + \ldots + b_{2d}a_{d3}$

règle: **ligne** $*$ **colonne** du produit matriciel — Zeile $*$ Spalte

☞ application aux équations linéaires $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ — A, $\boldsymbol{b}$ donnés, $\boldsymbol{x}$ recherché

☞ le déterminant $\det A = |A|$ comme outil de calcul

6. Équations linéaires II

Méthode 2: règle de Cramer (*Cramer'sche Regel)*

illustration de l'idee à titre d'exemple: considérons le système

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

(multiplier la 1ere éq. avec b_2, et la 2e avec b_1 puis soustraire les 2 éqs. $\Rightarrow$ obtenir x)

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

N.B.: évidemment, il faut que le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$ équations indépendantes

Règle: la solution s'écrit comme le quotient de deux déterminants. Au dénominateur, on a le déterminant formé des coefficients de la matrice associée au système d'équations. Au numérateur, on remplace la colonne respective par le vecteur à droite de l'équation.

la règle de Cramer s'étend directement à n équations linéaires en n variables

l'effort de calcul peut être mesuré en comptant le nombre d'opérations requis

n	1	2	3	4	5	6
Gauss $\sim n^3$	1	8	27	64	125	216
Cramer $\sim n!$	1	2	6	24	120	720

☞ pour $n \gg 1$, la règle de Cramer devient très inefficace . . .

Exemple: résolvons $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(i) on calcule le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow$ une solution existe

(ii) on trouve $x = \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \dfrac{-6-15}{-7} = \dfrac{-21}{-7} = 3$

(iii) on trouve $y = \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \dfrac{10-3}{-7} = \dfrac{7}{-7} = -1$

Théorème: (FREDHOLM) *Soit V espace vectoriel,* $\dim V = n$, $b \in V$ *et* $A : V \to V$ *linéaire. Alors une de deux alternatives est valable:*

(1) $Ax = 0$ *a la seule solution* $x = 0$. *Alors* $Ax = b$ *a une solution unique* $x \in V$.

(2) $Ax = 0$ *a des solutions* $x \neq 0$. *Alors il existe* $b \neq 0$ *tel que* $Ax = b$ *n'a pas de solution.*

pour $V \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}^n$ avec $n < \infty$, ceci est assez évident:
(i) si $\det A = |A| \neq 0$, alors A^{-1} existe et $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ est bien unique.
(ii) en revanche, si $\det A = |A| = 0$, les équations ne sont pas indépendantes et on a une solution $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, mais A^{-1} n'existe pas.

N.B.: cette alternative de Fredholm devient non triviale pour $n = \infty$.

$\Rightarrow$ importance de la consideration, au préalable, des solutions de l'équation homogène $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ pour l'éventuelle existence des solutions de l'équation inhomogène $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

pour $V \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}^n$, critère pratique: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ existe

Illustration: exemples de l'équation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dans $V = \mathbb{R}^2$

Exemple 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. ☞ Car $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, la matrice A n'a pas d'inverse.

On résout $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$. ☞ équation d'une droite

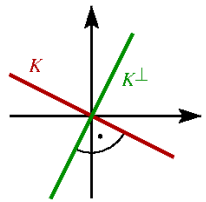
Définition: *Le* **noyau de** A *est l'espace vectoriel des solutions de* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. *On écrit* $\mathrm{Ker}A$.

Dans l'exemple spécifique: $K := \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \boldsymbol{v} = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. $\Rightarrow \dim K = 1$

On calcule le **complément orthogonal de** K: $K^\perp := \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \text{ où } \boldsymbol{k} \in K \right\}$.

Dans l'exemple spécifique: $0 \overset{!}{=} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} = -2v_1 + 1v_2$ avec $\boldsymbol{k} \in K \Rightarrow v_2 = 2v_1$

donc $K^\perp = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \boldsymbol{v} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$



☞ Pour l'équation inhomogène $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, il faut distinguer deux cas:

(i) $\boldsymbol{b} \in K^\perp$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ une seule condition $x = 1 - 2y$ ☞ infinité de solutions

(ii) $\boldsymbol{b} \in K$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -2 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \overset{?}{=} 5$ ☞ aucune solution

Exemple 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. ☞ Car $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, la matrice inverse A^{-1} existe.

On résout $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0.$

Car $K := \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \{\boldsymbol{0}\}$, on a $K^\perp = \mathbb{R}^2 = V$.

$\Rightarrow$ pour tout $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$, solution unique $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Dans l'exemple spécifique: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{b}$ **solution unique**

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

lineare Abbildung, *f*	application linéaire, *f*
Matrix, *f* (Pl. Matrizen)	matrice, *f*
Untermatrix, *f*	sous-matrice, *f*
Einheitsmatrix, *f*	matrice d'unité, *f*
Determinante, *f*	déterminant, *m*
Unterdeterminante, *f*; Kofaktor, *m*	mineur, *m*
Nenner, *m*	dénominateur, *m*
Zähler, *m*	numérateur, *m*
Bruch, *m*	quotient, *m*
rationale/reelle Zahl, *f*	nombre rationnel/réel, *m*
ganze/natürliche Zahl, *f*	nombre relatif/naturel, *m*
Kern, *m*	noyau, *m*

le genre grammatical (*m,f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

7. Produit scalaire et longueurs

Définition: *Soit V espace vectoriel. Une application $\langle \ | \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ est un* **produit scalaire** *(réel) si $\forall x, y, z \in V$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*

(i) $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$
$\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$

(ii) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$

(iii) $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha \langle x|y\rangle$
$\langle x|\alpha y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$

(iv) $\langle x|x\rangle \geq 0$
$\langle x|x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Une application $V \times V \to \mathbb{R}$ avec les propriétés (i), (iii) s'appelle **bi-linéaire**.

7. Produit scalaire et longueurs

Définition: *Soit V espace vectoriel. Une application $\langle\ |\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ est un* **produit scalaire** *(complexe) si $\forall x, y, z \in V$ et $\forall \alpha \in \mathbb{C}$*

(i) $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$
$\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$

(ii) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle^*$

(iii) $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha^* \langle x|y\rangle$
$\langle x|\alpha y\rangle = \alpha \langle x|y\rangle$

(iv) $\langle x|x\rangle \geq 0$
$\langle x|x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Une application $V \times V \to \mathbb{C}$ avec les propriétés (i), (iii) s'appelle **bi-linéaire**.

Pour un produit scalaire complexe, le **conjugué complexe** d'un nombre complexe $\alpha = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$ est $\alpha^* := u - \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$. On a $\alpha^{**} = \alpha$ et $\alpha^* \alpha = |\alpha|^2$.

N.B.: notre définition du produit scalaire complexe utilise la définition habituelle en physique; les livres de mathématiques écrivent le contraire: $\langle x|\alpha y\rangle = \alpha^* \langle x|y\rangle$ et $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha \langle x|y\rangle$

7. Produit scalaire et longueurs

Définition: *Soit V espace vectoriel. Une application $\langle \ | \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ est un* **produit scalaire** *si $\forall x, y, z \in V$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*

(i) $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$
$\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$

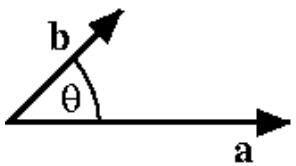
(ii) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$

(iii) $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$
$\langle x|\alpha y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$

(iv) $\langle x|x\rangle \geq 0$
$\langle x|x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Une application $V \times V \to \mathbb{R}$ avec les propriétés (i), (iii) s'appelle **bi-linéaire**.

Exemples: **1)** les flèches indiennes



on écrit $\langle a|b\rangle = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ utilisation du produit $\cdot$

géométriquement $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\theta$

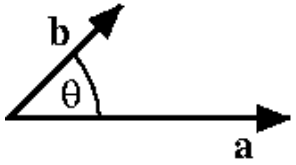
(avec a: longueur du vecteur $\boldsymbol{a}$)

2) les vecteurs $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$

Rappel: isomorphie avec les flèches indiennes

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \qquad \langle a|b\rangle = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{d} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_d b_d$$

Exemples: **1)** les flèches indiennes



on écrit $\langle a | b \rangle = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ utilisation du produit ·

géométriquement $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos\theta$

(avec a: longueur du vecteur $\boldsymbol{a}$)

2) les vecteurs $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$

Rappel: isomorphie avec les flèches indiennes

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \qquad \langle a | b \rangle = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{d} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_d b_d$$

pour $a \in \mathbb{C}^d$ complexe, on aurait à la place $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{d} a_i^* b_i$

3) Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalle, et $f \in C^0(I)$ $\quad (f : I \to \mathbb{R})$.
Un produit scalaire s'écrit

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \, f(x)^* g(x)$$

N.B.: pour les cas des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$ avec valeurs complexes, la généralisation nécessaire du produit scalaire est indiquée.

Théorème: (inégalité de SCHWARZ) *Si V est espace vectoriel et $x, y \in V$*

$$\boxed{|\langle x|y\rangle| \leq \sqrt{\langle x|x\rangle \langle y|y\rangle}}$$

Démonstration: Si $y = 0$, le résultat est trivial. Étudions le cas $y \neq 0$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, (ou $\mathbb{C}$) on a

$$0 \leq \langle x + \alpha y | x + \alpha y\rangle = \langle x|x\rangle + \alpha^* \langle y|x\rangle + \alpha \langle x|y\rangle + |\alpha|^2 \langle y|y\rangle$$

On peut minimiser le cotè droit par rapport à α. En particulier, on peut poser

$$\alpha = -\frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle} \quad ; \quad \text{admissible, car } y \neq 0$$

Ainsi, on trouve

Rappel: $\langle y|x\rangle = \langle x|y\rangle^*$

$$0 \quad \leq \quad \langle x|x\rangle - \frac{\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle}\langle y|x\rangle \underbrace{- \frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle}\langle x|y\rangle + \frac{\langle y|x\rangle\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle^2}\langle y|y\rangle}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle - \langle x|y\rangle\langle y|x\rangle = \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle - |\langle x|y\rangle|^2$$

ce qui est équivalent à l'affirmation. QED

Corollaire: *La* **longueur** $\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$ *d'un vecteur* $x \in V$ *obéit aux trois axiomes d'une* **norme**, $\forall x, y \in V$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*)*

(i)	$\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$	
(ii)	$\|\alpha\, x\| = \|\alpha\|\, \|x\|$	
(iii)	$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$	inégalité du triangle

Démonstration: (i) est identique à l'axiome (iv) du produit scalaire.

Pour voir (ii): $\|\alpha\, x\| = \sqrt{\langle \alpha x|\alpha x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x|x\rangle} = |\alpha|\, \|x\|$.

Pour voir (iii), on tire de Schwarz $\langle x|y\rangle \leq |\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\, \|y\|$. Avec cette borne, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x+y\|^2 = \langle x+y|x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \underbrace{\langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle} + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + \quad 2 \quad \|x\|\, \|y\| \quad + \|y\|^2 \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 \end{aligned}$$

et on prend la racine des deux cotés. QED

N.B.: *inégalités de Schwarz et du triangle vraies en tout espace vectoriel avec produit scalaire.*

en guise d'application: utiliser ces inégalités pour définir des nouveaux espaces vectoriels

Exemples:

4) Soit $\ell^2 := \{\text{suites } (a_1, a_2, \ldots) | \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty, a_i \in \mathbb{C}\}$. On définit l'addition vectorielle et la multiplication avec un scalaire $\alpha \in \mathbb{C}$

$$a + b := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots) \quad , \quad \alpha\, a := (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots) \qquad (\ell^2)$$

mais il faut **démontrer** que $a + b \in \ell^2$ si $a \in \ell^2$ et $b \in \ell^2$!

Pourquoi: il faut s'assurer que la somme infinie $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^2$ converge !

Afin de le voir, on introduit d'abord un produit scalaire

$$\langle a|b\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* b_i \quad \Rightarrow \quad \|a\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \overset{!}{<} \infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{a \in \ell^2 \Leftrightarrow \|a\| < \infty}$$

* D'abord, de l'inégalité de Schwarz $\left|\langle a|b\rangle\right| \leq \|a\|\,\|b\| < \infty$, le produit scalaire existe
* Inégalité du triangle: $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| < \infty \quad \Rightarrow \quad a + b \in \ell^2$
* De plus: $\|\alpha\, a\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha\, a_i|^2 = |\alpha|^2 \|a\|^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \alpha\, a \in \ell^2$

$\Rightarrow$ L'ensemble ℓ^2 avec les opérations (ℓ^2) est un espace vectoriel.

☞ $\boxed{\ell^2 \triangleq \mathbb{C}^\infty \text{ est espace vectoriel avec produit scalaire}}$, et $\dim \ell^2 = \infty$.

notons explicitement les inégalités de Schwarz et du triangle pour ℓ^2

- inégalité du triangle $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2\right)^{1/2}$$

☞ **inégalité de Minkowski**

- inégalité de Schwarz $\left|\langle a|b\rangle\right| \leq \|a\|\,\|b\|$

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i^* b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2\right)^{1/2}$$

☞ **inégalité Cauchy-Schwarz**

des inégalités classiques de l'analyse mathématique sont réproduites (et démontrées !)

5) Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ intervalle et $L^2 = L^2(I) := \{f : I \to \mathbb{R} | \int_a^b \mathrm{d}x\, |f(x)|^2 < \infty\}$

On définit l'addition vectorielle et la multiplication avec un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \ , \ (\alpha f)(x) := \alpha f(x) \qquad (L^2)$$

mais il faut **démontrer** que $f+g \in L^2$ si $f \in L^2$ et $g \in L^2$!

Pourquoi: il faut s'assurer que l'intégrale $\int_a^b \mathrm{d}x\, |f(x)+g(x)|^2$ converge !

Afin de le voir, on introduit d'abord un produit scalaire

$$\langle f|g\rangle := \int_a^b \mathrm{d}x\, f^*(x)g(x) \ \Rightarrow \ \|f\|^2 = \int_a^b \mathrm{d}x\, |f(x)|^2 \overset{!}{<} \infty \ \Rightarrow \ \boxed{f \in L^2 \Leftrightarrow \|f\| < \infty}$$

* D'abord, de l'inégalité de Schwarz $|\langle f|g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\| < \infty$, le produit scalaire existe
* Inégalité du triangle: $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| < \infty \quad \Rightarrow \quad f+g \in L^2$
* De plus: $\|\alpha f\|^2 = \int_a^b \mathrm{d}x\, |\alpha f(x)|^2 = |\alpha|^2 \|f\|^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \alpha a \in L^2$

$\Rightarrow$ L'ensemble $L^2(I)$ avec les opérations (L^2) est un espace vectoriel.

☞ $\boxed{L^2(I) \text{ est espace vectoriel avec produit scalaire}}$, et $\underline{\dim L^2(I) = \infty}$.

☞ deux types d'espace vectoriel de dimension infinie: ℓ^2 discrète et $L^2(I)$ continue
ces genres d'espace vectoriel sont requis en mécanique quantique

notons explicitement les inégalités de Schwarz et du triangle pour $L^2([a,b])$

où $-\infty \leq a < b \leq \infty$ sont admissibles

- inégalité du triangle $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$$\left(\int_a^b \mathrm{d}x \left|f(x)+g(x)\right|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b \mathrm{d}x \left|f(x)\right|^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b \mathrm{d}x \left|g(x)\right|^2\right)^{1/2}$$

☞ **inégalité de Minkowski**

- inégalité de Schwarz $\left|\langle f|g\rangle\right| \leq \|f\|\,\|g\|$

$$\left|\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)^* g(x)\right| \leq \left(\int_a^b \mathrm{d}x \left|f(x)\right|^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b \mathrm{d}x \left|g(x)\right|^2\right)^{1/2}$$

☞ **inégalité Cauchy-Schwarz**

des inégalités classiques de l'analyse mathématique sont réproduites (à très peu de frais)

8. Orthogonalité

Remarque: on appelle souvent un espace vectoriel V avec produit scalaire un **espace pré-Hilbert**.

Un **espace d'Hilbert** V doit en plus satisfaire le **Critère de Cauchy**:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n, m > N$: $\|f_n - f_m\| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n > N$: $\|f_n - f\| < \varepsilon$ avec $f \in V$

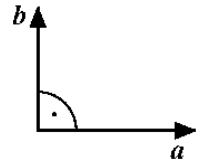
Un tel espace est **complet**. traité en analyse ou analyse fonctionelle

☞ *Les espaces $\mathbb{R}^d$, $C^0(I)$, ℓ^2, $L^2(I)$ sont tous des espaces d'Hilbert.*

N.B.: les physiciens se foutent souvent de cette terminologie précise et parlent d'espace d'Hilbert.

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert. Deux vecteurs $x, y \in V$ sont* **orthogonaux**, *si $\langle x|y\rangle = 0$.*

Exemples: **1)** les flèches indiennes
deux vecteurs orthogonaux ont un angle droit entre eux



$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$$

2) pour $\mathbb{R}^2$, condition d'orthogonalité $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ isomorphisme

3) soit $V = C^0([-\pi, \pi])$, et $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \sin x \cos x = 2 \underbrace{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}u\ u}_{=0} = 0 \qquad \begin{array}{l} u = \cos x \\ \mathrm{d}u = -\sin x\, \mathrm{d}x \end{array}$$

en alternative: $J = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \sin x \cos x = \underbrace{\sin x \sin x\big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \cos x \sin x = -J \Rightarrow J = 0.$

les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont orthogonales sur l'intervalle $I = [-\pi, \pi]$.

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert. Une base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ de V est* **orthogonale**, *si*

$$\langle \boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j\rangle = \begin{cases} a_i & ; \quad \text{si } i = j \\ 0 & ; \quad \text{sinon} \end{cases}$$

et elle est **orthonormée**, *si $a_i = 1$, donc $\langle \boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j\rangle = \delta_{ij}$.*

Si $v \in V$, on peut développer en un base orthonormée $v = \sum_i v_i \boldsymbol{e}_i$

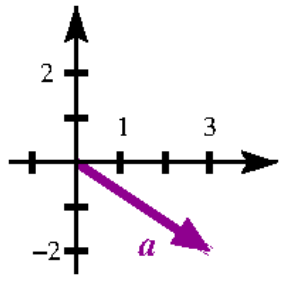
$$\Longrightarrow \quad \langle \boldsymbol{e}_j|v\rangle = \sum_i v_i \underbrace{\langle \boldsymbol{e}_j|\boldsymbol{e}_i\rangle}_{=\delta_{ji}} = v_j \quad \Longrightarrow \quad v = \sum_i \langle \boldsymbol{e}_i|v\rangle \boldsymbol{e}_i$$

Remarque: en mécanique quantique, on écrit les vecteurs (notation de Dirac) $|v\rangle \in V$, et le développement $|v\rangle = \sum_i |e_i\rangle\langle e_i|v\rangle$.

Exemples: **1)** $V = \mathbb{R}^2$, base orthonormée $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on a bien $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1$ et $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$

donc $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$ représentation géométrique standard



2) $V = \ell^2$ a les vecteurs de base orthonormée

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots) \quad , \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots) \quad , \quad \ldots$$

* on vérifie que $\langle e_i | e_i \rangle = 1$ et $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
* cette base contient une infinité d'éléments $\Rightarrow$ $\underline{\dim \ell^2 = \infty}$

développement de $a \in \ell^2$: $a = (a_1, a_2, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, e_i$

il s'agit de l'extension formelle du développement canonique en une base orthonormée de l'espace $\mathbb{R}^d$ vers la limite $d \to \infty$, et au complexe

à la louche/*sem cuidados* $\ell^2 \triangleq \mathbb{C}^\infty$

9. Unitarité et hermiticité

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert et $A : V \to V$ linéaire.*
L'application (linéaire) **adjointe** *$A^+ : V \to V$ est définie par*

$$\boxed{\langle A^+ x | y \rangle = \langle x | Ay \rangle}$$

N.B.: en physique, on écrit souvent $A^\dagger$ à la place de A^+.

Exemple 1: soit $V = \mathbb{R}^d$, et $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$.
De plus, on se rappelle $(Ay)_i = \sum_{j=1}^d a_{ij} y_j$. Ainsi, on a

$$\langle A^+ x | y \rangle = \sum_{i=1}^d (A^+ x)_i y_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a^+_{ij} x_j y_i = \sum_{i,j=1}^d x_i a^+_{ji} y_j$$

$$\langle x | Ay \rangle = \sum_{i=1}^d x_i (Ay)_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x_i a_{ij} y_j = \sum_{i,j=1}^d x_i a_{ij} y_j$$

comparaison des coefficients donne $a^+_{ji} = a_{ij}$.

si A a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2d} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

alors la matrice de A^+ est la **matrice transposée** de la matrice de A

$$A^+ = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{d1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{d2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1d} & a_{2d} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

très concrètement, dans $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^+ = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

N.B.: banalement, $A^{++} = \left(A^T\right)^T = A$

Exemple 2: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $V = C^1(I)$ l'espace des fonctions $I \to \mathbb{R}$ continûment dérivables sur I. Prenons l'opérateur linéaire $A : C^1(I) \to C^0(I)$

plus une condition de bord sur ∂I

$$(Af)(x) := \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \langle f | Ag \rangle = \int_I \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)g(x)\Big|_{\partial I} - \int_I \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} g(x)$$

admettons comme condition de bord que $f(x) \stackrel{!}{=} 0$ sur le bord ∂I.

$$\Rightarrow \quad \langle f | Ag \rangle = \int_I \mathrm{d}x \left(-\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right) g(x) \stackrel{!}{=} \langle A^+ f | g \rangle$$

et on identifie l'opérateur adjoint $(A^+ f)(x) = -\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -f'(x)$.

Notation: en mécanique quantique, $\langle f | Ag \rangle = \langle f | A | g \rangle$ est appelé *'élément de matrice'* de A.

Deux classes d'opérateurs ont un intérêt particulier:

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert et $A : V \to V$ linéaire et invertible.*
(i) A est **hermitique**, *si $A = A^+$. (ii) A est* **unitaire**, *si $A^{-1} = A^+$.*

Si A est unitaire, on peut écrire

$$\langle x|y\rangle = \langle x|\mathbf{1}y\rangle = \langle x|A^{-1}Ay\rangle = \langle x|A^+Ay\rangle = \langle Ax|Ay\rangle \qquad \text{(AU)}$$

Conséquences de (AU): (i) $\|x\|^2 = \langle x|x\rangle = \langle Ax|Ax\rangle = \|Ax\|^2$

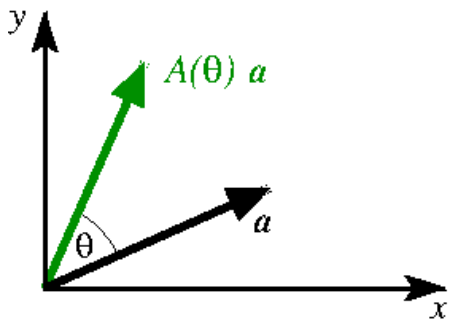
☞ *les opérateurs unitaires conservent les longueurs*

(ii) si $\langle x|y\rangle = 0 \quad \text{alors} \quad \langle Ax|Ay\rangle = 0$

☞ *les opérateurs unitaires conservent l'orthogonalité*

Exemple: opérateur/matrice unitaire en $\mathbb{R}^2$:
rotation par un angle θ (sens mathématique positif)

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



l'inverse $A^{-1}(\theta) = A(-\theta) = A^+(\theta)$

pour le voir formellement, on vérifie la propriété de groupe

$$
\begin{aligned}
A(\theta_1)A(\theta_2) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ -\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \\
&= A(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned}
$$

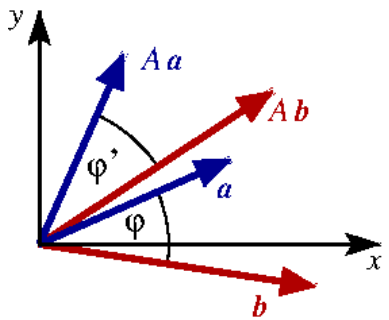
par conséquent $A(\theta)A(-\theta) = A(0) = \mathbf{1}$.

(iii) **Plus systématiquement**:
avec le produit scalaire, on peut définir un angle φ entre les vecteurs $a, b \in V$:

$$\langle a|b\rangle = \|a\|\,\|b\|\cos\varphi$$

de même, on définit un angle φ' entre les vecteurs Aa et $Ab \in V$:

$$\langle Aa|Ab\rangle = \|Aa\|\,\|Ab\|\cos\varphi'$$



la relation (AU), voir $\langle a|b\rangle = \langle Aa|Ab\rangle$, implique que $\boxed{\varphi = \varphi'}$

☞ *les opérateurs unitaires conservent les angles*

transformation **conforme**

COURS V/ VORLESUNG V

Rappels: Produit scalaire entre deux vecteurs $\langle x|y\rangle$, V devient espace pré-Hilbert

Norme $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ d'un vecteur $x \in V$

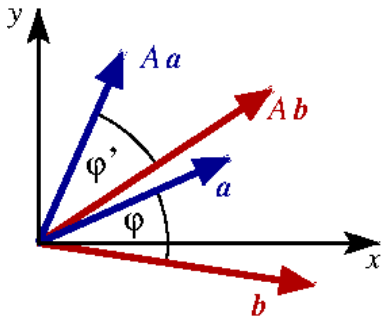
Inégalités: (i) Schwarz: $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ (ii) triangle: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

* Si V est espace pré-Hilbert et $A : V \to V$ linéaire, l'**application adjointe** $A^+ : V \to V$ est définie par $\langle A^+x|y\rangle = \langle x|Ay\rangle \ \forall x, y \in V$ $\Rightarrow A^+$ linéaire

si $V = \mathbb{R}^d$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2d} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^+ = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{d1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{d2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1d} & a_{2d} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$ matrice transposée

Cas spéciaux: (i) A **hermitique**, si $A = A^+$, (ii) A **unitaire**, si $A^{-1} = A^+$.

- si A est unitaire, on a $\langle x|y\rangle = \langle Ax|Ay\rangle$

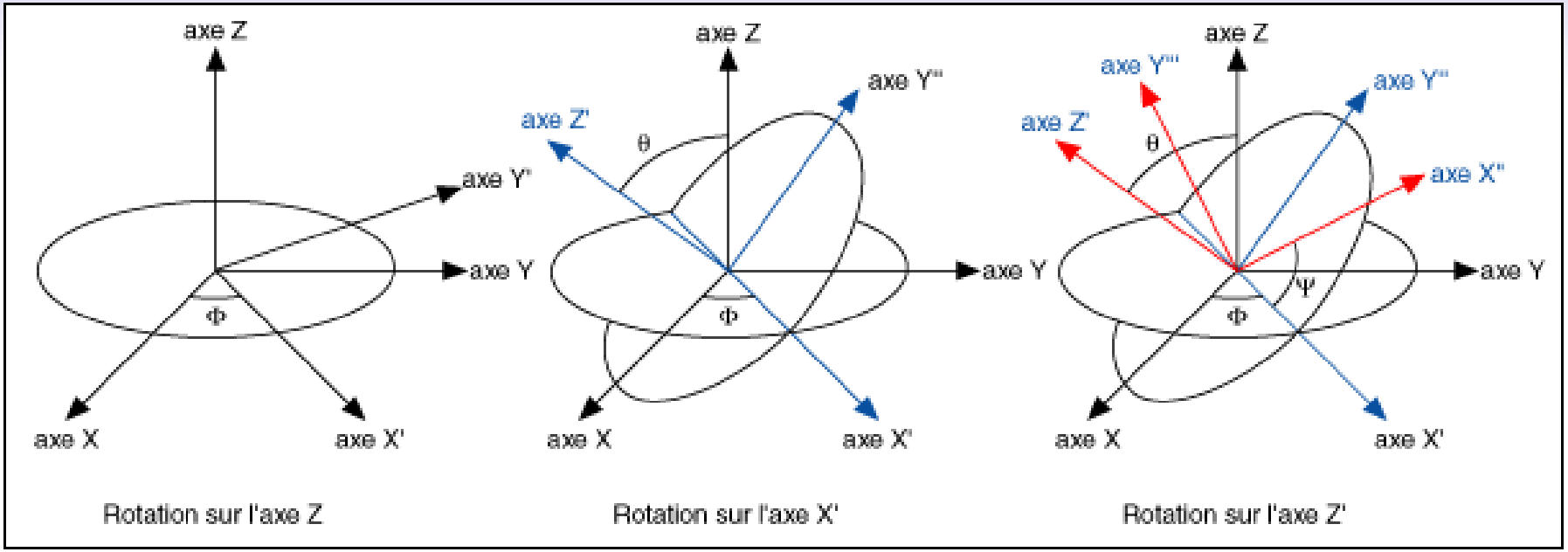


1. *les applications unitaires conservent les longueurs*
2. *les applications unitaires conservent l'orthogonalité*
3. *les applications unitaires conservent les angles*

si $V = \mathbb{R}^2$ matrice unitaire $\Leftrightarrow$ rotation $\theta \in [-\pi, \pi]$ mod 2π $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1+\theta_2) \\ A^{-1}(\theta) = A(-\theta) = A^+(\theta) \end{cases}$

- si A est hermitique . . . *à suivre* . . .

Rotations dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ tri-dimensionnel



Source: `https://wikimeca.org/index.php?title=Fichier:Angles_euler.gif`

en trois dimensions, il y a trois axes possibles $\Rightarrow$ trois angles de rotation

fréquemment, on utilise une paramétrisation introduite par EULER

les 3 rotations s'appliquent de droite à gauche

$$A(\Psi,\Theta,\Phi) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rotation autour de l'axe } z'} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}}_{\text{rotation autour de l'axe } x'} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rotation autour de l'axe } z}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\Psi\cos\Phi - \sin\Psi\cos\Theta\sin\Phi & \cos\Psi\sin\Phi + \sin\Psi\cos\Theta\cos\Phi & \sin\Psi\sin\Theta \\ -\sin\Psi\cos\Phi - \cos\Psi\cos\Theta\sin\Phi & -\sin\Psi\sin\Phi + \cos\Psi\cos\Theta\cos\Phi & \cos\Psi\sin\Theta \\ \sin\Theta\sin\Phi & -\sin\Theta\cos\Phi & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Φ, Θ, Ψ s'appellent **angles d'Euler**

N.B.: $A^{-1}(\Psi,\Theta,\Phi) = A^{+}(\Psi,\Theta,\Phi) = A(-\Phi,-\Theta,-\Psi)$

! changement d'ordre des facteurs !

Proposition: *Pour deux opérateurs linéaires A, B, on a:* $\boxed{(AB)^+ = B^+A^+}$.

Démonstration: $\langle x|ABy\rangle = \langle x|A(By)\rangle = \langle A^+x|By\rangle = \langle B^+(A^+x)|y\rangle$ QED

en particulier, en $\mathbb{R}^d$: $(AB)^T = B^TA^T$.

Corollaire: *Si A, B sont unitaires, alors AB est unitaire.*

Démonstration: $(AB)(AB)^+ = (AB)B^+A^+ = A(BB^+)A^+ = AA^+ = \mathbf{1}$ QED

Soit $U : V \to V$ unitaire. Pour $x, y \in V$, posons $x = Uu$ et $y = Uv$.

$$\langle x|Ay\rangle = \langle Uu|AUv\rangle = \langle u|U^+AUv\rangle = \langle u|(U^{-1}AU)v\rangle$$

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert, $A : V \to V$ linéaire et $U : V \to V$ linéaire et invertible (c.à.d. U^{-1} existe). La transformation*

$$A \mapsto U^{-1}\,A\,U \qquad (*)$$

est une **transformation de similarité**. *Si $U : V \to V$ est unitaire, (*) devient une* **transformation unitaire**

$$A \mapsto U^+\,A\,U \qquad (**)$$

en alternative: partir de $y = Ax$. Pour le vecteur $v = U^{-1}y = U^+y$ tourné, on trouve la forme (**) de A transformée $v = U^{-1}y = (U^{-1}AUU^{-1})x = U^+AU(U^+x) = (U^+AU)u$.

Exemple: transformation unitaire d'une matrice 2×2, espace pré-Hilbert $\mathbb{R}^2$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

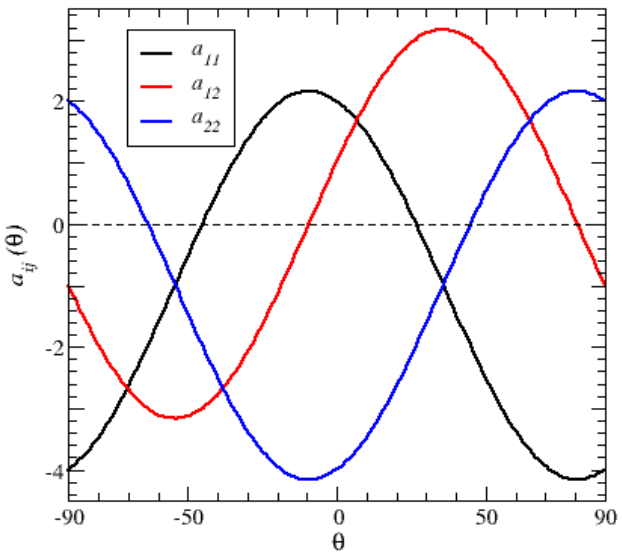
au lieu de la base canonique orthonormée $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on passe à la nouvelle base (tournée), également orthonormée

$$\boldsymbol{f}_1 = U^+ \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{f}_2 = U^+ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } \quad U = U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La matrice transformée $U^+ A U$ s'écrit dans la nouvelle base $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\theta) & a_{12}(\theta) \\ a_{12}(\theta) & a_{22}(\theta) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{U^+} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{U}$$



dépendance des éléments
$a_{11}(\theta)$, $a_{12}(\theta) = a_{21}(\theta)$, $a_{22}(\theta)$ de l'angle θ
fonctions périodiques the θ, période 180°

pour $\theta = -\frac{90}{\pi} \arctan \frac{1}{3} \simeq -9,22^o$, on trouve $a_{12} = 0$
$\Rightarrow$ matrice transformée **diagonale**

$\Rightarrow$ valeurs extrémales de
$$a_{11} = -1 + \sqrt{10} \simeq \quad 2.16$$
$$a_{22} = -1 - \sqrt{10} \simeq -4.16$$

pour $\theta \simeq 80,78^o$, a_{11} et a_{22} sont échangés, $a_{12} = 0$

10. Valeurs propres et vecteurs propres

transformations unitaires: conservent la longueur et changent la direction
peut-on avoir la situation opposée, donc $Ax = \alpha x$?
dans ce cas, la direction était conservée et les longueurs changéaient ...

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert et $A : V \to V$ linéaire. Si $Ax = \alpha x$, avec $x \neq 0$, α est* **valeur propre** *de A et x est* **vecteur propre** *de A.*

Exemple: $V = \mathbb{R}^2$ et matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ hermitique.

? comment trouver les valeurs propres et vecteurs propres de A ?

$$\boxed{Ax = \alpha x \quad \Longrightarrow \quad \big(A - \alpha \mathbf{1}\big)x = 0}$$

théorie èqs linéaires $\Rightarrow$ solution $x \neq 0$ existe seulement si $\det\big(A - \alpha \mathbf{1}\big) = 0$.

Définition: $P(\lambda) := \det\big(A - \lambda \mathbf{1}\big)$ *est le* **polynôme caractéristique** *de A.*

☞ pour trouver les valeurs propres de A, on cherche les zéros de $P(\lambda)$.

(i) calcul du polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \det\big(A - \lambda \mathbf{1}\big) \;=\; \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 8\lambda - 1$$

(ii) recherche des zéros de $P(\lambda)$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_\pm = 4 \pm \sqrt{17}$$

2 valeurs propres réelles pour une matrice 2×2 hermitique

(iii) calcul des vecteurs propres, d'abord pour α_+: $A\boldsymbol{x}_+ = \alpha_+ \boldsymbol{x}_+$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} (4+\sqrt{17}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (-1-\sqrt{17})x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 \quad + (1-\sqrt{17})x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{17})x_1$ le vecteur propre n'a pas de normalisation fixée

calcul des vecteurs propres, ensuite pour α_-: $A\boldsymbol{x}_- = \alpha_- \boldsymbol{x}_-$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} (4-\sqrt{17}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (-1+\sqrt{17})x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 \quad + (1+\sqrt{17})x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}(1-\sqrt{17})x_1$ le vecteur propre n'a pas de normalisation fixée

si $\alpha = \alpha_+ = 4+\sqrt{17}$, $\boldsymbol{x}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{17}}{4} \end{pmatrix}$ si $\alpha = \alpha_- = 4-\sqrt{17}$, $\boldsymbol{x}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{17}}{4} \end{pmatrix}$

N.B.: on observe: on a $\alpha_+ \neq \alpha_-$, vecteurs $\boldsymbol{x}_\pm$ linéairement indépendants et $\boldsymbol{x}_+ \cdot \boldsymbol{x}_- = 0$.
on peut encore normaliser $\boldsymbol{x}_+, \boldsymbol{x}_-$, afin d'avoir $\|\boldsymbol{x}_+\| = \|\boldsymbol{x}_-\| \stackrel{!}{=} 1$

* Si les vecteurs propres sont normés $\|\boldsymbol{x}_\pm\| = 1$, on a (implicitement) trouvé une transformation unitaire U telle que dans la base orthonormée des vecteurs propres $\boldsymbol{x}_\pm$, la matrice A

$$A \mapsto D = U^+ A U = \begin{pmatrix} \alpha_+ & 0 \\ 0 & \alpha_- \end{pmatrix}$$

devient diagonale. On parle de la **diagonalisation** de la matrice A.

* Si $\{\boldsymbol{e}_i\}$ est base orthonormée de V, et $\boldsymbol{u}_i := U\boldsymbol{e}_i$, alors $\{\boldsymbol{u}_i\}$ est aussi base orthonormée de V, et $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$.

voir exemple sur la page suivante

$$\Rightarrow \boldsymbol{u}_i = U\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{di} \end{pmatrix} \implies U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1i} & \cdots & u_{1d} \\ u_{21} & \cdots & u_{2i} & \cdots & u_{2d} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{d1} & \cdots & u_{di} & \cdots & u_{dd} \end{pmatrix}$$

est matrice unitaire et $U^+U = \mathbf{1}$

ceci est aussi valable si $\{\boldsymbol{u}_i\}$ est une base orthonormée de vecteurs propres d'une matrice A.

* Sous transformation unitaire, on observe sur l'adjoint de A

$$A^+ \mapsto \left(U^+ A U\right)^+ = U^+ A^+ U^{++} = U^+ A U$$

si $A = A^+$ est hermitique, elle le reste sous transformation unitaire

☞ *les transformations unitaires conservent l'hermiticité d'une matrice*

Exemple: considérons le problème suivant des valeurs et vecteurs propres $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(i) calcul du polynôme caractéristique et recherche de ses zéros

$$P(\lambda) = \det\left(A - \lambda \mathbf{1}\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_6 = 6$.

(ii) calcul des vecteurs propres: $A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$ et $A\boldsymbol{x}_6 = \lambda_6 \boldsymbol{x}_6$.
si normalisés tels que $\|\boldsymbol{x}_1\| = 1$ et $\|\boldsymbol{x}_6\| = 1$, on a

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x}_6 = \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_6 = 0$$

orthogonalité des vecteurs propres

(iii) les équations des vecteurs propres ont la forme $\begin{cases} 5x_1 - 2y_1 = 1x_1 \\ -2x_1 + 2y_1 = 1y_1 \end{cases}$, $\begin{cases} 5x_6 - 2y_6 = 6x_6 \\ -2x_6 + 2y_6 = 6y_6 \end{cases}$

forme matricielle $\implies$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_6 \\ y_1 & y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_6 \\ y_1 & y_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ équation de forme $\boxed{AU = UD}$, où $U = \begin{pmatrix} x_1 & x_6 \\ y_1 & y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, construite des vecteurs propres normés, est matrice unitaire $U^+ = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_6 & y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = U^{-1}$,
c.à.d. $U^+ U = \mathbf{1}$.

☞ matrice de transformation U systématiquement construite des vecteurs propres orthonormés

[Astuce de démonstration: inverses de gauche et de droite

On considère les matrices $d \times d$ invertibles A. On sait déjà qu'elles forment un groupe (non commutatif) sous multiplication des matrices.

Définition: *Si A, B sont matrices et $AB = \mathbf{1}$, on dit que B est* **inverse de droite** *de A.*
Si en revanche $BA = \mathbf{1}$, on dit que B est **inverse de gauche** *de A.*

Proposition: *(1) Si B est l'inverse de droite de A, elle est aussi son inverse de gauche.*
(2) Si B est l'inverse de gauche de A, elle est aussi son inverse de droite.
(3) Si B, B' sont les inverses de droite et de gauche de A, alors $B = B' =: A^{-1}$.

Dans la pratique, il suffit donc de ne vérifier qu'une seule des inverses de gauche/droite.

Démonstration: (1) Si $AB = \mathbf{1}$, on multiplie de gauche avec B et de droite avec A pour trouver $B(AB)A = BA \Rightarrow (BA)^2 = BA$. Car $C := BA$ est élément du groupe, il existe bien son inverse (de droite) D telle que $CD = \mathbf{1}$. La relation $C^2 = C$ implique donc $BA = C = \mathbf{1}$. B est donc inverse de gauche.
(2) Si $BA = 1$, on en tire $(AB)^2 = A(BA)A = AB$. Car $C := AB$ a bien une inverse D (de gauche) $DC = \mathbf{1}$, la relation $C^2 = C$ implique $AB = C = \mathbf{1}$. B est donc inverse de droite.
(3) Si $AB = \mathbf{1}$ et $B'A = \mathbf{1}$, on multiplie la 1ère avec A de droite et la 2e avec A de gauche pour en tirer $ABA = A = AB'A$. Multiplication avec B' de gauche et B de droite produit $B = B'$. QED]

on arrive à un des résultats les plus importants de l'algèbre linéaire

Théorème: (théorème spectral) *Soit V espace pré-Hilbert (de dimension finie) et $A : V \to V$ hermitique, $A = A^+$. Alors*
(i) toute valeur propre α de A est réelle
(ii) si α, β sont deux valeurs propres distincts de A, $\alpha \neq \beta$, et x, y sont les vecteurs propres associés, on a $\langle x|y\rangle = 0$
(iii) il existe une base orthonormée $\{e_i\}$ de V, telle que

$$Ae_i = \alpha_i e_i \quad , \quad x = \sum_i \langle e_i|x\rangle \, e_i \quad \forall x \in V$$

Importance physique de ce résultat: en mécanique quantique, toutes les "quantités physiques" sont représentées à l'aide des opérateurs hermitiques A tel que leurs seules valeurs observables sont les valeurs propres α de A. C'est très bien que $\alpha \in \mathbb{R}$ est garanti !

☞ nous voyons que toutes les propriétés notés ci-haut dans l'exemple d'une matrice 2×2 hermitique (symétrique) sont tout à fait génériques

Démonstration: (i) par calcul direct, avec $A = A^+$

$$\begin{array}{rl} \langle x|Ax\rangle & = \alpha\,\langle x|x\rangle \;=\; \alpha\,\|x\| \\ \| & \\ \langle Ax|x\rangle & = \alpha^*\langle x|x\rangle \;=\; \alpha^*\|x\| \end{array}$$

pour $x \neq 0$ on a $\|x\| \neq 0$, donc $\alpha^* = \alpha \in \mathbb{R}$.
(ii) soit $Ax = \alpha x$ et $Ay = \beta y$ tel que $\alpha \neq \beta$. Alors

$$\begin{array}{rl} \langle x|Ay\rangle & = \beta\langle x|y\rangle \\ \| & \\ \langle Ax|y\rangle & = \alpha^*\langle x|y\rangle \;=\; \alpha\langle x|y\rangle \end{array}$$

il vient $(\alpha - \beta)\langle x|y\rangle = 0$ donc $\langle x|y\rangle = 0$.
(iii) on utilise l'isomorphisme $V \stackrel{\wedge}{=} \mathbb{R}^n$, $n < \infty$. Pour $\mathbb{R}^n$, les valeurs propres sont les zéros $P(\alpha) = 0$ du polynôme caractéristique (si $\mathbb{C}^n$, coefficients *a priori* complexes). Le **théorème fondamental de l'algèbre** (ou théorème de Gauss-d'Alembert) garantit l'existence d'un $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha_1) = 0$. On a $Ax_1 = \alpha_1 x_1$, $x_1 \in V$. On forme

$$V_1^\perp := \{y \in V \,|\langle x_1|y\rangle = 0\} \qquad \text{tous les vecteurs orthogonaux à } x_1$$

$\Rightarrow V_1^\perp \subset \mathbb{R}^n$ est sous-espace vectoriel de $V \stackrel{\wedge}{=} \mathbb{R}^n$ et dim $V_1^\perp = n - 1$.

on écrit $x = \xi_1 x_1 + y$ où $y \in V_1^\perp$. Car $Ax = \xi_1 Ax_1 + Ay = \xi_1 \alpha_1 x_1 + Ay$, il vient $\langle x_1 | Ay \rangle = \langle Ax_1 | y \rangle = \alpha_1 \langle x_1 | y \rangle = 0$. Donc $Ay \in V_1^\perp$.
La matrice associée à A prend donc la structure

on sait que $\alpha_1 \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 : V_1^\perp \to V_1^\perp \qquad \begin{array}{l} \text{est matrice } (n-1)\times(n-1) \\ \text{et hermitique } A_1 = A_1^+ \end{array}$$

car si $y, y' \in V_1^\perp$, on a $\langle y | A_1 y' \rangle = \langle y | Ay' \rangle = \langle Ay | y' \rangle = \langle A_1 y | y' \rangle$, donc $A_1 = A_1^+$.
On repète la même argumentation pour A_1: on calcule le polynome caracteristique $P_1(\lambda) := \det(A_1 - \lambda \mathbf{1})$ et on sait qu'il existe $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ tel que $P_1(\alpha_2) = 0$. On a $Ax_2 = A_1 x_2 = \alpha_2 x_2$, avec $x_2 \in V_1^\perp$. On forme

$$V_2^\perp := \{ y \in V_1^\perp \,|\, \langle x_2 | y \rangle = 0 \} \qquad \text{tous les vecteurs orthogonaux à } x_1 \text{ et à } x_2$$

$\Rightarrow V_2^\perp \subset \mathbb{R}^n$ est sous-espace vectoriel de $V_1^\perp \subset \mathbb{R}^n$ et dim $V_2^\perp = n - 2$ etc.
L'argument est repeté $n - 1$ fois. QED

Conclusion: chaque matrice $d \times d$ hermitique A se ramène à une forme diagonale

$$D = U^+ A U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_d \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \;\; ; \;\; i = 1, \ldots, d$$

voici un exemple d'opérateur sur un espace de fonctions

Exemple: considérons un espace de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ avec valeurs complexes et dérivables & intégrables comme il se révélera nécessaire, et les opérations standard d'espace vectoriel

espace de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R})$

$$\big(f+g\big)(x) := f(x) + g(x) \;\;,\;\; \big(\alpha\, f\big)(x) := \alpha f(x) \;\;;\;\; \alpha \in \mathbb{C}$$

et du produit scalaire

il faut: $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, |f(x)|^2 < \infty$ et f dérivable

$$\big\langle f \big| g \big\rangle := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\; f^*(x) g(x)$$

Étudions l'opérateur $\big(pf\big)(x) := \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, évidemment linéaire

$$\begin{aligned}
\big\langle f \big| p\, g \big\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\; f^*(x) \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \\
&= \underbrace{\frac{1}{\mathrm{i}} f^*(x) g(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ requis à } \pm\infty, \text{ sinon divergence}} - \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\; \frac{\mathrm{d}f^*(x)}{\mathrm{d}x} g(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\; \left(\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right)^* g(x) \;=\; \big\langle p\, f \big| g \big\rangle
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ l'opérateur p est hermitique

☞ en mécanique quantique, p devient l'opérateur de l'impulsion (quantité de mouvement)

? quelles valeurs propres et vecteurs propres ?

on considère l'équation des valeurs propres

$$\big(pf\big)(x) = \lambda f(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lambda f(x)$$

dans ce cas, il faut résoudre une équation différentielle, et non pas une équation algébrique.

$$\Rightarrow \qquad \boxed{f(x) = f_0\, e^{\mathrm{i}\lambda x} \qquad \text{onde plane stationnaire}}$$

☞ chaque valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre.

interprétation physique: dans un système spatialement infini, l'impulsion d'une particule libre peut prendre toute valeur réelle

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert et $A : V \to V$ linéaire. A est* **normale**, *si $AA^+ = A^+A$.*

N.B.: les matrices hermitiques et les matrices unitaires sont normales

Théorème: *Une matrice A a une base orthonormée de vecteurs propres si et seulement si A est normale.*

Démonstration: (i) "⇒" si A a une base orthonormée des vecteurs propres, elle devient diagonale dans cette base $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_d \end{pmatrix} \Rightarrow AA^+ = A^+A.$

(ii) "⇐" on se concentre au cas $V \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{C}^n$. Avec le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det\left(A - \lambda \mathbf{1}\right)$, il existe $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha_1) = 0$ et $Ax_1 = \alpha_1 x_1$. Soit

$$V_1^\perp := \left\{ y \in V \middle| \langle x_1 | y \rangle = 0 \right\} \quad \text{et décomposition } x = \xi_1 x_1 + y \Rightarrow \dim V_1^\perp = n - 1$$

Si $y \in V_1^\perp$, on a $\langle x_1 | Ay \rangle = \langle A^+ x_1 | y \rangle = \langle \alpha_1^* x_1 | y \rangle = \alpha_1^{**} \langle x_1 | y \rangle = \alpha_1 \langle x_1 | y \rangle = 0$, donc $Ay \in V_1^\perp$. Ceci implique $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}$ où $A_1 : V_1^\perp \to V_1^\perp$. De plus, $A_1 A_1^+ y = AA^+ y = A^+ Ay = A_1^+ A_1 y$, donc A_1 est normale. On repète cet argument $n - 1$ fois afin de réduire la matrice $n \times n$ A à sa forme diagonale. QED

on comprend mieux l'importance de ce résultat en étudiant des matrices non normales:

Exemple: $V = \mathbb{R}^2$, matrices 2×2 non normales $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_1$ a deux fois la valeur propre α; A_2 a les valeurs propres α, β;

calcul des vecteurs propres de A_2, pour $\alpha \neq \beta$

$$A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x + y = \alpha x \\ \beta y = \alpha y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ arbitraire} \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x + y = \beta x \\ \beta y = \beta y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ arbitraire} \neq 0 \\ y = (\beta - \alpha)x \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ (\beta - \alpha)x \end{pmatrix}$$

- si $\alpha \neq \beta$, vecteurs propres distincts $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ (\beta - \alpha)x \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = x^2 \neq 0$

A_2 non normale $\Rightarrow$ vecteurs propres linéairement indépendants, mais non orthogonaux

- si cas limite $\alpha = \beta$, vecteur propre $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_2$

A_1 non normale $\Rightarrow$ un seul vecteur propre pour 2 valeurs propres !

pour finir, voici un dernier résultat général

Définition: *Une matrice $n \times n$ J est un* **bloc de Jordan**, *si elle s'écrit sous la forme*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Une telle matrice a n fois la valeur propre λ, mais qu'un seul vecteur propre.

Théorème: (JORDAN) *Soit V espace pré-Hilbert et $A : V \to V$ linéaire.*
Il existe toujours une transformation de similarité telle que A se réduit à la forme

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

où les J_i sont les blocs de Jordan, avec valeurs propres λ_i. De plus,
$\dim J_1 + \cdots + \dim J_k = \dim V$.

N.B.: dans l'exemple précedent, la matrice A_1 est un bloc de Jordan 2×2.

[Astuce de calcul: division des polynômes

Exercice: résoudre l'équation $P(x) := x^3 - 6x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{65}{2} = 0$.
Seule la formule pour les zéros des polynômes quadratiques est facile, celles pour les ordres 3 et 4 sont fastidieuses, et en général inexistantes pour les ordres ≥ 5.

Dans la pratique, on se tire souvent d'affaire en devinant une solution: ici $x = 2$.
En effet: $2^3 - 6 \cdot 2^2 - \frac{33}{4} \cdot 2 + \frac{65}{2} = -16 + \frac{32}{2} = 0$. $\Rightarrow P(2) = 0$ et $P(x)$ est divisible par $x - 2$.

La division du polynôme $P(x)$ par $x - 2$ procède ainsi:

$$\begin{array}{r} \left(x^3 - 6x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{65}{2}\right) : \left(x - 2\right) = x^2 \\ \underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\ -4x^2 \end{array}$$

diviser le 1er terme de $P(x)$ par x, noter le résultat x^2

on multiplie le résultat x^2 avec $x - 2$

effectuer la soustraction

]

[Astuce de calcul: division des polynômes

Exercice: résoudre l'équation $P(x) := x^3 - 6x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{65}{2} = 0$.
Seule la formule pour les zéros des polynômes quadratiques est facile, celles pour les ordres 3 et 4 sont fastidieuses, et en général inexistantes pour les ordres ≥ 5.

Dans la pratique, on se tire souvent d'affaire en devinant une solution: ici $x = 2$.
En effet: $2^3 - 6 \cdot 2^2 - \frac{33}{4} \cdot 2 + \frac{65}{2} = -16 + \frac{32}{2} = 0$. $\Rightarrow P(2) = 0$ et $P(x)$ est divisible par $x - 2$.

La division du polynôme $P(x)$ par $x - 2$ procède ainsi:

$$\begin{array}{rl} \left(x^3 - 6x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{65}{2}\right) : \left(x - 2\right) = x^2 \; -4x & \text{diviser le 1er terme de } P(x) \text{ par } x, \text{ noter le résultat } x^2 \\ \underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} & \text{on multiplie le résultat } x^2 \text{ avec } x - 2 \\ -4x^2 - \frac{33}{4}x & \text{effectuer la soustraction, puis faire descendre le prochain terme de } P(x) \\ \underline{-\left(-4x^2 + 8x\right)} & \text{diviser le 1er terme par x, noter le résultat } -4x. \text{ Ensuite le multiplier par } x - 2 \\ -\frac{65}{4}x & \text{effectuer la soustraction} \end{array}$$

]

[Astuce de calcul: division des polynômes

Exercice: résoudre l'équation $P(x) := x^3 - 6x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{65}{2} = 0$.
Seule la formule pour les zéros des polynômes quadratiques est facile, celles pour les ordres 3 et 4 sont fastidieuses, et en général inexistantes pour les ordres ≥ 5.

Dans la pratique, on se tire souvent d'affaire en devinant une solution: ici $x = 2$.
En effet: $2^3 - 6 \cdot 4 - \frac{33}{4} \cdot 2 + \frac{65}{2} = -16 + \frac{32}{2} = 0$. $\Rightarrow P(2) = 0$ et $P(x)$ est divisible par $x - 2$.

La division du polynôme $P(x)$ par $x - 2$ procède ainsi:

$$\left(x^3 - 6x^2 - \tfrac{33}{4}x + \tfrac{65}{2}\right) : (x - 2) = x^2 - 4x - \tfrac{65}{4}$$

diviser le 1er terme de $P(x)$ par x, noter le résultat x^2

$$-\left(x^3 - 2x^2\right)$$

on multiplie le résultat x^2 avec $x - 2$

$$-4x^2 - \tfrac{33}{4}x$$

effectuer la soustraction, puis faire descendre le prochain terme de $P(x)$

$$-\left(-4x^2 + 8x\right)$$

diviser le 1er terme par x, noter le résultat $-4x$. Ensuite le multiplier par $x - 2$

$$-\tfrac{65}{4}x + \tfrac{65}{2}$$

effectuer la soustraction, puis faire descendre le prochain terme de $P(x)$

$$-\left(-\tfrac{65}{4}x + \tfrac{65}{2}\right)$$

diviser le 1er terme par x, noter le résultat $-\frac{65}{4}$. Ensuite le multiplier par $x - 2$

$$0$$

effectuer la soustraction: on trouve 0 $\Rightarrow$ la division est terminée !

N.B.: si le premier zéro est correctement deviné, la division doit toujours se terminer avec 0.

Conclusion: $\boxed{P(x) = x^3 - 6x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{65}{2} = \left(x^2 - 4x - \frac{65}{4}\right)(x - 2)}$.

La solution de l'équation quadratique restante donne $P(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{13}{2}\right)(x - 2)$,
avec les trois zéros $x = -\frac{5}{2}$, $x = \frac{13}{2}$, $x = 2$.]

11. Méthode numérique pour valeurs propres

technique simple et efficace afin d'obtenir la valeur propre maximale d'une matrice A

$*$ itération simple/*Potenzmethode* afin d'en illustrer l'idée !

si matrice $m \times m$ est normale, $A^+A = AA^+$, utiliser la représentation spectrale

$$A = \sum_i \alpha_i \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big| \quad , \quad A\big|e_i\big\rangle = \alpha_i |e_i\rangle$$

on peut ordonner: $|\alpha_1| > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \ldots$

on applique A à un vector initial/*Startvektor* $y = \big|y\big\rangle$: 1 application

$$A\big|y\big\rangle = \sum_i \alpha_i \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big|y\big\rangle$$

11. Méthode numérique pour valeurs propres

technique simple et efficace afin d'obtenir la valeur propre maximale d'une matrice A

$*$ itération simple/*Potenzmethode* afin d'en illustrer l'idée !

si matrice $m \times m$ est normale, $A^+A = AA^+$, utiliser la représentation spectrale

$$A = \sum_i \alpha_i \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big| \quad , \quad A\big|e_i\big\rangle = \alpha_i |e_i\rangle$$

on peut ordonner: $|\alpha_1| > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \ldots$

on applique A à un vector initial/*Startvektor* $y = \big|y\big\rangle$: 2 applications

$$A^2\big|y\big\rangle = \sum_i \alpha_i^2 \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big|y\big\rangle$$

11. Méthode numérique pour valeurs propres

technique simple et efficace afin d'obtenir la valeur propre maximale d'une matrice A

$*$ itération simple/*Potenzmethode* afin d'en illustrer l'idée !

si matrice $m \times m$ est normale, $A^+A = AA^+$, utiliser la représentation spectrale

$$A = \sum_i \alpha_i \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big| \quad , \quad A\big|e_i\big\rangle = \alpha_i |e_i\rangle$$

on peut ordonner: $|\alpha_1| > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \ldots$

on applique A à un vector initial/*Startvektor* $y = \big|y\big\rangle$: 3 applications

$$A^3\big|y\big\rangle = \sum_i \alpha_i^3 \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big|y\big\rangle$$

11. Méthode numérique pour valeurs propres

technique simple et efficace afin d'obtenir la valeur propre maximale d'une matrice A

* itération simple/*Potenzmethode* afin d'en illustrer l'idée !

si matrice $m \times m$ est normale, $A^+A = AA^+$, utiliser la représentation spectrale

$$A = \sum_i \alpha_i \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big| \quad , \quad A\big|e_i\big\rangle = \alpha_i |e_i\rangle$$

on peut ordonner: $|\alpha_1| > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \ldots$

on applique A à un vector initial/*Startvektor* $y = \big|y\big\rangle$: n applications

$$A^n\big|y\big\rangle = \sum_i \alpha_i^n \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big|y\big\rangle$$

11. Méthode numérique pour valeurs propres

technique simple et efficace afin d'obtenir la valeur propre maximale d'une matrice A

$*$ itération simple/*Potenzmethode* afin d'en illustrer l'idée !

si matrice $m \times m$ est normale, $A^+A = AA^+$, utiliser la représentation spectrale

$$A = \sum_i \alpha_i \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big| \quad , \quad A\big|e_i\big\rangle = \alpha_i \big|e_i\big\rangle$$

on peut ordonner: $|\alpha_1| > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \dots$

on applique A à un vector initial/*Startvektor* $y = \big|y\big\rangle$: n applications

$$A^n\big|y\big\rangle = \sum_i \alpha_i^n \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big|y\big\rangle$$

si $n \gg 1$, on a $|\alpha_1|^n \gg |\alpha_2|^n \gg |\alpha_3|^n \gg \dots$ et $\lim_{n\to\infty} g^{1/n} = 1$ si $g \neq 0$

$$A^n\big|y\big\rangle \simeq \alpha_1^n \big|e_1\big\rangle\big\langle e_1\big|y\big\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = \lim_{n\to\infty} \big\langle y\big|A^n\big|y\big\rangle^{1/n}}$$

N.B.: convergence assurée sauf si $\big\langle e_1|y\big\rangle = 0$.

Mise en pratique: on définit d'abord un **algorithme**, comme suit

1. choisir un vecteur initial $\boldsymbol{x}_0$. Poser $k = 0$. Fixer le nombre maximal d'itérations, $N_{\max}$.
2. calculer $A\boldsymbol{x}_k$. Poser $\mu_k := \max_{j=1,\ldots,n} \left|\left(A\boldsymbol{x}_k\right)_j\right|$.
3. normaliser $\boldsymbol{x}_{k+1} := \frac{1}{\mu_k} A\boldsymbol{x}_k$. Augmenter k par un.
4. si $k < N_{\max}$, retourner à l'étape 2. Sinon, arrêter.

pour l'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, avec $\alpha_+ = 7$ et $\alpha_- = 1$, on obtient

k	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{x}_k$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.225 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.2035 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.2005 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.20007 \end{pmatrix}$
$A\boldsymbol{x}_k$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.125 \\ 1.450 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.0175 \\ 1.4070 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.0025 \\ 1.4010 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.00036 \\ 1.40014 \end{pmatrix}$
μ_k	5	8	7.125	7.01575	7.0025	7.00036

on constate:

1. les valeurs de μ_k convergent vers la valeur propre $\alpha_+ = 7$, pour $k \to \infty$.
2. les vecteurs $\boldsymbol{x}_k$ convergent vers le vecteur propre $\boldsymbol{x}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/5 \end{pmatrix}$, pour $k \to \infty$.

grand avantage pratique: il ne faut que le résultat de l'application de la matrice A sur un vecteur $\boldsymbol{x}$, donc bien adapté aux **matrices creuses** (c.à.d. avec très peu d'éléments non nuls, typiquement $\mathrm{O}(m)$) de taille m énorme ($m \sim 2^{100} \simeq 10^{30}$ faisables).

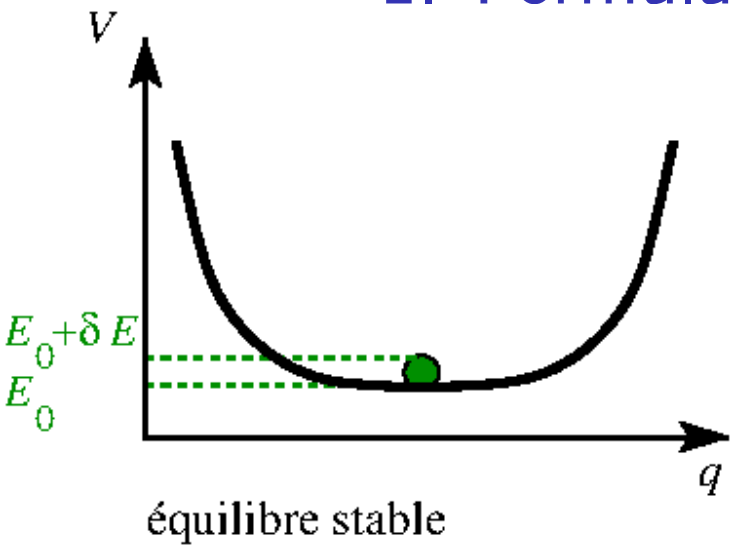
un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Skalarprodukt, *n*	produit scalaire, *m*
komplex konjugiert	conjugué complexe
Norm, *f*	norme, *f*
senkrecht; (orthogonal)	perpendiculaire; orthogonal
adjungiert	adjoint
hermitesch	hermitique; hermitien
konform; winkeltreu	conforme
Scherung, *f*	cisaillement, *m*
Ähnlichkeitstransformation, *f*	transformation de similarité, *f*
unitäre Transformation, *f*	transformation unitaire, *f*
Drehung, *f*; Rotation, *f*	rotation, *f*
drehen	tourner
Eigenwert, *m* (engl. eigenvalue)	valeur propre, *f*
Eigenvektor, *m* (engl. eigenvector)	vecteur propre, *m*
charakteristisches Polynom, *n*	polynôme caractéristique, *m*
teilbar	divisible
dünnbesetzte Matrix, *f* (engl. sparse matrix)	matrice creuse, *f*
vollbesetzte Matrix, *f*	matrice dense, *f*

le genre grammatical (*m,f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

COURS VI/ VORLESUNG VI

VI.) Petites oscillations II
1. Formulation générale du problème



mouvement autour d'un équilibre stable

decomposition

$$q_i = q_{i,0} + \eta_i \quad , \quad i = 1, \dots N$$

où $q_{i,0}$: position d'équilibre, η_i: coordonnée relative

des développements limités du potentiel et de l'énergie cinétique, autour de l'équilibre (au régime de petites oscillations), donnent le Lagrangien pour un système de N degrés de liberté

termes anharmoniques $\mathrm{O}(\eta^3)$ negligés

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \left(T_{ij}\, \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij}\, \eta_i \eta_j \right)$$

où T_{ij} et V_{ij} sont des constantes (contiennent toute information sur le système).

Les équations de mouvement s'écrivent (procédure standard d'Euler-Lagrange)

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N}\Big(T_{ij}\,\ddot{\eta}_j + V_{ij}\,\eta_j\Big) = 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,N} \qquad \text{(E)}$$

donc N équadiffs *linéaires* du 2e ordre pour les N variables η_i

Propriété: les coefficients $T_{ij} = T_{ji}$ et $V_{ij} = V_{ji}$ sont symétriques

☞ on résout de tels systèmes à l'aide de l'ansatz

$$\eta_j(t) = C a_j e^{-\mathrm{i}\omega t} \quad , \quad j = 1,\ldots,N$$

où ω: fréquence angulaire, a_j: amplitudes, C: constante de normalisation

N.B.: déjà pour un seul oscillateur harmonique, on a utilisé un tel ansatz

$\Rightarrow$ en général, les équations de mouvement (E) prennent la forme

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N}\Big(V_{ij} - \omega^2\,T_{ij}\Big)\,a_j = 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,N}$$

intérêt de l'ansatz: réduction d'une équadiff à une équation algébrique

$\Rightarrow$ la solution des équations de mouvement se réduit à la solution du système

problème de valeurs et vecteurs propres généralisés

$$\left(V - \omega^2 T\right)\boldsymbol{a} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{N}\left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N$$

où $V_{ij} = V_{ji}$ et $T_{ij} = T_{ji}$ sont symétriques $\Leftrightarrow V = V^T$, $T = T^T$ hermitiques

* système d'équations linéaires homogènes pour les a_j
* de plus, ω^2 est aussi à déterminer

☞ en général, pour des équations linéaires homogènes:

une des a_j peut être choisie librement (choix de C)

* on a donc $\underbrace{(N-1)}_{\text{les } a_j} + \underbrace{1}_{\omega^2} = N$ variables pour N équations

le compte y est !

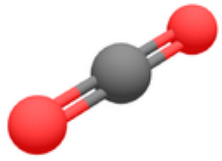
☞ *solution explicite requiert des techniques d'algèbre linéaire*

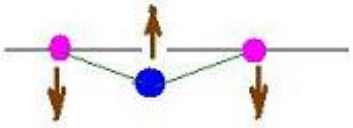
la solution générale s'obtient comme superposition linéaire des modes propres

. . . allons donc voir comment ça marche !

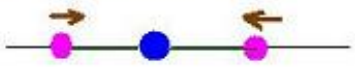
2. Molécules tri-atomiques: l'exemple CO_2

exemple simple de trois degrés de liberté: la molécule CO_2
arrangement linéaire des 3 atomes

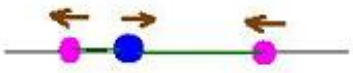




Two Bending modes: on x and y : $\nu = 667 cm^{-1}$



Symmetric stretching mode: $\nu = 1340\ cm^{-1}$



Antisymmetric stretching mode : $\nu = 2349\ cm^{-1}$

plusieurs types d'oscillation, avec des fréquences ν caractéristiques

mouvement du molécule: superposition de ces oscillations

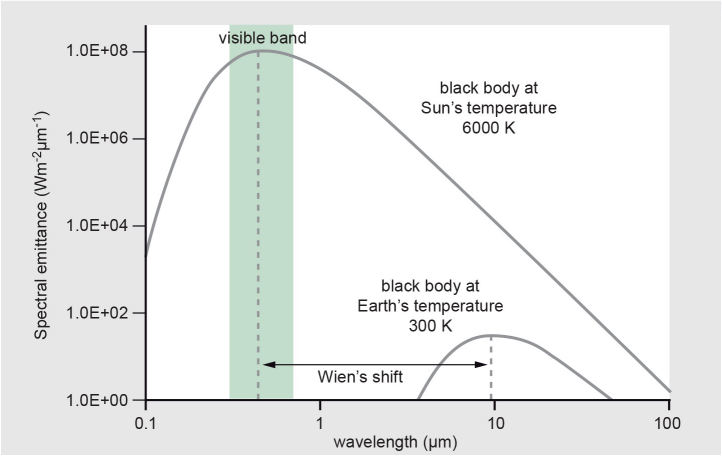
ici: restriction aux vibrations le long de l'axe du molécule

pour une animation, voir p.ex. `https://www.youtube.com/watch?v=AauIOanNaWk`

? comment trouver les fréquences d'oscillation du molécule CO_2 ?

Sources: `https://fr.wikipedia.org/wiki/Dioxyde_de_carbone`;
`https://scientificsentence.net/Physics/Effects/index.php?key=yes&Integer=raman`

Quelques remarques sur le rôle du CO_2 pour l'effet de serre terrestre



Soleil et Terre sont en bonne approximation des corps noirs

la température du Soleil: $T_\odot \approx 6000[\mathrm{K}]$
$\Rightarrow$ maximum d'émission pour la lumière visible

la température d'émission de la Terre $T_\oplus \approx 300[\mathrm{K}]$
$\Rightarrow$ maximum d'émission dans l'infra-rouge

* des absorptions du rayonnement modifient le spectre d'émission de la Terre
* cette absorption retient une partie de la chaleur

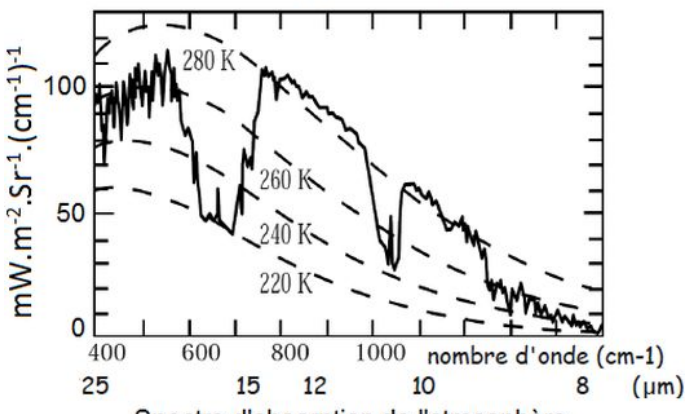
☞ **effet de serre**/*Treibhauseffekt*

les gaz d'effet de serre les plus importants sont H_2O et CO_2

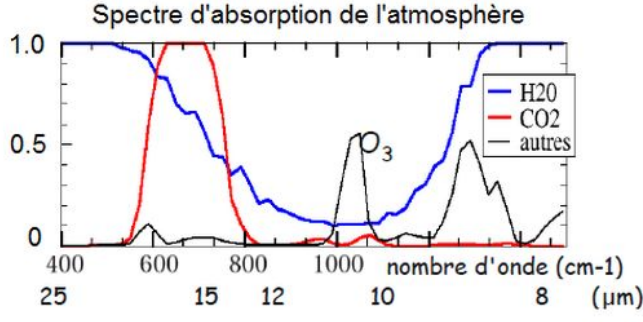
☞ absorption importante par mode à $\nu = 667[\mathrm{cm}^{-1}]$ de CO_2, à peu près au maximum de l'émission terrestre

N.B.: en absence totale de l'effet de serre, la température moyenne de la Terre serait $-19°\mathrm{C}$ (comme sur la lune), au lieu de $+15°\mathrm{C}$.

Spectre infra-rouge observé par satellite



Spectre d'absorption de l'atmosphère

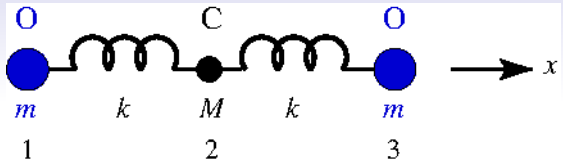


Rappel: Nombre d'onde/*Wellenzahl*: $\nu/c = \lambda^{-1}$

Sources: https://ltb.itc.utwente.nl/491/concept/79570; https://climatorealiste.com/effet-de-serre/

retour au molècule CO_2 linéaire

●: atome C ●: atome O



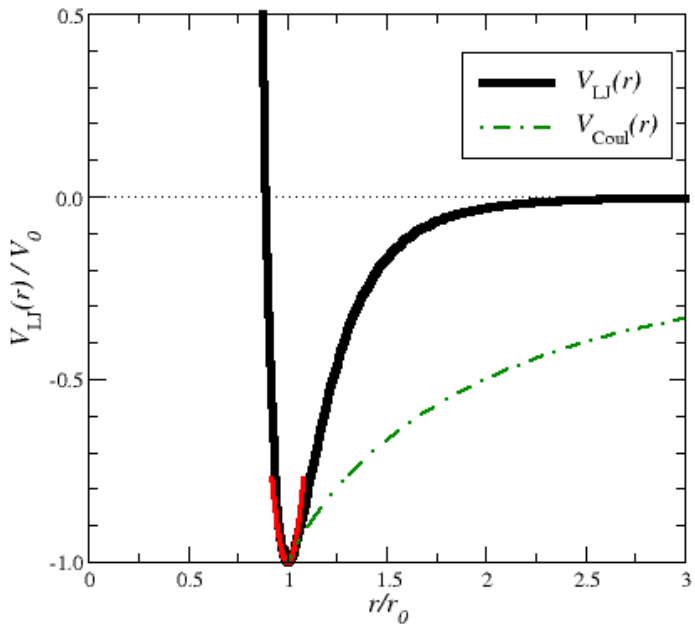
contrainte: mouvement le long de l'axe x

forme phénoménologique des forces moléculaires (forces Coulombiennes écrantées)
forces inter-atomiques/moléculaires: forces entre objets neutres

☞ on remplace le potentiel Coulombien $V_{\rm Coul}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$ entre deux charges électriques par un potentiel effectif de courte portée

$$V_{\rm LJ}(r) = V_0\left(\left(\frac{A}{r/r_0}\right)^{12} - \left(\frac{B}{r/r_0}\right)^{6}\right)$$

(p.ex. le potentiel de LENNARD-JONES)



☞ minimum très prononcé à $r = r_0$

si développement limité autour de r_0

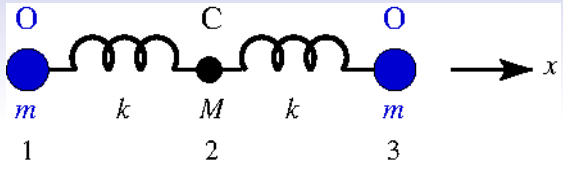
$$V_{\rm LJ}(r) = V_{\rm LJ}(r_0) + \tfrac{1}{2}k\left(r - r_0\right)^2 + \ldots$$

☞ les atomes n'interagissent qu'avec leur premier voisin, car $V(2r_0) \approx 10^{-2}V(r_0)$

⇒ les potentiels inter-atomiques sont remplacées par des potentiels harmoniques effectifs, avec une 'raideur' k effective

potentiel harmonique du molècule CO_2 linéaire

●: atome C ●: atome O



* $N = 3$ trois degrés de liberté ☞ coordonnées x_1, x_2, x_3 des trois atomes
* dans le cadre des approximations admises, on écrit le potentiel

$$V = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - b)^2$$

où b: distance d'équilibre entre atomes C et O

* On pose: $\boxed{\eta_i := x_i - x_{i,0}}$ où $x_{i,0}$ est la position d'équilibre de l'atome i, $i = 1, 2, 3$

$\Rightarrow x_{2,0} - x_{1,0} = b = x_{3,0} - x_{2,0}$. $\Rightarrow x_2 - x_1 = \eta_2 + x_{2,0} - \eta_1 - x_{1,0} = \eta_2 - \eta_1 + b$

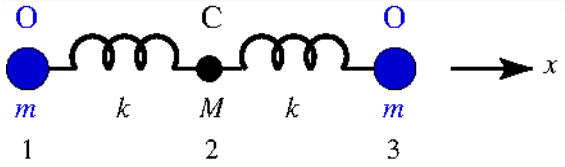
$$V = \frac{k}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{k}{2}(\eta_3 - \eta_2)^2 = \frac{k}{2}\left(\underbrace{\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2}\ \underbrace{-2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3}\right)$$

* on remet ceci sous forme matricielle, avec $V_{ij} = V_{ji}$ ☞ matrice symétrique

$$\boxed{V = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} V_{ij}\eta_i\eta_j \ , \ \hat{V} = k\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

énergie cinétique harmonique du molècule CO_2 linéaire

●: atome C ●: atome O



* l'énergie cinétique du molécule s'écrit directement $\dot{x}_i = \dot{\eta}_i,\ i = 1, 2, 3$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2\right) + \frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2$$

* on la remet sous forme matricielle, avec $T_{ij} = T_{ji}$ ☞ matrice symétrique

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j \ , \ \hat{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

* ainsi, on obtient le lagrangien $L = T - V$ et ensuite les équations d'Euler-Lagrange de mouvement

ces équations de mouvement se résolvent à l'aide de l'ansatz $\eta_j = C a_j e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow$ la solution des équations de mouvement se réduit à la solution du système

problème de valeurs et vecteurs propres généralisés

$$\boxed{\left(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}\right)\boldsymbol{a} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{N}\left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \;\;, \quad i = 1, \ldots, N}$$

où $V_{ij} = V_{ji}$ et $T_{ij} = T_{ji}$ sont symétriques $\quad \Leftrightarrow \quad \hat{V} = \hat{V}^T$, $\hat{T} = \hat{T}^T$ hermitiques

☞ système d'équations linéaires homogènes pour les a_j

$\Rightarrow$ *solutions non triviales pour les* $a_j \Leftrightarrow \det\left(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}\right) = 0$.

Ainsi, on obtient l'**équation caractéristique** (ou l'équation séculaire)

$$\boxed{\det\left(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}\right) = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0}$$

Cette équation fournit les **fréquences angulaires** ω^2 des **modes d'oscillation**.

Solution de l'équation caractéristique (ou de l'équation séculaire)

$$\det\left(\hat{V}-\omega^2\hat{T}\right)=\begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

p.ex. on peut développer le déterminant le long de la 1ère colonne

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \det\left(\hat{V}-\omega^2\hat{T}\right) \\ &= (k-\omega^2 m)\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 M & -k \\ -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix} - (-k)\begin{vmatrix} -k & 0 \\ -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix} + 0 \\ &= (k-\omega^2 m)\left[(2k-\omega^2 M)(k-\omega^2 m)-k^2-k^2\right] \\ &= (k-\omega^2 m)\left[2k^2-\omega^2(2km+kM)+\omega^4 mM-2k^2\right] \\ &= \omega^2(k-\omega^2 m)\left(\omega^2 mM-k(2m+M)\right) \end{aligned}$$

ce qui donne les trois solutions (les trois **modes**)

$$\omega^2=\begin{cases} 0 \\ \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right) \end{cases}$$

On a obtenu les trois solutions pour la fréquence

$$\omega^2 = \begin{cases} 0 \\ \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right) \end{cases}$$

elles décrivent le comportement du molécule entier, et non pas des atomes individuels

Interprétation physique:

(i) mouvement du centre de masses (le molécule reste rigide)

peut être éliminé en imposant la contrainte $m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0$

(ii) oscillation harmonique d'un seul atome O (l'atome C ne bouge pas !)

car $\omega^2 = \frac{k}{m}$ est la fréquence d'une seule masse attachée à un ressort

(iii) mouvement collectif des 3 atomes

afin de confirmer ces interprétations, calculons les modes explicitement
on part du système d'équations

$$\begin{pmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cas 1: $\omega^2 = 0$ $k \neq 0$

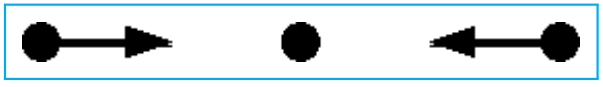
$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a_1 &= a_2 \\ 2a_2 &= a_1 + a_3 \\ a_2 &= a_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3$

cas 2: $\omega^2 = k/m$ $k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k(2-\frac{M}{m}) & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a_2 &= 0 \\ (2-\tfrac{M}{m})a_2 &= a_1 + a_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_1 = -a_3$ et $a_2 = 0$



cas 1: $\omega^2 = 0$ $\quad k \neq 0$

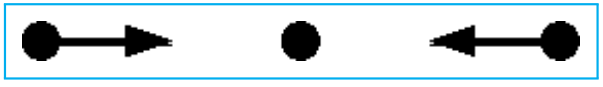
$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a_1 &= a_2 \\ 2a_2 &= a_1 + a_3 \\ a_2 &= a_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{a_1 = a_2 = a_3}$

cas 2: $\omega^2 = k/m$ $\quad k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k(2-\frac{M}{m}) & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a_2 &= 0 \\ (2-\tfrac{M}{m})a_2 &= a_1 + a_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{a_1 = -a_3 \text{ et } a_2 = 0}$



cas 3: $\omega^2 = \frac{k}{m}(1 + \frac{2m}{M})$ $\quad k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} -k\frac{2m}{M} & -k & 0 \\ -k & -k\frac{M}{m} & -k \\ 0 & -k & -k\frac{2m}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \tfrac{2m}{M}a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 + a_3 + \tfrac{M}{m}a_2 &= 0 \\ \tfrac{2m}{M}a_3 + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{a_1 = a_3 = -\frac{M}{2m}a_2}$

N.B.: pour un équilibre stable, il faut $\omega^2 \geq 0 \Rightarrow$ mouvement harmonique autour de l'équilibre.

N.B.': mais stationnarité instable, si $\omega^2 < 0 \Rightarrow$ éloignement exponentiel du point stationnaire

Sur l'orthogonalité:

les vecteurs propres: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas tous orthogonaux !

à la place, il faut considérer (où $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ sont les 3 vecteurs propres)

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot (\hat{T}\boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & & \\ & M & \\ & & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ -m \end{pmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot (\hat{T}\boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & & \\ & M & \\ & & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ -2m \\ m \end{pmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{a}_2 \cdot (\hat{T}\boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & & \\ & M & \\ & & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ -2m \\ m \end{pmatrix} = 0$$

Conclusion: beaucoup de similarités avec les valeurs/vecteurs propres standard, mais aussi quelques différences.

Oscillations linéaires de CO_2: comparaison avec l'expérience

Expérimentalement, on peut mesurer:
(1) oscillation symétrique $\nu_{\mathrm{S}} \approx 1335[\mathrm{cm}^{-1}]$
(2) oscillation anti-symétrique $\nu_{\mathrm{A}} \approx 2350[\mathrm{cm}^{-1}]$

Théoriquement: $\omega_{\mathrm{S}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1+2\frac{m}{M}}$
avec les masses $m = m_{\mathrm{O}} \simeq 16 m_{\mathrm{H}}$, $M = m_{\mathrm{C}} \simeq 12 m_{\mathrm{H}}$

$$\text{expérience: } \frac{\nu_{\mathrm{A}}}{\nu_{\mathrm{S}}} \simeq \frac{2350}{1335} \simeq 1,76 \quad , \quad \text{théorie: } \frac{\omega_{\mathrm{A}}}{\omega_{\mathrm{S}}} \simeq \sqrt{1+2\cdot\frac{16}{12}} \simeq 1,91$$

☞ le modèle simple des oscillations linéaires harmoniques est déjà une bonne approximation à la réalité pour CO_2.

L'expérience est reproduite avec une précision de $\approx 10\%$.

3. Théorie des valeurs et vecteurs propres généralisés

Définition: *Soit V un espace pré-Hilbert réel et $A : V \to V$ hermitique.*
(i) A est **définie positive**, *si*

$$\langle x | Ax \rangle > 0 \quad \forall x \in V \quad \text{et} \quad x \neq 0$$

(ii) A est **sémi-définie positive**, *si*

$$\langle x | Ax \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V \quad \text{et} \quad x \neq 0$$

Exemples: (1) auprès d'un minimum, si le potentiel d'un système mécanique est

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} V_{ij}\, \eta_i \eta_j \geq 0$$

$\Rightarrow$ la matrice $\hat{V}$ est sémi-définie positive.
(2) si l'énergie cinétique d'un système mécanique s'écrit $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j > 0$
la matrice $\hat{T}$ est défini positive.

Proposition: *Si $A : V \to V$ est définie positive, alors ses valeurs propres sont toutes positives.*

N.B.: il est clair que A hermitique est nécessaire pour cette considération.

Démonstration: Discutons le cas $V \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}^d$. Car A est hermitique, il existe une matrice unitaire U, $UU^+ = \mathbf{1}$, telle que $U^+AU = D$ avec $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \alpha_d \end{pmatrix}$ diagonale. Alors

$$\begin{aligned} 0 \quad < \quad & \big\langle x \big| Ax \big\rangle \;=\; \big\langle x \big| \big(UU^+\big) A \big(UU^+\big) x \big\rangle \\ = \quad & \big\langle U^+x \big| \big(U^+AU\big)\big(U^+x\big) \big\rangle = \big\langle y \big| Dy \big\rangle \end{aligned}$$

où $y = U^+x$. Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de V des vecteurs propres de A. Si l'on prend $y = e_1$, on obtient pour la première valeur propre $\alpha_1 = \big\langle e_1 \big| De_1 \big\rangle > 0$. De même, $\alpha_j > 0$ pour tout $j = 1, \ldots, d$. QED

Corollaire: *Si A est sémi-définie positive, alors ses valeurs propres sont toutes non négatives.*

Illustration: *Si $A : V \to V$ est définie positive, alors* $\det A > 0$.

Ceci est évident, car $\det A = \prod_{j=1}^{d} \alpha_j > 0$. En particulier, une telle matrice a une inverse A^{-1}.

Théorème: *Soit V espace pré-Hilbert réel (de dimension n), $A : V \to V$ définie positive et $B : V \to V$ sémi-definie positive. On considère l'équation $Bx_i = \lambda_i Ax_i$. Alors:*
(i) les valeurs propres λ_i sont réelles et non négatives.
(ii) si pour $i \neq j$, on a $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors $\langle x_i | Ax_j \rangle = 0$.
(iii) on peut toujours normaliser les x_i tel que $\langle x_i | Ax_j \rangle = \delta_{ij}$. Alors il existe une transformation unitaire $U : V \to V$ telle que

$$U^{\mathrm{T}} A U = \mathbf{1} \quad , \quad U^{\mathrm{T}} B U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

N.B.: on reconnaît les structures découvertes en étudiant l'example du molécule CO_2.

Ainsi, la positivité des fréquences ω^2 est garantie d'avance.

N.B.': Car V réel, l'adjoint devient la transposée $U^+ = U^{\mathrm{T}}$. La matrice U se construit comme d'habitude des vecteurs propres orthonormés.

On appelle ceci la diagonalisation simultane des matrices A et B.

Démonstration: Car A est invertible, on peut réécrire le problème sous la forme $A^{-1}Bx_i = \lambda_i x_i$. Ceci est un problème standard des valeurs/vecteurs propres. Il s'ensuit que les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ existent.
(i) on a $Bx_i = \lambda_i Ax_i$ ou bien $\big(B - \lambda_i A\big)x_i = 0$. Il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \big\langle x_i \big| \big(B - \lambda_i A\big)x_i \big\rangle = \big\langle \big(B - \lambda_i^* A\big)x_i \big| x_i \big\rangle \\ &= \big\langle \big(\lambda_i - \lambda_i^*\big)Ax_i \big| x_i \big\rangle = \big(\lambda_i^* - \lambda_i\big) \underbrace{\big\langle Ax_i \big| x_i \big\rangle}_{>0} \end{aligned}$$

et par conséquent $\lambda_i^* = \lambda_i \in \mathbb{R}$.
De plus, on a bien $\big\langle x_i \big| Bx_i \big\rangle = \big\langle x_i \big| \lambda_i Ax_i \big\rangle = \lambda_i \big\langle x_i \big| Ax_i \big\rangle$ ou encore si $x_i \neq 0$

$$\lambda_i = \frac{\big\langle x_i \big| Bx_i \big\rangle}{\big\langle x_i \big| Ax_i \big\rangle} \geq 0$$

car B est sémi-defini positive et A est défini positive.

(ii) si pour $i \neq j$, on a $\lambda_i \neq \lambda_j$, on a $\big(B - \lambda_i A\big)x_i = 0$ et $\big(B - \lambda_j A\big)x_j = 0$. Donc

$$\begin{aligned} 0 &= \big\langle x_j \big| \big(B - \lambda_i A\big)x_i \big\rangle = \big\langle \big(B - \lambda_i^* A\big)x_j \big| x_i \big\rangle \\ &= \big(\lambda_j - \lambda_i\big)\big\langle Ax_j \big| x_i \big\rangle \end{aligned}$$

et on en tire que $\big\langle x_i \big| Ax_j \big\rangle = \big\langle Ax_j \big| x_i \big\rangle = 0$ pour $i \neq j$.

(iii) la composante k de Bx_i s'écrit $(Bx_i)_k = \sum_\ell B_{k\ell} x_{\ell i}$. Avec les éléments $D_{ji} = \lambda_i \delta_{ji}$, où $\delta_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$ (δ de KRONECKER) on a

$$\sum_\ell B_{k\ell} x_{\ell i} = \big(Bx_i\big)_k = \big(Ax_i\big)_k \lambda_i = \sum_\ell A_{k\ell} x_{\ell i} \lambda_i = \sum_{\ell, j} A_{k\ell} x_{\ell j} D_{ji} \qquad (*)$$

Car les x_i sont mutuellement orthogonaux, on peut fixer leurs normalisations tel que $\big\langle x_j \big| Ax_i \big\rangle = \sum_{k,\ell} x_{kj} A_{k\ell} x_{\ell i} \stackrel{!}{=} \delta_{ji}$. Avec les vecteurs propres x_j, on forme la matrice

$$U := \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{ni} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

et la condition d'orthogonalité devient $U^{\mathrm{T}} A U = \mathbf{1}$. La relation (*) prend la forme $BU = AUD$. Par conséquent, $U^{\mathrm{T}} B U = \big(U^{\mathrm{T}} A U\big) D = \mathbf{1} D = D$ et on a diagonalisé simultanément B et A. QED

4. Sur le contexte physique

Les oscillations des molécules bi-atomiques sont souvent modélisées empiriquement à l'aide d'un **potentiel de** MORSE

$$V(r) = V_0 \left(1 - e^{-\alpha(r-r_0)}\right)^2 \quad , \quad \alpha := \sqrt{\frac{k}{2V_0}}$$

ce qu'on peut développer $V(r) \simeq V_0(1 - 1 + (\frac{k}{2V_0})^{1/2}(r - r_0) + \ldots)^2 \simeq \frac{k}{2}(r - r_0)^2 + \ldots$.

Échelles d'énergie:

1. électronique $\Delta E \gtrsim 1[\mathrm{eV}]$
2. vibrations $\Delta E \simeq 0,1[\mathrm{eV}]$
3. rotations $\Delta E \simeq 1[\mathrm{meV}]$

où $\boxed{1[\mathrm{eV}] = 1 \text{ électronvolt} \simeq 1,6 \cdot 10^{-19}[\mathrm{J}]}$ est l'énergie gagnée par un électron dans un potentiel électrique de $1[\mathrm{V}]$.

Comparaison avec les énergies thermiques: $\boxed{1[\mathrm{eV}] \stackrel{\triangle}{=} 10^4[\mathrm{K}]}$.

☞ les vibrations et rotations des molécules s'observent dans l'infra-rouge.
Il faut un traitement en tenant compte des effets quantiques
$\rightarrow$ niveaux discrets d'énergie !

- **vibrations**: fréquences isolées, bien séparées
- **rotations**: des bandes (multitude des raies très proches)

L'interaction avec la lumière infra-rouge (une onde électromagnétique) se réalise par couplage au moment dipolaire de la molécule.

Molekül	Gestalt Abstände in 10^{-10} m	Trägheits-moment in 10^{-47} kg m^2	Elektr. Moment in 10^{-30} Amp sek m	Innere Schwingungen und ihre Frequenz in 10^{13} sek^{-1}		
H_2	H H 0,75	0,47	0	$\nu = 12,8$		
O_2	O O 1,2	19,0	0	$\nu = 4,7$		
Cl_2	Cl Cl 1,98	114	0	$\nu = 1,7$		
HCl	H Cl 1,28	2,7	3,4	$\nu = 8,3$		
CO_2	O 1,15 C 1,15 O 2,3	70	0	$\nu_1 = 3,8$	$\nu_2 = 2,0$	$\nu_3 = 7,1$
N_2O	N N O 2,3	66,0	0,47	$\nu_1 = 3,9$	$\nu_2 = 1,8$	$\nu_3 = 6,7$
H_2O	O H 1,01 105° 1,53 H	1,0 1,9 3,0	6,0	$\nu_1 = 10,8$	$\nu_2 = 4,8$	$\nu_3 = 11,3$

* observables en spectroscopie infra-rouge: HCl, CO, ...
* non observables: molécules symétriques H_2, O_2, N_2, ...

le site http://chemtube3d.com/vibrationsCO2.htm
donne animations de vibrations de multiples molécules

☜ utilisation systématique de la spectroscopie afin de comprendre la forme des molécules

Source: R.W. Pohl, *Optik und Atomphysik*, Springer (1976[13]), figs. 15.1 et 15.9

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Treibhauseffekt, *m*	effet de serre, *m*
abschirmen	écranter
Schirm, *m*; Bildschirm, *m*	écran, *m*
Fall, *m*	cas, *m*
(aber: freier Fall, *m*	chute libre, *f*)
positiv definit	défini positif
positiv semi-definit	sémi-defini positif
Gestalt, *f*	forme, *f*
Abstand, *m*	distance, *f*
Trägheitsmoment, *n*	moment d'inertie, *m*
elektrisches Moment, *n*	moment dipolaire, *m*
Pendel, *n*	pendule, *m*
Pendeluhr, *f*	pendule, *f*

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

COURS VII/ VORLESUNG VII

VII.) L'hamiltonien

1. Conservation de l'énergie

Afin de procéder vers une formulation avancée de la mécanique, on considère d'abord l'énergie d'un système mécanique

Calculons la dérivée totale du lagrangien L par rapport au temps t:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}\dot{q}_j}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= \sum_j \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dot{q}_j \right) \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] + \frac{\partial L}{\partial t}
\end{aligned}$$

et il vient

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_j \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \qquad \text{(C)}$$

Définition: *La quantité* $\boxed{H := \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L}$ *s'appelle l'***hamiltonien**.

on retient la définition de l'hamiltonien $H := \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$

Théorème 1: *Si le lagrangien L ne dépend pas explicitement du temps t, alors l'hamiltonien H est conservé.*

Démonstration: de (C), on tire $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$ et de plus $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. QED

Théorème 2: *Pour des systèmes conservatifs, on a $H = E =$ énergie totale, si les forces de contrainte sont indépendantes du temps.*

Démonstration: si forces conservatives $V = V(q_i) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ et on a toujours eu $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2$, avec vitesse $\boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{r}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i$. On passe aux coordonnées généralisées

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i\big(q_1, \ldots, q_N\big)$$

si les forces de contrainte sont indépendantes du temps. Ainsi on peut écrire

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} \underbrace{\left(\sum_i m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \right)}_{} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

et T devient une forme quadratique homogène dans les $\dot{q}_j$

T devient une forme quadratique homogène dans les $\dot{q}_j$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} T_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k \quad , \quad T_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$$

et il vient

facteur 2, car 2 manières comment prendre la dérivée

$$\sum_\ell \dot{q}_\ell \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell} = \frac{1}{2}\sum_{\ell,j} T_{j,\ell}\,\dot{q}_\ell\,\dot{q}_j \cdot 2 = 2T$$

de sorte qu'on obtient enfin

$$H = \sum_\ell \dot{q}_\ell \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell} - L = 2T - \big(T - V\big) = T + V$$

ce qui est bien l'énergie totale, comme énoncé. QED

Définition: *Le passage* $L \mapsto H$ *est une* **transformation de Legendre**.

nous avons eu: $L = L\big(q, \dot{q}, t\big)$.

☞ maintenant, nous avons $H = H\big(q, p, t\big)$ et l'impulsion $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$.

N.B.: ! un hamiltonien dépend des impulsions p et **jamais** des vitesses $\dot{q}$!

2. Transformation de Legendre

L'hamiltonien $H = \sum_\ell \dot{q}_\ell \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell} - L = \sum_\ell \dot{q}_\ell p_\ell - L = H(q, p, t)$

? comment écire les équations de mouvement à l'aide de H ?

pour le voir, on étudie le différentiel total $\quad \mathrm{d}(ab) = \mathrm{d}a \cdot b + a \cdot \mathrm{d}b$

$$\mathrm{d}H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \mathrm{d}p_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \mathrm{d}t \qquad \text{(H)}$$

$$= \sum_i \left(-\frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \dot{q}_i \mathrm{d}p_i + \underbrace{\mathrm{d}\dot{q}_i p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i}_{=0} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t$$

$$= \sum_i \left(-\dot{p}_i \mathrm{d}q_i + \dot{q}_i \mathrm{d}p_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t \qquad \text{(L)}$$

avec l'éq. d'Euler-Lagrange $\dot{p}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$.

Compaison des éqs. (H) et (L) donne les **équations canoniques**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Exemple d'une transformation de Legendre (presque trivial):

une particule en $1D$, force conservative

(1) le lagrangien s'écrit $L = T - V = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$

(2) du lagrangien on trouve l'impulsion p, canoniquement conjugué à q

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \qquad (*)$$

(3) on exprime les vitesses $\dot{q}$ à l'aide des impulsions p, via (*): $\Rightarrow \dot{q} = \frac{1}{m}p$

(4) on calcule l'hamiltonien, tout en éliminant $\dot{q}$

$$H = \dot{q}p - L = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

(5) les équations canoniques s'écrivent comme suit

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} = -V'(q)$$

N.B.: la 1ère est la transformation entre vitesses et impulsions,
la 2e est bien entendu le second axiome de Newton

Pour un système avec N degrés de liberté, les équations canoniques sont un système de $2N$ équadiffs couplées du 1er ordre. Mathématiquement, elles sont équivalentes aux N équadiffs d'Euler-Lagrange du 2e ordre.

Les équations canoniques traitent les coordonnées q_i et les impulsions p_i de la même manière.

On a l'habitude de spécifier des systèmes physiques en donnant leur hamiltonien.

Définition: *La coordonnée q_i et l'impulsion p_i sont des* **variables canoniquement conjuguées**.

Définition: *Une coordonnée q_c est* **cyclique**, *si* $\frac{\partial H}{\partial q_c} = 0$.

Théorème: *Si q_c est cyclique, alors l'impulsion p_c est conservée.*

Démonstration: q_c cyclique $\Rightarrow 0 = \frac{\partial H}{\partial q_c} = -\dot{p_c} \Rightarrow p_c = \mathrm{cste}.$ QED.

N.B.: ceci n'est qu'une répétition du résultat analogue déjà tiré du lagrangien.

Exemple: une perspective vers la relativité restreinte d'Einstein (1905)

(1) Soit le lagrangien d'une particule $L = -mc^2\sqrt{1-\dot{q}^2/c^2} - V(q)$

$N = 1$ degré de liberté où c: vitesse lumière

(2) on trouve l'impulsion p, canoniquement conjuguée à la coordonnée q

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -mc^2 \frac{1}{2} \frac{-2\dot{q}c^{-2}}{\sqrt{1-\dot{q}^2/c^2}} = \frac{m\dot{q}}{\sqrt{1-\dot{q}^2/c^2}} \qquad (*)$$

(3) exprimer $\dot{q}$ à l'aide de p, en partant de (*)

$$p^2\left(1-\frac{\dot{q}^2}{c^2}\right) = m^2\dot{q}^2 \implies \dot{q} = \frac{p}{\sqrt{m^2+p^2/c^2}} = \frac{p}{m}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2}}$$

(4) on calcule l'hamiltonien, tout en éliminant $\dot{q}$

$$H = \dot{q}p - L = \frac{p^2}{m}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\left(\frac{p}{m}\right)^2 c^{-2}}{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2}} + V(q) = \frac{p^2/m+mc^2}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2}} + V(q) = mc^2\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2} + V(q)$$

ou encore $H = \sqrt{m^2c^4+p^2c^2} + V(q) = T + V$ est bien l'énergie totale.

N.B.: Si l'on développe H, pour p assez petit

$$H \simeq \frac{p^2}{m} + mc^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2} + \dots\right) + V(q) = \underbrace{mc^2}_{=E_{\text{repos}}} + \underbrace{\frac{p^2}{2m} + V(q)}_{=E_{\text{NR}}} + \dots$$

où E_{NR}: énergie non relativiste; $E_{\text{repos}} = mc^2$ énergie au repos (*équivalence masse-énergie*).

3. Principe d'Hamilton

Pour le mouvement du système entre les temps fixes t_1 et t_2, on a eu la stationarité de l'action

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L = 0$$

et où $q(t_1)$ et $q(t_2)$ sont maintenus fixes. Car $L = \sum_i \dot{q}_i p_i - H$, on peut dire aussi que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) = 0$$

ou encore

$$\boxed{\delta S = \delta \sum_i \int_{q_1}^{q_2} p_i \mathrm{d}q_i - \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, H = 0} \qquad (\#)$$

comme auparavant pour le lagrangien, on introduit les variations

$$\boxed{q_i(t,\alpha) = q_i(t,0) + \delta q_i(t) \;\;,\;\; p_i(t,\alpha) = p_i(t,0) + \delta p_i(t)} \qquad (*)$$

☞ Mais les variations δq_i et δp_i sont mutuellement indépendantes !

Avec la paramétrisation (*), on considère l'action $S = S(\alpha)$, et la variation

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} \mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) \cdot \mathrm{d}\alpha \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \right) \cdot \mathrm{d}\alpha
\end{aligned}$$

à l'aide de l'intégration par partie $\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} = \underbrace{p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}$

et de $\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \mathrm{d}\alpha$ et $\delta p_i = \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \mathrm{d}\alpha$ on trouve de (#)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_i \left[\underbrace{\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{} \delta q_i + \underbrace{\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)}_{} \delta p_i \right] \stackrel{!}{=} 0$$

ce qui est vrai pour toutes variations δq_i, δp_i. Ainsi on retrouve les équations canoniques

$$\boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}}$$

4. Transformations canoniques

BUT: trouver des nouvelles coordonnées Q_i et des nouvelles impulsions P_i telles que

$$\boxed{Q_i = Q_i(q, p, t) \quad , \quad P_i = P_i(q, p, t)} \qquad (K_1)$$

⚠ notation ici: $q = q_1, \ldots, q_N$ et $p = p_1, \ldots, p_N$

De plus, on cherche un nouvel hamiltonian $K = K(Q, P, t)$ tel que

$$\boxed{\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad , \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}} \qquad (K_2)$$

Définition: *Une transformation $(q, p, H) \mapsto (Q, P, K)$ qui respecte (K_1) et (K_2) est une* **transformation canonique**.

N.B.: les transformations canoniques sont les changements de variable qui respectent la structure des équations canoniques

Exemple: soit K tel que toutes les Q_i sont cycliques.

$\Rightarrow \dot{P}_i = 0 \Rightarrow P_i = \alpha_i = \text{cste}.$ $\qquad \Rightarrow K = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$

$\Rightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \omega_i = \text{cste}.$

$\Rightarrow Q_i(t) = \omega_i t + \beta_i$ $\qquad \Rightarrow$ résoudre ce sytème est une trivialité !

☞ nouvelle stratégie pour trouver le mouvement:

au lieu d'essayer de résoudre les équations canoniques (ou d'Euler-Lagrange), transformer sur un nouvel système avec dynamique évidente !

? comment trouver une telle transformation ?

☞ à partir du principe d'Hamilton $\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) = 0$, il faut aussi avoir, pour les nouvelles variables

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - K \right) = 0$$

pour une fonction F: $I = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = F(t_2) - F(t_1)$, donc $\delta I = \delta\big(F(t_2) - F(t_1)\big) = 0$ où les points d'extrème sont fixés ! Comparaison donne

$$\boxed{\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}}$$

La fonction F est la **fonction génératrice** de la transformation canonique.

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \qquad (\mathrm{K}_3)$$

La fonction génératrice F relie les anciennes variables q, p avec les nouvelles variables Q, P. Donc il existe quatre possibilités

1. $F = F_1(q, Q, t) \qquad p_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad , \quad P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} \qquad (\mathrm{k}.1)$

2. $F = F_2(q, P, t) \qquad p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad , \quad Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} \qquad (\mathrm{k}.2)$

3. $F = F_3(Q, p, t) \qquad q_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad , \quad P_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_i} \qquad (\mathrm{k}.3)$

4. $F = F_4(p, P, t) \qquad q_i = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad , \quad Q_i = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_i} \qquad (\mathrm{k}.4)$

Démonstration: rendons les transformations explicites pour la fonction $F_1 = F_1(q, Q, t)$

$$\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

on l'injectant ceci dans la relation (K_3), on trouve

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i = H - K + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Doit être valable pour tout $\dot{q}_i$, $\dot{Q}_i \Rightarrow$ l'éq. (k.1) et $K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$.

La fonction génératrice F_2 est traitée à l'aide d'une transformation de Legendre

$$F_2(q,P,t) = F_1(q,Q,t) + \sum_i P_i Q_i$$

ce qui est compatible avec $\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i$. On l'injecte dans ($K_3$)

$$\sum_i (p_i \dot{q}_i - H) = \sum_i (P_i \dot{Q}_i - K) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_2 - \sum_i P_i Q_i)$$

$$= \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}t} - \sum_i (\dot{P}_i Q_i + P_i \dot{Q}_i) = -\sum_i \dot{P}_i Q_i - K + \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}t}$$

et de plus $\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$. En l'injectant dans l'éq. ci-dessus, on trouve

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \left(Q_i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right) \dot{P}_i = H - K + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Car ceci doit être vrai pour tout $\dot{q}_i$, $\dot{P}_i$, on arrive aux éqs. (k.2) et $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$.
Les deux autres cas F_3, F_4 se traitent de manière analogue. QED

N.B.: les éqs. (k.1)-(k.4) donnent les règles de transformation canonique.

Exemples des transformations canoniques

N.B.: pour simplicité, on ne traite que le cas de $N = 1$ degré de liberté.

1. $F_2 = F_2(q, P, t) = qP$ ou $F_2 = \sum_i q_i P_i$

$$\Longrightarrow \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P \ , \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q$$

ceci est la transformation identique $Q = q$ et $P = p$.

2. $F_2 = F_2(q, P, t) = f(q, t)P$ ou $F_2 = \sum_i f_i(q, t)P_i$

$$\Longrightarrow \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = f'(q, t)P \ , \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = f(q, t)$$

☞ *chaque changement de coordonnée $Q = f(q, t)$ est canonique*

structure des équations canoniques est la même pour toutes les coordonnées **!**

3. $F_1 = F_1(q, Q, t) = qQ$

$$\Longrightarrow \quad p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = Q \ , \quad P = -\frac{\partial F_2}{\partial Q} = -q$$

☞ permutation de p et de q à un signe près

! *les variables q et p jouent exactement les mêmes rôles* **!**

4. Soit $F_1 = F_1(q, Q) = \frac{m}{2}\omega q^2 \cot Q$.

On calcule d'abord les 2 variables manquantes, puis on peut invertir

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q \\ P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\, \sin Q \\ p = \sqrt{2m\omega P}\, \cos Q \end{cases}$$

Soit $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2$, avec $\omega^2 = \frac{k}{m}$

⚠ honi soit qui mal y pense et ne reconnaît pas l'oscillateur harmonique

car $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$, on a $K = H$.

$$\Rightarrow \quad K = H = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P = \text{ énergie } E$$

Les équation canoniques s'écrivent

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \ , \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega$$

on a donc $P = \frac{E}{\omega} = \text{cste.}$ and $Q(t) = \omega t + \beta$.

☞ la transformation inverse permet de trouver le mouvement

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\, \sin\big(\omega t + \beta\big)$$

et ce résultat a été trouvé par les seules transformations !

5. Théorie de Hamilton et Jacobi

? Comment trouver systématiquement une fonction génératrice ?

☞ nous allons esquisser une manière comment y répondre

? quel est l'hamiltonien K le plus simple possible et/ou imaginable ?

5. Théorie de Hamilton et Jacobi

? Comment trouver systématiquement une fonction génératrice ?

☞ nous allons esquisser une manière comment y répondre

? quel est l'hamiltonien K le plus simple possible et/ou imaginable ?

☞ évidemment $K = 0$!

dans ce cas, on tire des équations canoniques

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad , \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0$$

par conséquent

$$\boxed{P_i = \alpha_i = \text{cste.} \quad , \quad Q_i = \beta_i = \text{cste.}}$$

et de plus $0 = K = H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t}$. Nous utilisons $F = F_2(q, P, t)$. Ainsi

$$\boxed{H\left(q_1, \ldots, q_N, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial q_N}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0}$$

Ceci est l'**équation Hamilton-Jacobi**.

$$\boxed{H\left(q_1,\ldots,q_N,\frac{\partial F_2}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial F_2}{\partial q_N},t\right)+\frac{\partial F_2}{\partial t}=0} \qquad (*)$$

L'équation Hamilton-Jacobi (*) est une équadiff partielle en $N+1$ variables: $q_1,\ldots,q_N,t$
La solution est spécifiée à l'aide de $N+1$ constantes d'intégration $\alpha_1,\ldots,\alpha_N,\alpha_{N+1}$.
Car (*) ne contient que des dérivées de F_2: si F_2 en est solution, $F_2+\alpha$ l'est aussi.

- Prenons donc $\alpha=\alpha_{N+1}$ comme une des constantes.
- pour le reste: choisir $\boxed{P_i=\alpha_i,\ i=1,\ldots,N}$
- changement de notation: à la place de F_2, on écrit S

$$S=S\big(q_1,\ldots,q_N,\alpha_1,\ldots,\alpha_N,t\big)=S\big(q_1,\ldots,q_N,t\big)$$

et l'équation Hamilton-Jacobi prend la forme

$$\boxed{H\left(q_1,\ldots,q_N,\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_N},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0} \qquad (**)$$

- une fois la solution S obtenue, on peut calculer

$$Q_i=\beta_i=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}$$

et on met ensuite les q_i en évidence.

Interprétation de S:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L$$

donc $S = \int \mathrm{d}t\, L + \mathrm{cste}$ est l'action. à une constante additive près

N.B.: dans la pratique, presque toujours $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, donc $H = H(q, p)$.

☞ L'équation Hamilton-Jacobi (**) prend alors la forme

$$\boxed{H\left(q_1, \ldots, q_N, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_N}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \qquad (***)$$

Une solution de (***) s'obtient avec l'ansatz $S(q,t) = W(q) - \alpha_1 t$

$\Rightarrow$ $\boxed{H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1 = E}$ et on identifie l'énergie comme la constante α_1

$\Rightarrow$ $Q_1 = \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - t$

$$\boxed{t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \quad , \quad \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad \text{pour } i = 2, \ldots, N}$$

Exemple d'application: un corps avec force centrale

Pour un potentiel central $V(r)$ (on ne considère que le mouvement autour du centre de masses), l'hamiltonien en coordonnées spheriques s'écrit

$$\boxed{H = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2\right) + V(r)}$$

où p_r, p_θ sont les impulsions canoniquement conjuguées à r et θ.

Car H est cyclique en θ, on fait l'ansatz $W = W(r,\theta) = W_1(r) + \alpha_\theta\theta$

L'injection dans l'équation Hamilton-Jacobi $H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1$ donne

$$\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}\right] + V(r) = \alpha_1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}r} = \sqrt{2\mu\left(\alpha_1 - V(r)\right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}$$

ainsi, la fonction génératrice s'écrit

$$W = \int \mathrm{d}r \sqrt{2\mu\Big(\alpha_1 - V(r)\Big) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} + \alpha_\theta \theta$$

et la dernière relation pour le mouvement devient $\beta_\theta = \text{cste.}$

$$\beta_\theta = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\theta} = -\int \frac{\alpha_\theta \mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2\mu\Big(\alpha_1 - V(r)\Big) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} + \theta$$

Ceci n'est rien d'autre que l'*équation pour l'orbite* $r = r(\theta)$. avec $\begin{cases} \alpha_1 = E \\ \alpha_\theta = \ell \end{cases}$

$\Rightarrow$ On peut définir un algorithme pour obtenir l'orbite:

(1) déterminer l'hamiltonien $H = H(q, p)$.

(2) remplacer p par $\frac{\partial W}{\partial q}$ en H

(3) trouver des coordonnées cycliques, p.ex. θ si symétrie sphérique
si possible, ansatz de séparation $W = W_1 + \alpha_\theta \theta$

(4) écrire l'éq. pour W_1 et la résoudre

(5) écrire les équations $\beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$, $i \neq 1$ pour l'orbite.

le calcul explicite des intégrales reste à faire

☞ *nettement plus efficace que méthodes antérieures*.

Défi: pour la force gravitationnelle $V(r) = -\frac{k}{r}$, retrouver les coniques comme orbites !

nous connaissons déjà deux autres manières pour le démontrer, non ?

Indication: changement de variable d'intégration $u = \frac{1}{r}$.

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Hamiltonfunktion, *f*	l'hamiltonien, *m*
kanonische Gleichung, *f*	équation canonique, *f*
kanonisch konjugiert	canoniquement conjugué
erzeugende Funktion, *f*	fonction génératrice, *f*
skizzieren	esquisser
Herausforderung, *f*	défi, *m*
herausfordern	lancer un défi

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*