Mécanique Analytique 1

Malte Henkel

[a]Laboratoire de Physique de Chimie Théoriques (CNRS UMR 7019),
Université de Lorraine **Nancy**, France

[b]Centro de Física Téorica e Computacional, Universidade de Lisboa, Portugal

courriel/E-Post: `malte.henkel@univ-lorraine.fr`

Cours Semestre d'hiver 2021/22, Université de Lorraine **Nancy**

Un peu de lecuture complémentaire/*Literaturhinweise*

L.D. Landau et E.M. Lifchitz, *Mécanique*, Ellipses (Paris) traduction allemande

H. Goldstein *et al.*, *Classical Mechanics*, 3e traductions allemandes & françaises

M.L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 3e, Wiley (New York)

Vl. Dotsenko *et al.*, *Méthodes mathématiques pour la physique*, Dunod (Paris 2018)

B. Noble et J.W. Daniel, *Applied linear algebra*, 3e, Prentice Hall (New York)

P. Olver, C. Shakiban, *Applied linear algebra*, Springer (Heidelberg)

encyclopédique, avec plein d'exemples

Contenu/*Inhalt*

Cours I/Vorlesung I: Vecteurs et espaces vectoriels/*Vektoren und Vektorräume* 8

Cours II/Vorlesung II: Applications linéaires/*Lineare Abbildungen* 23

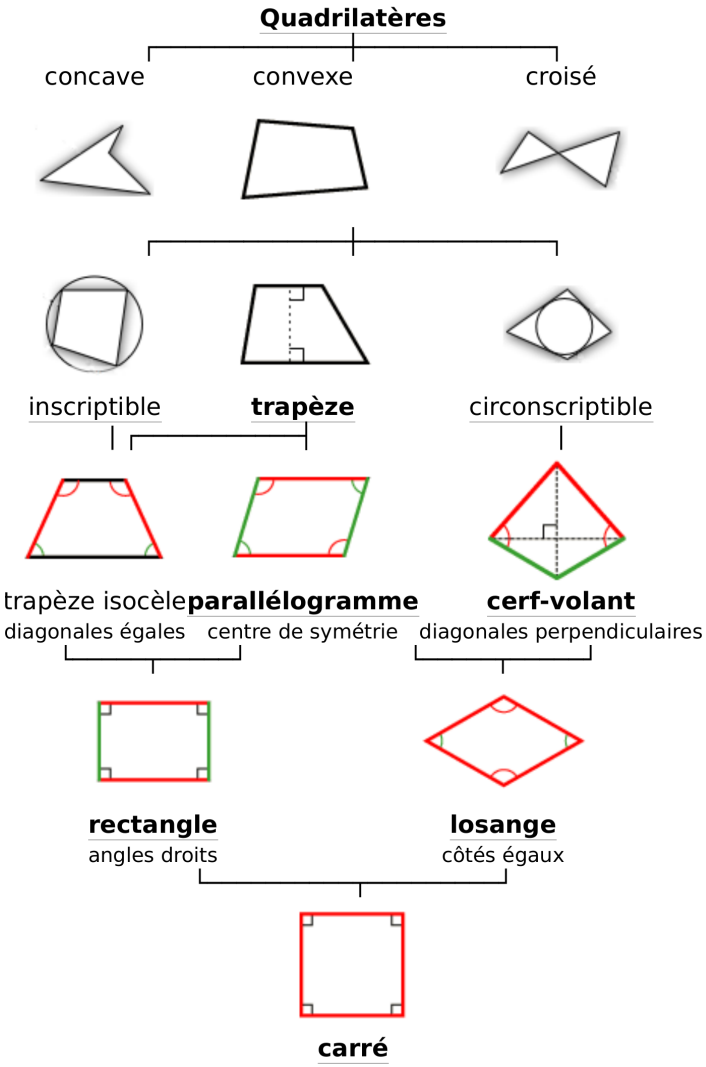
Cours III/Vorlesung III: Équations linéaires & orthogonalité/ *Lineare Gleichungen & Orthogonalität* 48

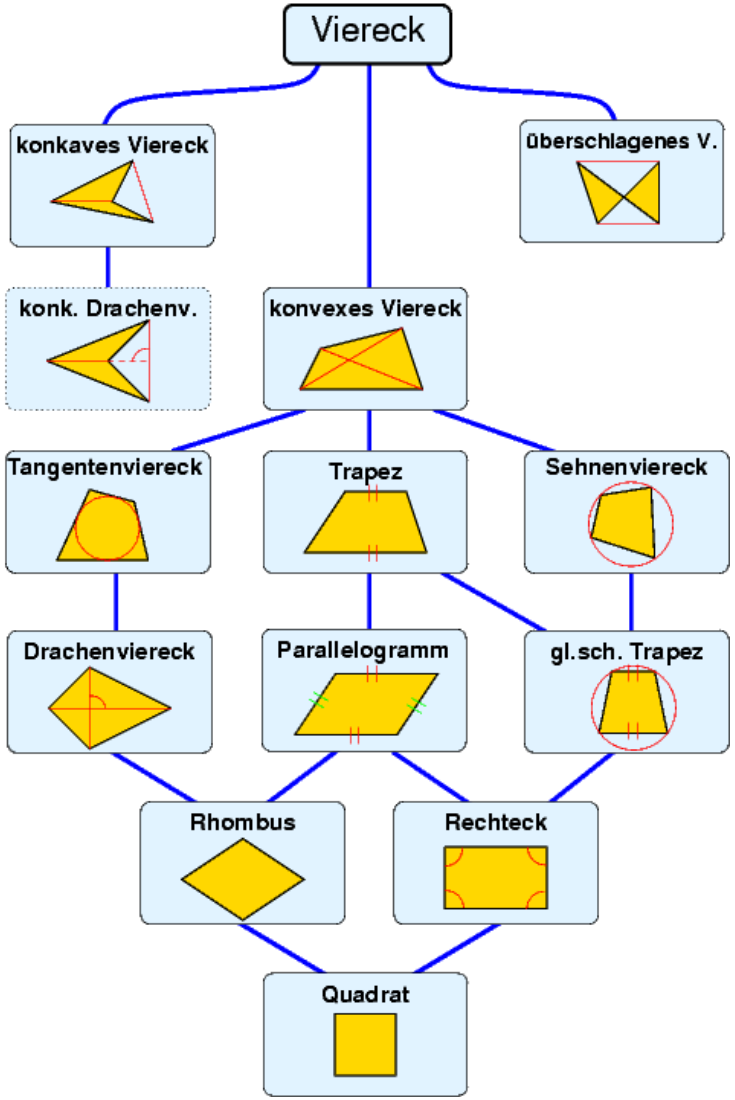
Cours IV/Vorlesung IV: Valeurs propres et vecteurs propres/ *Eigenwerte und Eigenvektoren* 75

Cours V/Vorlesung V: Fondations de la mécanique/*Grundlagen der Mechanik* 103

Cours VI/Vorlesung VI: Le lagrangien/*Die Lagrangefunktion* 127

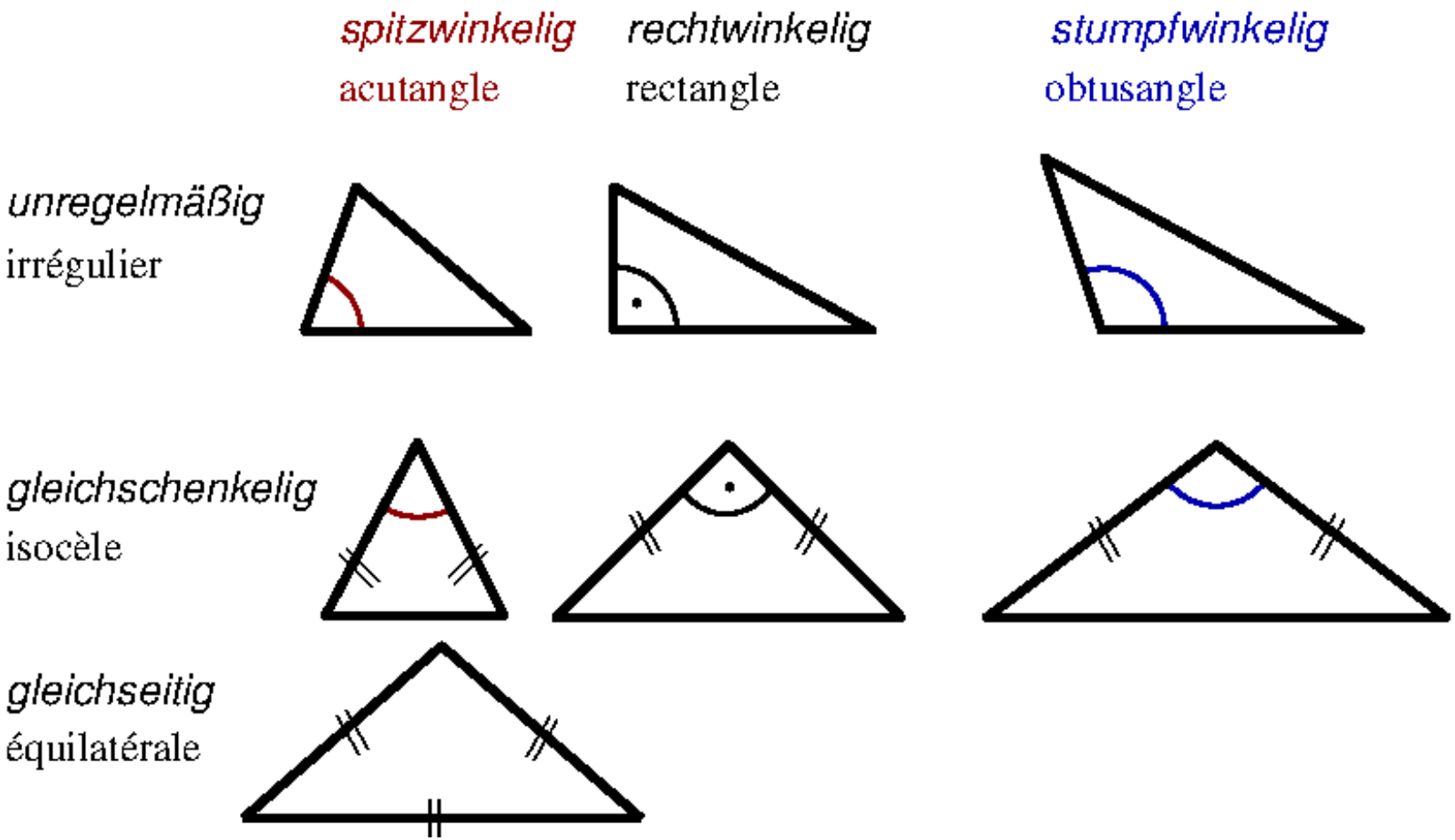
Terminologie française des quadrilatères / *deutsche Terminologie der Vierecke*





sources: `https://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrilatère` ; `https://de.wikipedia.org/wiki/Viereck`

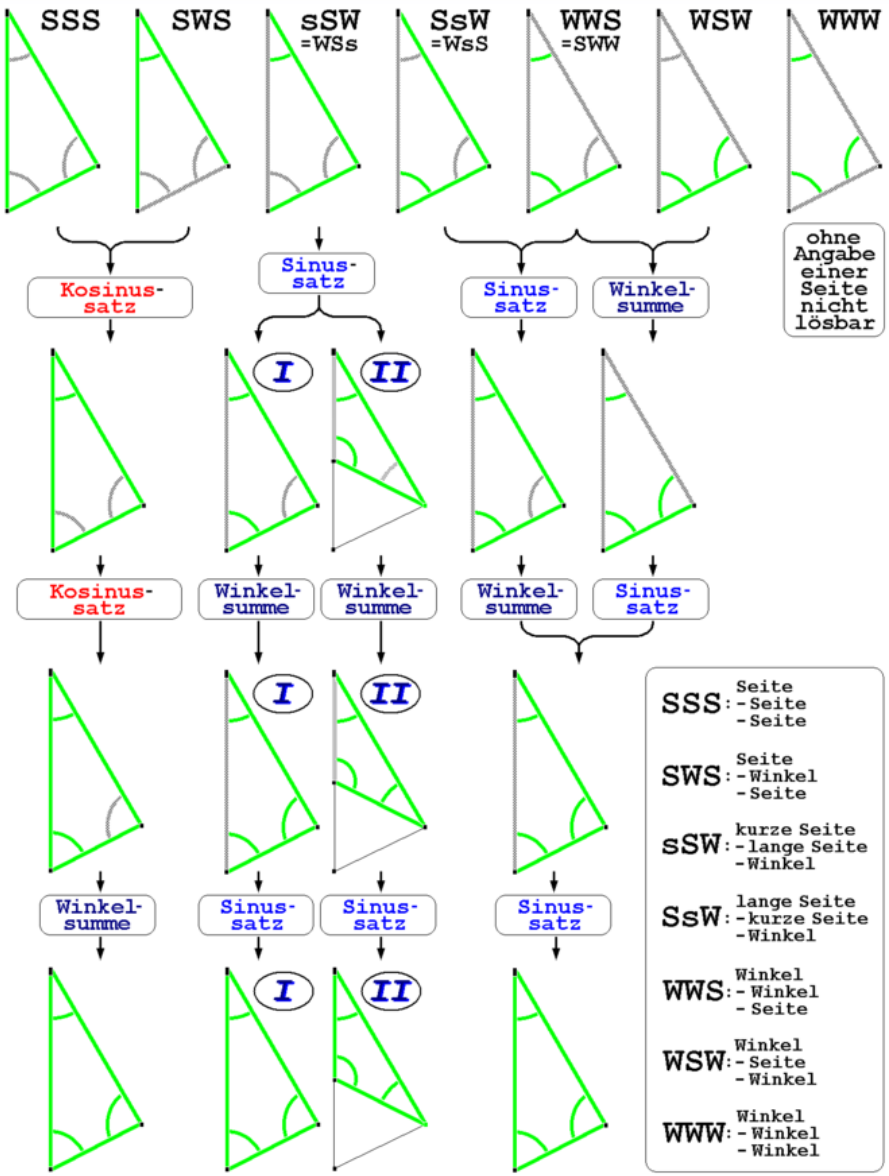
Terminologie française des triangles / *deutsche Terminologie der Dreiecke*



Un triangle acutangle s'appelle un *oxygone*.
Un triangle obtusangle s'appelle un *ambligone*.

Pour un triangle équilatérale, les trois angles intérieurs sont égaux à 60°.
In einem gleichseitigen Dreieck sind die drei Innenwinkel gleich 60°.

voici un schéma sur la route à suivre pour construire un triangle arbitraire



S: côte (**S**eite) donné
W: angle (**W**inkel) donné
s: côte inconnu

outils requis:
Kosinussatz: théorème du cosinus
Sinussatz: théorème du sinus
Winkelsumme: formule sur la somme des angles

source: https://de.wikipedia.org/wiki/Dreieck

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Näherung, *f*	approximation, *f*
Gleichgewicht, *n*	équilibre, *m*
stabil	stable
unstabil	instable
Zerlegung, *f*	décomposition, *f*
zerlegen	décomposer
vertauschen	permuter
erzwungene Schwingung, *f*	oscillation forcée, *f*
lineare Algebra, *f*	algèbre linéaire, *f*
Ansatz, *m*	ansatz, *m*
Lösung, *f*	solution, *f*
lösen (eine Gleichung, ein Rätsel)	résoudre (une équation, une énigme)
Gleichung, *f*	équation, *f*
algebraische Gleichung, *f*	équation algébrique, *f*
Differentialgleichung, *f*	équation différentielle, *f*
Integralgleichung, *f*	équation intégrale, *f*

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

COURS I/ VORLESUNG I

La physique essaie d'obtenir une déscription quantitative et objective des phénomènes trouvées dans la Nature, et de leurs causes

La compréhension progresse en plusieurs étapes:

* observation qualitative des phénomènes, ou **expériences** ciblées
* déscription quantitative, souvent à l'aide des 'lois de la Nature'
* formulation des hypothèses sur les causes des observations
* contrôle quantitative des conséquences des hypothèses

☞ toute compréhension en physique est 'préliminaire'

des nouvelles expériences peuvent modifier notre compréhension à tout moment

⇒ on ne dispose pas et on ne disposera jamais des 'vérités éternelles'

pourtant, la technologie déduite de la physique marche, et pas si mal ...

il est certes possible de dire ce qui est impossible (p.ex. 'physique' d'Aristote), mais on ne démontrera jamais des théorèmes avec la rigueur mathématique

☞ aucune **expérience** ne donne un résultat précis,
il y en a toujours des incertitudes de mesure

☞ importance considérable des **techniques mathématiques**

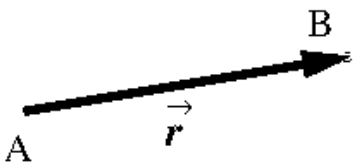
déjà pour analyser des expériences ...

I) Vecteurs et matrices

1. Vecteurs et espaces vectoriels

la notion d'un vecteur est à peu près connue de la géométrie élémentaire:

"c'est une ligne orientée entre deux points" ou *'flèche indienne'/'Indianerpfeil'*



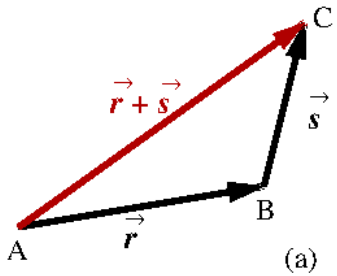
on écrit $\overrightarrow{AB}$ pour la ligne orientiée qui relie le point A avec le point B

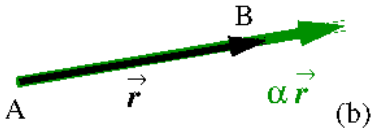
ou bien on écrit le vecteur $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{AB}$ (ou $\vec{r}$)

(a) on peut prendre la 'somme' de deux vecteurs

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\boldsymbol{t} \quad = \boldsymbol{r} \quad + \boldsymbol{s}$ est vecteur





(b) on peut multiplier un vecteur avec un nombre ('scalaire') $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

si $\boldsymbol{r}$ est vecteur, alors $\alpha\boldsymbol{r}$ est aussi vecteur

(c) un vecteur a une 'longueur' $r = |\boldsymbol{r}| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ = distance entre A et B

'évidemment' $\left|\overrightarrow{AC}\right| \leq \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| \Leftrightarrow |\boldsymbol{t}| \leq |\boldsymbol{r}| + |\boldsymbol{s}|$ le détour est plus long

$$\boxed{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}| \leq |\boldsymbol{r}| + |\boldsymbol{s}|} \quad , \quad \text{inégalité du triangle}$$

nous donnons une définition abstraite et générale de ces propriétés

Définition: *Un ensemble V est un* **espace vectoriel**, *s'il existe des applications*

$$\begin{array}{rcl} + & : & V \otimes V \longrightarrow V \\ & & (x,y) \mapsto x+y \end{array} \qquad \text{addition des vecteurs}$$

$$\begin{array}{rcl} \bullet & : & \mathbb{R} \otimes V \longrightarrow V \\ & & (\alpha,x) \mapsto \alpha \cdot x \end{array} \qquad \text{multiplication d'un vecteur par un scalaire}$$

telles que $\forall x, y, z \in V$ *et* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i) $(x+y)+z = x+(y+z)$

ii) $x+y = y+x$

iii) $\exists 0 \in V: \ x+0 = x$

iv) $\forall x \in V \, \exists (-x) \in V: \ x+(-x) = 0$

v) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

vi) $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

vii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

viii) $\exists 1 \in \mathbb{R}: \ 1 \cdot x = x$

On dit que $(V,+)$ *est un* **groupe** *(abélien).* *(sans la multiplication avec un scalaire)*

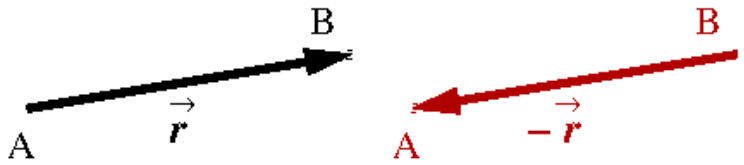
Les éléments $x \in V$ *s'appellent* **vecteurs**, $\alpha \in \mathbb{R}$ *s'appelle* **scalaire**.

N.B.: on a défini des **espaces vectoriels réels**. Si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, on obtient des **espaces vectoriels complexes**.

Notation: presque toujours, on écrit αx au lieu de $\alpha \cdot x$. On écrit aussi $\alpha x = x\alpha$.

Exemples des espaces vectoriels

1) les 'flèches indiennes': avec des opérations habituelles tirées de la géométrie élémentaire



il suffit d'identifier

exercice

(α) le vecteur nul: $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$

(β) si $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{AB}$, alors $-\boldsymbol{r} = \overrightarrow{BA}$

2) les 'vecteurs cartésiens' $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ avec $a_i \in \mathbb{R}$. On pose $(\alpha \in \mathbb{R})$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha\, \boldsymbol{a} = \alpha \cdot \boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur nul $\mathbf{0}$ et le vecteur inverse de $\boldsymbol{a}$ sont identifiés comme suit

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad -\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

La vérification des axiomes d'espace vectoriel est directe.

exercice

Cet espace vectoriel s'écrit $\mathbb{R}^3$.

[pour cet exemple $\mathbb{R}^3$, la vérification des axiomes de l'espace vectoriel se fait ainsi:

$$\text{(i)}\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ a_2+b_2+c_2 \\ a_3+b_3+c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \\ b_3+c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$\text{(ii)}\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+a_1 \\ b_2+a_2 \\ b_3+a_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

$$\text{(iii)}\quad \text{soit}\ \ \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} a_1+0 \\ a_2+0 \\ a_3+0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$

$$\text{(iv)}\quad \text{soit}\ \ (-\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} a_1+(-a_1) \\ a_2+(-a_2) \\ a_3+(-a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\text{(v)}\ \alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} \alpha(a_1+b_1) \\ \alpha(a_2+b_2) \\ \alpha(a_3+b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha b_1 \\ \alpha b_2 \\ \alpha b_3 \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$$

$$\text{(vi)}\ (\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a_1 \\ (\alpha+\beta)a_2 \\ (\alpha+\beta)a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_1 \\ \beta a_2 \\ \beta a_3 \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$$

$$\text{(vii)}\ (\alpha\,\beta)\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha\beta\, a_1 \\ \alpha\beta\, a_2 \\ \alpha\beta\, a_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta a_1 \\ \beta a_2 \\ \beta a_3 \end{pmatrix} = \alpha(\beta\boldsymbol{a}) \quad ; \quad \text{(viii)}\ (1\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 1\, a_1 \\ 1\, a_2 \\ 1\, a_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$

]

3) les 'vecteurs cartésiens' en d dimensions $\mathbb{R}^d$: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$ avec $a_i \in \mathbb{R}$.
On pose ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_d + b_d \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha\, \boldsymbol{a} = \alpha \cdot \boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_d \end{pmatrix}$$

On a le vecteur nul $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur inverse de $\boldsymbol{a}$: $-\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_d \end{pmatrix}$.

4) soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle réel (p.ex. $I = [a, b]$) et soit V l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$. Ici, chaque fonction f est un vecteur. On pose

$$\big(f + g\big)(x) := f(x) + g(x) \ \ , \ \ \big(\alpha\, f\big)(x) = \big(\alpha \cdot f\big)(x) := \alpha\, f(x)$$

à gauche, on a les operations en V, à droite ce sont des opérations de nombres réels

on identifie: (α) vecteur nul, c'est la fonction $0 : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$
(β) vecteur inverse $-f$ de f: $-f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -f(x)$.

Encore une fois, la vérification des axiomes d'espace vectoriel est directe exercice

N.B.: ce genre d'exemple est utilisé souvent en mécanique quantique

5) une **matrice** 2×2 est un schéma quadratique

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{avec } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

On pose pour l'addition et la multiplication avec un scalaire réel

$$a + b := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha\, a = \alpha \cdot a := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

à gauche, on a les operations en V, à droite ce sont des opérations de nombres réels

L'ensemble $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de telles matrices est un espace vectoriel. exercice

on peut aisément multiplier de telles exemples, avec une vérification directe

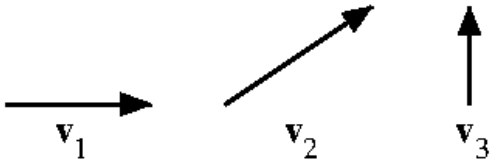
2. Dimensions

Définition: *Soit V espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ces vecteurs sont* **linéairement indépendants** *si l'équation*

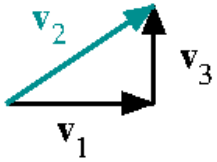
$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

a pour seule solution $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.
Sinon, les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont **linéairement dépendants**.

Exemples: **1)** les flèches indiennes (dans le plan).

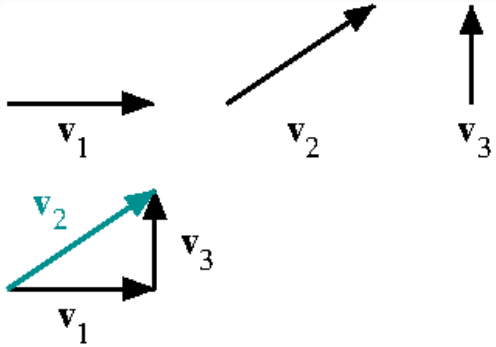


les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ sont linéairement indépendants



les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ sont linéairement dépendants, car
$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$

1) les flèches indiennes (dans le plan).



les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ sont linéairement indépendants

les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ sont linéairement dépendants, car

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$$

2) pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on admet

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc, de nouveau $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$.
L'ensemble $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ est linéairement dépendant, mais chacun des ensembles $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, $\{\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3\}$ est linéairement indépendant.

Définition: *Le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel V est sa* **dimension**, *notée* $\dim V$.

Exemples:

$$1) \quad \dim \mathbb{R}^2 = 2 \quad , \quad 2) \quad \dim \mathbb{R}^d = d \quad , \quad 3) \quad \dim \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$$

Définition: *Soit* $\dim V = n$ *et soit* $\{v_1, \ldots, v_n\} \in V$ *un ensemble maximal de vecteurs linéairement indépendants. Si pour chaque* $v \in V$*, on a*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad ; \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

alors $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une **base** de V. Les nombres α_i sont les **composantes** *de* v*.*

Exemple: pour $V = \mathbb{R}^d$, on a une **base canonique**

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \boldsymbol{v}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un vecteur $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$ a les composantes $a_1, a_2, \ldots, a_d$ dans cette base canonique.

N.B.: on écrit souvent $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d = \boldsymbol{v}_d$ pour la base canonique (ou $\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_3$ en $\mathbb{R}^3$)

Définition: *Soient V, W des espaces vectoriels et* $\dim V = \dim W$. *V et W sont* **isomorphes** *(noté $V \triangleq W$) s'il existe une application bijective $f : V \to W$ telle que*

$$f\left(\alpha \cdot v + \beta \cdot v'\right) = \alpha \cdot f(v) + \beta \cdot f(v') \ ; \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ \forall v, v' \in V$$

à gauche: opération en V; à droite: opération en W

N.B.: car f est bijective, son inverse $f^{-1} : W \to V$ existe et

$$f^{-1}\left(\alpha \cdot w + \beta \cdot w'\right) = \alpha \cdot f^{-1}(w) + \beta \cdot f^{-1}(w')$$

On dit qu'un **isomorphisme** 'préserve la structure'.

Proposition: *L'espace vectoriel des 'flèches indiennes' dans le plan et l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes.*

N.B.: l'isomorphie est la manière mathématique d'exprimer l'identité entre espaces vectoriels

Proposition: *L'espace vectoriel des 'flèches indiennes' dans le plan et l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes.*

Démonstration: dans le plan, on prend la base $\boldsymbol{e}_1 = \bullet\!\longrightarrow$ et $\boldsymbol{e}_2 = \uparrow\!\bullet$

pour les flèches et dans $\mathbb{R}^2$, on prend la base $\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour les flèches $\in V$, chaque vecteur $\boldsymbol{v} = \bullet\!\nearrow = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2$. On y associe

en $W = \mathbb{R}^2$ le vecteur $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2$.

Évidemment, cette application $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{w}$ est définie pour chaque vecteur, est bijective et préserve la structure. QED

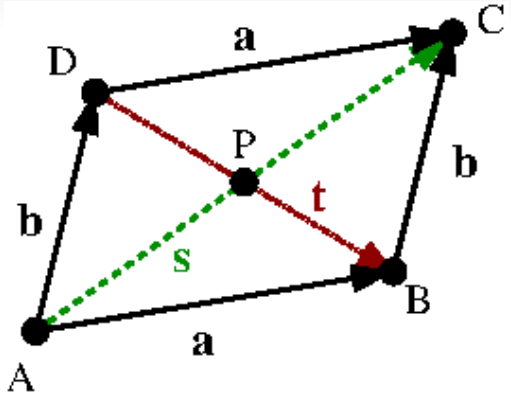
☞ ainsi, on a un lien important entre la géométrie et l'algèbre DESCARTES

Exemple: utilité de relier les opérations vectorielles aux figures géométriques

* construire le parallélogramme ABCD

ses diagonales sont reliées aux vecteurs $\boldsymbol{a} \not\parallel \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{s} = \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \ , \quad \boldsymbol{t} = \overrightarrow{DB} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$$



Proposition: *Les deux diagonales $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ s'entrecoupent en leurs milieux.*

Démonstration: un point sur la diagonale $\overline{AC}$ a le vecteur de position origine à A

$$\lambda\, \overrightarrow{AC} = \lambda \boldsymbol{s} = \lambda\big(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\big) \ , \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad \text{(P1)}$$

et un point sur la diagonale $\overline{DB}$ a le vecteur de position

$$\boldsymbol{b} + \mu\, \overrightarrow{DB} = \boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{t} = \boldsymbol{b} + \mu\big(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\big) \ , \quad 0 \leq \mu \leq 1 \qquad \text{(P2)}$$

Les deux diagonales s'entrecoupent ssi $\lambda\big(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\big) \stackrel{!}{=} \boldsymbol{b} + \mu\big(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\big)$. Car les vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sont linéairement indépendants, on peut comparer leurs coéfficients. Ceci donne

$$\boxed{\lambda = \mu \ , \quad \lambda = 1 - \mu} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \mu = \tfrac{1}{2} \quad \text{fixe un seul point P}$$

Le point P donné par $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ est au milieu des segments $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$. QED

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Vektor, *m*	vecteur, *m*
Vektorraum, *m*	espace vectoriel, *m*
Untervektorraum, *m*; Unterraum, *m*	sous-espace vectoriel, *m*
Skalar, *m*	scalaire, *m*
Dreiecksungleichung, *f*	inégalité du triangle, *f*
Gruppe, *f*	groupe, *m*
Untergruppe, *f*	sous-groupe, *m*
linear unabhängig	linéairement indépendant
linear abhängig	linéairement dépendant
umkehrbar eindeutig; bijektiv	biunivoque; bijectif
eindeutig; injektiv	univoque; injectif
Isomorphismus, *m*	isomorphisme, *m*
isomorph	isomorphe
Strecke, *f*	segment, *m*
Gerade, *f*	droite, *f*
sich schneiden	s'entrecouper
Mittelpunkt, *m*	milieu, *m*
genau dann, wenn	si et seulement si (souvent abregé en: ssi)

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

COURS II/ VORLESUNG II

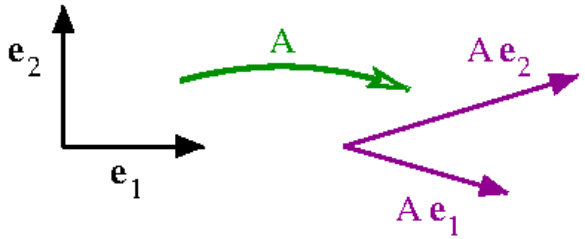
3. Applications linéaires

Définition: *Soient V, W des espaces vectoriels et $A : V \to W$ une application. A est* **linéaire**, *si* $\forall x, y \in V$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{(i)} \;\; A(x+y) = Ax + Ay \;\; , \;\; \text{(ii)} \;\; A(\alpha\, x) = \alpha\, Ax}$$

Exemples: **1)** soit $V = W \triangleq \mathbb{R}^2$ et soit $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de V. Si A est linéaire, on a les 2 vecteurs

$$A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad , \quad A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$



on peut donc associer à l'application linéaire $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

en écrivant

$$A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad , \quad A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

en général, $\boldsymbol{v} \in V \triangleq \mathbb{R}^2$ s'écrit $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, donc

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

ceci donne la $\boxed{\textit{règle comment multiplier une matrice avec un vecteur}}$ (pour $\mathbb{R}^2$)

2) Soient $U = V = W \triangleq \mathbb{R}^2$ et $A : U \to V$ et $B : V \to W$ linéaires.
Donc l'application $C := BA : U \to W$ est linéaire, car

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad C(x+y) &= B\big(A(x+y)\big) = B\big(Ax + Ay\big) = BAx + BAy = Cx + Cy \\ \text{(ii)} \quad C(\alpha\, x) &= B\big(A(\alpha\, x)\big) = B\big(\alpha\, Ax\big) = \alpha\, BAx = \alpha\, Cx \end{aligned}$$

on associe des matrices à B et à A

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} \in U$, on a $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$

l'application de la règle ci-dessus donne

$$
\begin{aligned}
C\boldsymbol{v} &= B(A\boldsymbol{v}) = B\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11}(a_{11}x + a_{12}y) + b_{12}(a_{21}x + a_{22}y) \\ b_{21}(a_{11}x + a_{12}y) + b_{22}(a_{21}x + a_{22}y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

on le compare à la formule $C\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c_{11}x + c_{12}y \\ c_{21}x + c_{22}y \end{pmatrix}$ pour obtenir

$$
\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}
$$

ceci donne la $\boxed{\textit{règle comment multiplier deux matrices } C = BA}$ (pour $\mathbb{R}^2$)

3) Soient $V = W = \mathbb{R}^d$, $A : V \to W$ linéaire et $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On associe à l'application A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

où $\quad A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{d1} \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{d2} \end{pmatrix}$, $\ldots$, $A\boldsymbol{e}_d = \begin{pmatrix} a_{1d} \\ a_{2d} \\ \vdots \\ a_{dd} \end{pmatrix}$ sont les images des $\boldsymbol{e}_i$

Si $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + v_d\boldsymbol{e}_d$, avec $v_i \in \mathbb{R}$

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1d}v_d \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2d}v_d \\ \vdots \\ a_{d1}v_1 + a_{d2}v_2 + \ldots + a_{dd}v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^d a_{1i}v_i \\ \sum_{i=1}^d a_{2i}v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^d a_{di}v_i \end{pmatrix}$$

ce qu'on peut aussi écrire en notation des composantes

$$\boxed{(Av)_j = \sum_{i=1}^d a_{ji}v_i \quad ; \quad j = 1, \ldots d}$$

règle sur la multiplication d'une matrice avec un vecteur

$$\boxed{(Av)_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ji} v_i \quad ; \quad j = 1, \dots d}$$

de même, si B est application linéaire

$$\boxed{(BA\,v)_k = \sum_{j=1}^{d} b_{kj} (Av)_j = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} b_{kj} a_{ji}\, v_i \quad ; \quad k = 1, \dots d}$$

ou encore, directement pour les matrices $\boxed{(BA)_{ki} = \sum_{j=1}^{d} b_{kj} a_{ji}}$

si l'on veut écrire pour les matrices $d \times d$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1d} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d1} & b_{d2} & \cdots & b_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdots & \\ \cdot & c_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdot & \cdots & \end{pmatrix}$$

p.ex. $c_{22} = b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22} + \ldots + b_{2d} a_{d2}$

règle: **ligne** $*$ **colonne** du produit matriciel Zeile $*$ Spalte

4) Soit $I = [-1,1] \subset \mathbb{R}$ et $C^0(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} |\, f \text{ continû sur } I \}$.

en analyse mathématique on démontre qu'alors f est borné sur I, c.à.d. $|f(x)| \leq M \ \forall x \in I$.

L'opérateur $A : C^0(I) \to C^0(I)$, $\big(Af\big)(x) := \int_{-1}^{x} \mathrm{d}y\, f(y)$ est linéaire, car

$$\big(A(f+g)\big)(x) = \int_{-1}^{x} \mathrm{d}y\, \big(f(y)+g(y)\big) = \int_{-1}^{x} \mathrm{d}y\, f(y) + \int_{-1}^{x} \mathrm{d}y\, g(y) = \big(Af\big)(x) + \big(Ag\big)(x)$$

$$\big(A(\alpha f)\big)(x) = \int_{-1}^{x} \mathrm{d}y\, \alpha f(y) = \alpha \int_{-1}^{x} \mathrm{d}y\, f(y) = \alpha \big(Af\big)(x)$$

Un **opérateur** renvoie une fonction f sur une autre fonction.

5) Soit $I = [-1,1] \subset \mathbb{R}$ et
$C^1(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} |\, f \text{ continûment dérivable sur } I \}$.

L'opérateur $A : C^1(I) \to C^0(I)$, $\big(Af\big)(x) := f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$
est linéaire, car

$$\begin{aligned} \big(A(f+g)\big)(x) &= \big(f+g\big)'(x) = f'(x) + g'(x) = \big(Af\big)(x) + \big(Ag\big)(x) \\ \big(A(\alpha f)\big)(x) &= \big(\alpha f\big)'(x) = \alpha f'(x) = \alpha \big(Af\big)(x) \end{aligned}$$

N.B.: prendre la primitive ou la dérivée d'une fonction est une opération linéaire.

Proposition: *Soit V un ensemble et soient f, g des applications bijectives $V \to V$. L'ensemble de telles applications est un groupe sous l'opération de composition*

$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) \;\; ; \;\; \forall x \in V$$

Démonstration: (i) l'ensemble est fermé, car si f, g sont bijectives, leur composition $g \circ f$ l'est aussi, car $x \overset{f}{\mapsto} x' \overset{g}{\mapsto} x''$ et à chaque x correspond exactement un x''.

(ii) $\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big(g \circ f\big)(x) = h\big(g(f(x))\big) = \big(h \circ g\big)(f(x)) = \big((h \circ g) \circ f\big)(x)$

(iii) élément neutre $n : V \to V$ tel que $x \mapsto n(x) = x \Rightarrow \big(f \circ n\big)(x) = f(n(x)) = f(x)$
(iv) éléments inverses: à chaque f on associe son (unique) inverse f^{-1}. Alors

$$\big(f \circ f^{-1}\big)(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x = n(x)$$

QED

Corollaire: *Les matrices associées aux applications linéaires bijectives (c.à.d. avec inverses) forment un groupe, avec la multiplication des matrices.*
Démonstration: Il suffit de vérifier la linéarité de la composition

$$\begin{aligned}
\big(g \circ f\big)(x+y) &= g\big(f(x+y)\big) = g\big(f(x) + f(y)\big) = g\big(f(x)\big) + g\big(f(y)\big) \\
&= \big(g \circ f\big)(x) + \big(g \circ f\big)(y) \\
\big(g \circ f\big)(\alpha x) &= g\big(f(\alpha x)\big) = g\big(\alpha f(x)\big) = \alpha g\big(f(x)\big) = \alpha\big(g \circ f\big)(x)
\end{aligned}$$

et les autres propriétés ont déjà été établies ci-dessus. QED

on considère des applications linéaires $A, B, C : V \to V$, avec $V = \mathbb{R}^d$.
On a les propriétés élémentaires du produit matriciel

(i) associativé $\quad A(BC) = (AB)C$ déjà démontré

(ii) distributivité $\quad A(B+C) = AB + AC$ calcul facile

(iii) non commutativité $\quad AB \neq BA$

contre-exemple: soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq AB$$

(iv) absence de division $\quad AB = 0$ n'implique point $A = 0$ ou $B = 0$

contre-exemple: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Définition: *Si V est espace vectoriel, et $A : V \to V$ est linéaire et bijective, il existe une* **inverse** *linéaire $A^{-1} : V \to V$. On y associe une matrice A^{-1} telle que*

$$\boxed{A\,A^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}}$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice associée à l'identité $1 : V \to V$ et $\mathbf{1}x = x$. On appelle A^{-1} *la* **matrice inverse** *de la matrice A.*

N.B.: si $V \triangleq \mathbb{R}^d$, on écrit $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ (matrice d'unité). On a toujours $A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A$.

Proposition: *On a la formule pour les inverses*

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}}$$

Démonstration: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = \mathbf{1}$. Donc $B^{-1}A^{-1}$ est bien l'inverse de AB. QED

Proposition: *Pour l'inverse double* $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$.

Démonstration: Évident, car l'inverse de A^{-1} est A. QED

4. Équations linéaires I

Exemple: souvent on a affaire aux systèmes d'équations linéaires, comme

$$\begin{aligned} 2x \qquad\quad - z &= 2 \\ 6x + 5y + 3z &= 7 \\ 2x - y \qquad\quad &= 4 \end{aligned}$$

on peut le rendre sous forme matricielle comme suit

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \quad \text{si } A^{-1} \text{ existe} \end{aligned}$$

N.B.: on a 3 équations pour 3 variables $\Rightarrow$ on s'attend à une solution unique (non nulle)

? comment résoudre de telles équations ?

N.B.: il n'existe (presque) pas de formules simples pour le calcul de A^{-1}, hélas !

Méthode 1: réduction

on écrit les équations

$$\begin{aligned} 2x \qquad\quad - z &= 2 \\ 6x + 5y + 3z &= 7 \\ 2x - y \qquad\quad &= 4 \end{aligned}$$

on écrit une matrice (non quadratique)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

soustraire $3\times$ la 1ere éq. de la 2e éq.

$$\begin{aligned} 2x \qquad\quad - z &= 2 \\ 5y + 6z &= 1 \\ 2x - y \qquad\quad &= 4 \end{aligned}$$

soustraire $3\times$ la 1ere ligne de la 2e ligne

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

soustraire la 1ere éq. de la 3e éq.

$$\begin{aligned} 2x \qquad\quad - z &= 2 \\ 5y + 6z &= 1 \\ -y + z &= 2 \end{aligned}$$

soustraire la 1ere ligne de la 3e ligne

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

échanger les 2e et 3e éqs.

$$\begin{aligned} 2x \qquad\quad - z &= 2 \\ -y + z &= 2 \\ 5y + 6z &= 1 \end{aligned}$$

échanger les 2e et 3e lignes

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

ajouter 5$\times$ la 2e éq. à la 3e éq.

$$\begin{aligned} 2x \qquad\quad - z &= 2 \\ -y + z &= 2 \\ 11z &= 11 \end{aligned}$$

ajouter 5$\times$ la 2e ligne à la 3e ligne

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

diviser la 3e éq. par 11

$$\begin{aligned} 2x \qquad\quad - z &= 2 \\ -y + z &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

diviser la 3e ligne par 11

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a obtenu les structures suivantes:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & & -z & = & 2 \\ & -y & +z & = & 2 \\ & & z & = & 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c|c|cc} 2 & 0 & -1 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

reconnaître l'escalier bleu
$\Rightarrow$ c'est fini !

☞ *on peut maintenant lire la solution*:

de la 3e équation/ligne: directement $\boxed{z = 1}$

injecter ce résultat dans la 2e éq./ligne: $-y + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{y = -1}$

injecter ces résultats dans la 1ere éq./ligne: $2x - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$

cette méthode s'appelle **l'élimination de Gauss**

N.B.: sur les matrices (à droite) les opérations suivantes sont admissibles

(a) échanger 2 lignes

(b) multiplier une ligne par une constante (non nulle !)

(c) ajouter un multiple d'une ligne à une autre

(1777-1855)

'princeps mathematicorum'

5. Déterminants

on associe à chaque matrice $d \times d$, provenant de l'application $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, un nombre, le **déterminant**, écrit $\det A$.

(i) matrices 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \det A = ad - bc$$

(ii) matrices 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

5. Déterminants

on associe à chaque matrice $d \times d$, provenant de l'application $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, un nombre, le **déterminant**, écrit $\det A$.

(i) matrices 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\det A = ad - bc}$$

(ii) matrices 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

les diagonales descendent: positif !

premières contributions à $\det A$:

$\det A = a\,e\,i + d\,h\,c + g\,b\,f + \ldots$

5. Déterminants

on associe à chaque matrice $d \times d$, provenant de l'application $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, un nombre, le **déterminant**, écrit $\det A$.

(i) matrices 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\det A = ad - bc}$$

(ii) matrices 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

les diagonales montent: négatif !

premières et secondes contributions à $\det A$:

$\det A = a\,e\,i + d\,h\,c + g\,b\,f - h\,f\,a - d\,b\,i - g\,e\,c$

5. Déterminants

on associe à chaque matrice $d \times d$, provenant de l'application $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, un nombre, le **déterminant**, écrit $\det A$.

(i) matrices 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \boxed{\det A = ad - bc}$$

(ii) matrices 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \implies \boxed{\det A = aei + bfg + dhc - gec - hfa - dbi}$$

encore une fois, avec une autre notation habituelle

(i) matrices 2×2:

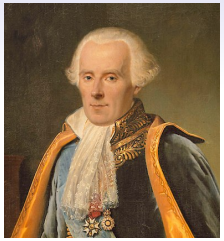
$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \det A &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \end{aligned}$$

(ii) matrices 3×3:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ \det A &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - gec - hfa - dbi \end{aligned}$$

voir le site `https://www.dcode.fr/determinant-matrice` pour le calcul en ligne des déterminants

(iii) développement des **mineurs**: formule de Laplace



1749 - 1827

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-7) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Règle: * on effectue une expansion le long d'une ligne ou d'une colonne.
(dans l'exemple, c'est pour la 1ere colonne)

* Pour chaque élément du développement, on barre les éléments de la matrice dans la même ligne ou dans la même colonne.
* Les éléments du développement sont écrits en préfacteur, avec des signes en alternance.
* Les éléments non barrés (ici en noir) forment un **mineur** ou sous-déterminant 2×2 qu'on calcule 'normalement'.

(iii) développement des **mineurs**: formule de Laplace

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-7) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Exemples:

pour l'élément $a_{11} = 1$, le mineur est $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

pour l'élément $a_{21} = 7$, le mineur est $M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

pour l'élément $a_{31} = 2$, le mineur est $M_{31} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

(iii) développement des **mineurs**: formule de Laplace

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-7) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

notation symbolique

ne s'écrit **pas** !

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (15 - 4) - 7 \cdot (-25 - 2) + 2 \cdot (-20 - 6) = 148$$

en général, la *formule de Laplace* affirme, pour les matrices 3×3

$$\det A = a_{11} M_{11} - a_{21} M_{21} + a_{31} M_{31}$$

formes alternatives, p.ex.:

$$\det A = -a_{21} M_{21} + a_{22} M_{22} - a_{23} M_{23} = -7 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

ou encore

$$\det A = a_{13} M_{13} - a_{23} M_{23} + a_{33} M_{33} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

(iv) la formule de Laplace est le seul moyen pour trouver les déterminants plus grands, p.ex. 4×4:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - a_{41}M_{41}$$

$$= +3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

où les éléments de la première colonne sont indiqués.

Dans l'application de cette règle, les signes sont donnés selon le schéma suivant

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \ddots \\ - & + & - & + & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}$$

N.B.: calculer les déterminants $n \times n$ pour $n \gg 1$ est très fastidieux . . . et susceptible aux erreurs . . .

Règles de manipulation des déterminants

1) si chaque élément d'une ligne (ou d'une colonne) est multiplié avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\det A \mapsto \alpha \det A$

$$\det \begin{pmatrix} 3 \cdot x & 3 \cdot y \\ 3 \cdot z & 0 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{pmatrix} x & y \\ 3z & 0 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{pmatrix} x & 3y \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

2) si l'on échange deux lignes (ou deux colonnes), le déterminant change le signe, alors $\det A \mapsto -\det A$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & c \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} b & a \\ c & 2a \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2a & c \\ a & b \end{pmatrix}$$

3) si l'on additonne à chaque élément d'une ligne (ou d'une colonne) le même multiple d'une autre ligne (d'une autre colonne), le déterminant ne change pas, $\det A \mapsto \det A$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}}_{\text{addition de } 2\times \text{ de la } 1^{\text{ere}} \text{ colonne à la } 2^{e}} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}}_{\text{addition de } (-5)\times \text{ de la } 1^{\text{ere}} \text{ ligne à la } 2^{e}}$$

Exemple d'application: calculons

action pour arriver à droite
action pour arriver à gauche

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

échanger colonnes 1 & 4

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

extraire facteur 2 de 3e colonne

ligne 2 $+ (-3)\times$ ligne 1 $\mapsto$ ligne 2

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

ligne 3 $+ (-1)\times$ ligne 1 $\mapsto$ ligne 3

développer en 1ere colonne

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

extraire facteur -1 de 1ere colonne

échanger colonnes 1 & 2

ligne 2 $+ (-1)\times$ ligne 1 $\mapsto$ ligne 2 ligne 3 $+ (-2)\times$ ligne 1 $\mapsto$ ligne 3

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 9 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = -2(9+9) = -36$$

COURS III/ VORLESUNG III

Rappel: application linéaire $A : V \to V$ sur un espace vectoriel V

$$\boxed{\text{(i)}\ \ A\big(x+y\big) = Ax + Ay \ \ , \ \ \text{(ii)}\ \ A\big(\alpha\, x\big) = \alpha\, Ax} \qquad \forall x, y \in V$$

si $V = \mathbb{R}^d$, on peut associer à chaque application A une matrice $d \times d$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} \quad ; \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

règle sur la multiplication d'une matrice avec un vecteur

$$\boxed{\big(Av\big)_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ji} v_i \ \ ; \ \ j = 1, \ldots d}$$

de même, si B est application linéaire

$$\boxed{\big(BA\, v\big)_k = \sum_{j=1}^{d} b_{kj} \big(Av\big)_j = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} b_{kj} a_{ji}\, v_i \ \ ; \ \ k = 1, \ldots d}$$

de même, si B est application linéaire

$$\boxed{(BA\,v)_k = \sum_{j=1}^{d} b_{kj}(Av)_j = \sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d} b_{kj}a_{ji}\right) v_i \quad ; \quad k = 1,\dots d}$$

ceci donne, directement pour les matrices $\boxed{(BA)_{ki} = \sum_{j=1}^{d} b_{kj}a_{ji}}$

et explicitement pour le produit de deux matrices $d \times d$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1d} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d1} & b_{d2} & \cdots & b_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & a_{13} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & \cdot & a_{23} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \cdot & a_{d3} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \\ \cdot & \cdot & c_{23} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \end{pmatrix}$$

p.ex. $c_{23} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + \ldots + b_{2d}a_{d3}$

règle: $\boxed{\textbf{ligne} * \textbf{colonne}}$ du produit matriciel Zeile $*$ Spalte

☞ application aux équations linéaires $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ A, $\boldsymbol{b}$ donnés, $\boldsymbol{x}$ recherché

☞ le déterminant $\det A = |A|$ comme outil de calcul

6. Équations linéaires II

Méthode 2: règle de Cramer (*Cramer'sche Regel)*

illustration de l'idee à titre d'exemple: considérons le système

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

(multiplier la 1ere éq. avec b_2, et la 2e avec b_1 puis soustraire les 2 éqs. $\Rightarrow$ obtenir x)

$$\boxed{x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}}$$

N.B.: évidemment, il faut que le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$ équations indépendantes

Règle: la solution s'écrit comme le quotient de deux déterminants. Au dénominateur, on a le déterminant formé des coefficients de la matrice associée au système d'équations. Au numérateur, on remplace la colonne respective par le vecteur à droite de l'équation.

la règle de Cramer s'étend directement à n équations linéaires en n variables

l'effort de calcul peut être mesuré en comptant le nombre d'opérations requis

n	1	2	3	4	5	6
Gauss $\sim n^3$	1	8	27	64	125	216
Cramer $\sim n!$	1	2	6	24	120	720

☞ pour $n \gg 1$, la règle de Cramer devient très inefficace ...

Exemple: résolvons

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x \quad - 2y = 5 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(i) on calcule le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow$ <u>une solution existe</u>

(ii) on trouve $x = \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \dfrac{-6-15}{-7} = \dfrac{-21}{-7} = 3$

(iii) on trouve $y = \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \dfrac{10-3}{-7} = \dfrac{7}{-7} = -1$

Théorème: (FREDHOLM) *Soit V espace vectoriel,* $\dim V = n$, $b \in V$ *et* $A : V \to V$ *linéaire. Alors une de deux alternatives est valable:*

(1) $Ax = 0$ a la seule solution $x = 0$. Alors $Ax = b$ a une solution unique $x \in V$.

(2) $Ax = 0$ a des solutions $x \neq 0$. Alors il existe $b \neq 0$ tel que $Ax = b$ n'a pas de solution.

pour $V \triangleq \mathbb{R}^n$ avec $n < \infty$, ceci est assez évident:
(i) si $\det A = |A| \neq 0$, alors A^{-1} existe et $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ est bien unique.
(ii) en revanche, si $\det A = |A| = 0$, les équations ne sont pas indépendantes et on a une solution $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, mais A^{-1} n'existe pas.

N.B.: cette alternative de Fredholm devient non triviale pour $n = \infty$.

$\Rightarrow$ importance de la consideration, au préalable, des solutions de l'équation homogène $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ pour l'éventuelle existence des solutions de l'équation inhomogène $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

pour $V \triangleq \mathbb{R}^n$, critère pratique: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ existe

Illustration: exemples de l'équation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dans $V = \mathbb{R}^2$

Exemple 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. ☞ Car $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, la matrice A n'a pas d'inverse.

On résout $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$. ☞ équation d'une droite

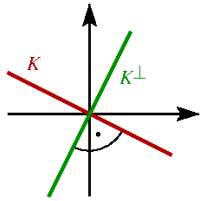
Définition: *Le* **noyau de** *A est l'espace vectoriel des solutions de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. On écrit $\mathrm{Ker}A$.*

Dans l'exemple spécifique: $K := \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \boldsymbol{v} = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. $\Rightarrow \dim K = 1$

On calcule le **complément orthogonal de** K: $K^\perp := \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \text{ où } \boldsymbol{k} \in K \right\}$.

Dans l'exemple spécifique: $0 \overset{!}{=} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} = -2v_1 + 1v_2$ avec $\boldsymbol{k} \in K \Rightarrow v_2 = 2v_1$

donc $K^\perp = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \boldsymbol{v} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$



☞ Pour l'équation inhomogène $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, il faut distinguer deux cas:

(i) $\boldsymbol{b} \in K^\perp$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ une seule condition $x = 1 - 2y$ ☞ infinité de solutions

(ii) $\boldsymbol{b} \in K$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -2 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \overset{?}{=} 5$ ☞ aucune solution

Exemple 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. ☞ Car $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, la matrice inverse A^{-1} existe.

On résout $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$.

Car $K := \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \{\boldsymbol{0}\}$, on a $K^\perp = \mathbb{R}^2 = V$.

$\Rightarrow$ pour tout $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$, solution unique $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Dans l'exemple spécifique: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{b}$ solution unique

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

lineare Abbildung, *f*	application linéaire, *f*
Matrix, *f* (Pl. Matrizen)	matrice, *f*
Untermatrix, *f*	sous-matrice, *f*
Einheitsmatrix, *f*	matrice d'unité, *f*
Determinante, *f*	déterminant, *m*
Unterdeterminante, *f*; Kofaktor, *m*	mineur, *m*
Nenner, *m*	dénominateur, *m*
Zähler, *m*	numérateur, *m*
Bruch, *m*	quotient, *m*
rationale/reelle Zahl, *f*	nombre rationnel/réel, *m*
ganze/natürliche Zahl, *f*	nombre relatif/naturel, *m*
Kern, *m*	noyau, *m*

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

7. Produit scalaire et longueurs

Définition: *Soit V espace vectoriel. Une application $\langle \ | \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ est un* **produit scalaire** *(réel) si $\forall x, y, z \in V$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*

(i) $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$

$\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$

(ii) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$

(iii) $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha \langle x|y\rangle$

$\langle x|\alpha y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$

(iv) $\langle x|x\rangle \geq 0$

$\langle x|x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Une application $V \times V \to \mathbb{R}$ avec les propriétés (i), (iii) s'appelle **bi-linéaire**.

7. Produit scalaire et longueurs

Définition: *Soit V espace vectoriel. Une application $\langle\ |\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ est un* **produit scalaire** *(complexe) si $\forall x, y, z \in V$ et $\forall \alpha \in \mathbb{C}$*

(i) $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$
$\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$

(ii) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle^*$

(iii) $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha^* \langle x|y\rangle$
$\langle x|\alpha y\rangle = \alpha \langle x|y\rangle$

(iv) $\langle x|x\rangle \geq 0$
$\langle x|x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Une application $V \times V \to \mathbb{C}$ avec les propriétés (i), (iii) s'appelle **bi-linéaire**.

Pour un produit scalaire complexe, le **conjugué complexe** d'un nombre complexe $\alpha = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$ est $\alpha^* := u - \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$. On a $\alpha^{**} = \alpha$ et $\alpha^*\alpha = |\alpha|^2$.

N.B.: notre définition du produit scalaire complexe utilise la définition habituelle en physique; les livres de mathématiques écrivent le contraire: $\langle x|\alpha y\rangle = \alpha^* \langle x|y\rangle$ et $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha \langle x|y\rangle$

7. Produit scalaire et longueurs

Définition: *Soit V espace vectoriel. Une application $\langle\ |\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ est un* **produit scalaire** *si $\forall x, y, z \in V$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*

(i) $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$
$\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$

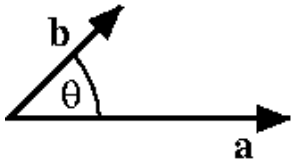
(ii) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$

(iii) $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$
$\langle x|\alpha y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$

(iv) $\langle x|x\rangle \geq 0$
$\langle x|x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Une application $V \times V \to \mathbb{R}$ avec les propriétés (i), (iii) s'appelle **bi-linéaire**.

Exemples: **1)** les flèches indiennes



on écrit $\langle a|b\rangle = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ utilisation du produit $\cdot$

géométriquement $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\theta$

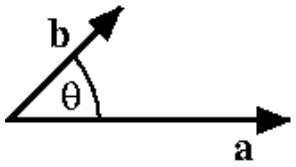
(avec a: longueur du vecteur $\boldsymbol{a}$)

2) les vecteurs $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$

Rappel: isomorphie avec les flèches indiennes

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \qquad \langle a|b\rangle = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{d} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_d b_d$$

Exemples: **1)** les flèches indiennes



on écrit $\langle a | b \rangle = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ utilisation du produit $\cdot$

géométriquement $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos\theta$

(avec a: longueur du vecteur $\boldsymbol{a}$)

2) les vecteurs $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$

Rappel: isomorphie avec les flèches indiennes

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}$$

$$\langle a | b \rangle = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{d} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_d b_d$$

pour $a \in \mathbb{C}^d$ complexe, on aurait à la place $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{d} a_i^* b_i$

3) Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalle, et $f \in C^0(I) \quad (f : I \to \mathbb{R})$.
Un produit scalaire s'écrit

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \, f(x)^* g(x)$$

N.B.: pour les cas des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$ avec valeurs complexes, la généralisation nécessaire du produit scalaire est indiquée.

Théorème: (inégalité de SCHWARZ) *Si V est espace vectoriel et $x, y \in V$*

$$\boxed{\left|\langle x|y\rangle\right| \leq \sqrt{\langle x|x\rangle\,\langle y|y\rangle}}$$

Démonstration: Si $y = 0$, le résultat est trivial. Étudions le cas $y \neq 0$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, (ou $\mathbb{C}$) on a

$$0 \leq \langle x + \alpha y|x + \alpha y\rangle = \langle x|x\rangle + \alpha^*\langle y|x\rangle + \alpha\langle x|y\rangle + |\alpha|^2\langle y|y\rangle$$

On peut minimiser le côté droit par rapport à α. En particulier, on peut poser

$$\alpha = -\frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle} \quad ; \quad \text{admissible, car } y \neq 0$$

Ainsi, on trouve

Rappel: $\langle y|x\rangle = \langle x|y\rangle^*$

$$0 \quad \leq \quad \langle x|x\rangle - \frac{\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle}\langle y|x\rangle \underbrace{- \frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle}\langle x|y\rangle + \frac{\langle y|x\rangle\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle^2}\langle y|y\rangle}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle - \langle x|y\rangle\,\langle y|x\rangle = \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle - \left|\langle x|y\rangle\right|^2$$

ce qui est équivalent à l'affirmation. QED

Corollaire: *La* **longueur** $\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$ *d'un vecteur* $x \in V$ *obéit aux trois axiomes d'une* **norme**, $\forall x, y \in V$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*)*

(i)	$\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$	
(ii)	$\|\alpha\, x\| = \|\alpha\|\, \|x\|$	
(iii)	$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$	inégalité du triangle

Démonstration: (i) est identique à l'axiome (iv) du produit scalaire.

Pour voir (ii): $\|\alpha\, x\| = \sqrt{\langle \alpha x|\alpha x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x|x\rangle} = |\alpha|\, \|x\|$.

Pour voir (iii), on tire de Schwarz $\langle x|y\rangle \leq |\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\, \|y\|$. Avec cette borne, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x+y\|^2 = \langle x+y|x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \underbrace{\langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle} + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\, \|x\|\, \|y\| + \|y\|^2 \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 \end{aligned}$$

et on prend la racine des deux cotés. QED

N.B.: *inégalités de Schwarz et du triangle vraies en tout espace vectoriel avec produit scalaire.*

en guise d'application: utiliser ces inégalités pour définir des nouveaux espaces vectoriels

Exemples:

4) Soit $\ell^2 := \{\text{suites } (a_1, a_2, \ldots) | \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty, a_i \in \mathbb{C}\}$. On définit l'addition vectorielle et la multiplication avec un scalaire $\alpha \in \mathbb{C}$

$$a + b := \big(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots\big) \quad , \quad \alpha\, a := \big(\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots\big) \qquad (\ell^2)$$

mais il faut **démontrer** que $a + b \in \ell^2$ si $a \in \ell^2$ et $b \in \ell^2$!

Pourquoi: il faut s'assurer que la somme infinie $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^2$ converge !

Afin de le voir, on introduit d'abord un produit scalaire

$$\langle a | b \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* b_i \quad \Rightarrow \quad \|a\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \overset{!}{<} \infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{a \in \ell^2 \Leftrightarrow \|a\| < \infty}$$

* D'abord, de l'inégalité de Schwarz $\big|\langle a|b\rangle\big| \leq \|a\|\,\|b\| < \infty$, le produit scalaire existe
* Inégalité du triangle: $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| < \infty \quad \Rightarrow \quad a + b \in \ell^2$
* De plus: $\|\alpha\, a\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha\, a_i|^2 = |\alpha|^2 \|a\|^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \alpha\, a \in \ell^2$

$\Rightarrow$ L'ensemble ℓ^2 avec les opérations (ℓ^2) est un espace vectoriel.

☞ $\boxed{\ell^2 \triangleq \mathbb{C}^\infty \text{ est espace vectoriel avec produit scalaire}}$, et $\dim \ell^2 = \infty$.

notons explicitement les inégalités de Schwarz et du triangle pour ℓ^2

- inégalité du triangle $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|a_i + b_i\right|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|a_i\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|b_i\right|^2\right)^{1/2}}$$

☞ **inégalité de Minkowski**

- inégalité de Schwarz $\left|\langle a|b\rangle\right| \leq \|a\|\,\|b\|$

$$\boxed{\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i^* b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|a_i\right|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|b_i\right|^2\right)^{1/2}}$$

☞ **inégalité Cauchy-Schwarz**

des inégalités classiques de l'analyse mathématique sont réproduites (et démontrées !)

5) Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalle et $L^2 = L^2(I) := \{f : I \to \mathbb{R} | \int_a^b \mathrm{d}x\, |f(x)|^2 < \infty\}$

On définit l'addition vectorielle et la multiplication avec un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad , \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x) \qquad (L^2)$$

mais il faut **démontrer** que $f + g \in L^2$ si $f \in L^2$ et $g \in L^2$!

Pourquoi: il faut s'assurer que l'intégrale $\int_a^b \mathrm{d}x\, |f(x) + g(x)|^2$ converge !

Afin de le voir, on introduit d'abord un produit scalaire

$$\langle f|g\rangle := \int_a^b \mathrm{d}x\, f^*(x) g(x) \;\Rightarrow\; \|f\|^2 = \int_a^b \mathrm{d}x\, |f(x)|^2 \overset{!}{<} \infty \;\Rightarrow\; \boxed{f \in L^2 \Leftrightarrow \|f\| < \infty}$$

* D'abord, de l'inégalité de Schwarz $|\langle f|g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\| < \infty$, le produit scalaire existe

* Inégalité du triangle: $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| < \infty \quad \Rightarrow \quad f + g \in L^2$

* De plus: $\|\alpha f\|^2 = \int_a^b \mathrm{d}x\, |\alpha f(x)|^2 = |\alpha|^2 \|f\|^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \alpha f \in L^2$

$\Rightarrow$ L'ensemble $L^2(I)$ avec les opérations (L^2) est un espace vectoriel.

☞ $\boxed{L^2(I) \text{ est espace vectoriel avec produit scalaire}}$, et $\dim L^2(I) = \infty$.

☞ deux types d'espace vectoriel de dimension infinie: ℓ^2 discrète et $L^2(I)$ continue
ces genres d'espace vectoriel sont requis en mécanique quantique

notons explicitement les inégalités de Schwarz et du triangle pour $L^2([a,b])$

où $-\infty \leq a < b \leq \infty$ sont admissibles

- inégalité du triangle $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$$\boxed{\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \left|f(x)+g(x)\right|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \left|f(x)\right|^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \left|g(x)\right|^2\right)^{1/2}}$$

☞ **inégalité de Minkowski**

- inégalité de Schwarz $\left|\langle f|g\rangle\right| \leq \|f\|\,\|g\|$

$$\boxed{\left|\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)^* g(x)\right| \leq \left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \left|f(x)\right|^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \left|g(x)\right|^2\right)^{1/2}}$$

☞ **inégalité Cauchy-Schwarz**

des inégalités classiques de l'analyse mathématique sont réproduites (à très peu de frais)

8. Orthogonalité

Remarque: on appelle souvent un espace vectoriel V avec produit scalaire un **espace pré-Hilbert**.

Un **espace d'Hilbert** V doit en plus satisfaire le **Critère de Cauchy**:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n, m > N\colon\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n > N\colon\ \|f_n - f\| < \varepsilon \text{ avec } f \in V$$

Un tel espace est **complet**. traité en analyse ou analyse fonctionelle

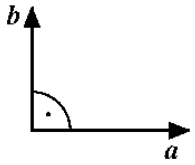
☞ *Les espaces $\mathbb{R}^d$, $C^0(I)$, ℓ^2, $L^2(I)$ sont tous des espaces d'Hilbert.*

N.B.: les physiciens se foutent souvent de cette terminologie précise et parlent d'espace d'Hilbert.

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert. Deux vecteurs $x, y \in V$ sont* **orthogonaux**, *si $\langle x|y\rangle = 0$.*

Exemples: **1)** les flèches indiennes

deux vecteurs orthogonaux ont un angle droit entre eux



$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$$

2) pour $\mathbb{R}^2$, condition d'orthogonalité $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$

isomorphisme

3) soit $V = C^0([-\pi,\pi])$, et $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \sin x \cos x = 2\overbrace{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}u\ u}^{=0} = 0$$

$u = \cos x$
$\mathrm{d}u = -\sin x\ \mathrm{d}x$

en alternative: $J = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \sin x \cos x = \overbrace{\sin x \sin x\big|_{-\pi}^{\pi}} - \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \cos x \sin x = -J \Rightarrow J = 0.$

les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont orthogonales sur l'intervalle $I = [-\pi,\pi]$.

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert. Une base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ de V est* **orthogonale**, *si*

$$\langle \boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j\rangle = \begin{cases} a_i & ; \quad \text{si } i = j \\ 0 & ; \quad \text{sinon} \end{cases}$$

et elle est **orthonormée**, *si $a_i = 1$, donc $\langle \boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j\rangle = \delta_{ij}$.*

Si $v \in V$, on peut développer en un base orthonormée $v = \sum_i v_i \boldsymbol{e}_i$

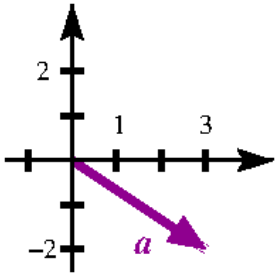
$$\Longrightarrow \quad \langle \boldsymbol{e}_j|v\rangle = \sum_i v_i \underbrace{\langle \boldsymbol{e}_j|\boldsymbol{e}_i\rangle}_{=\delta_{ji}} = v_j \quad \Longrightarrow \quad v = \sum_i \langle \boldsymbol{e}_i|v\rangle \boldsymbol{e}_i$$

Remarque: en mécanique quantique, on écrit les vecteurs (notation de Dirac) $|v\rangle \in V$, et le développement $|v\rangle = \sum_i |e_i\rangle\langle e_i|v\rangle$.

Exemples: **1)** $V = \mathbb{R}^2$, base orthonormée $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on a bien $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1$ et $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$

donc $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$ représentation géométrique standard



2) $V = \ell^2$ a les vecteurs de base orthonormée

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots) \quad , \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots) \quad , \quad \ldots$$

* on vérifie que $\langle e_i | e_i \rangle = 1$ et $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
* cette base contient une infinité d'éléments $\Rightarrow$ $\underline{\dim \ell^2 = \infty}$

développement de $a \in \ell^2$: $a = (a_1, a_2, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, e_i$

il s'agit de l'extension formelle du développement canonique en une base orthonormée de l'espace $\mathbb{R}^d$ vers la limite $d \to \infty$, et au complexe

à la louche/*sem cuidados* $\ell^2 \triangleq \mathbb{C}^\infty$

9. Unitarité et hermiticité

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert et $A : V \to V$ linéaire.*
L'application (linéaire) **adjointe** *$A^+ : V \to V$ est définie par*

$$\boxed{\langle A^+ x | y \rangle = \langle x | A y \rangle}$$

N.B.: en physique, on écrit souvent $A^\dagger$ à la place de A^+.

Exemple 1: soit $V = \mathbb{R}^d$, et $\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$.
De plus, on se rappelle $(Ay)_i = \sum_{j=1}^d a_{ij} y_j$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\langle A^+ x | y \rangle &= \sum_{i=1}^d (A^+ x)_i y_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij}^+ x_j y_i = \sum_{i,j=1}^d x_i a_{ji}^+ y_j \\
\langle x | A y \rangle &= \sum_{i=1}^d x_i (Ay)_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x_i a_{ij} y_j = \sum_{i,j=1}^d x_i a_{ij} y_j
\end{aligned}$$

comparaison des coefficients donne $a_{ji}^+ = a_{ij}$.

si A a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2d} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

alors la matrice de A^+ est la **matrice transposée** de la matrice de A

$$A^+ = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{d1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{d2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1d} & a_{2d} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

très concrètement, dans $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^+ = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

N.B.: banalement, $A^{++} = \left(A^T\right)^T = A$

Exemple 2: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $V = C^1(I)$ l'espace des fonctions $I \to \mathbb{R}$ continûment dérivables sur I. Prenons l'opérateur linéaire $A : C^1(I) \to C^0(I)$

plus une condition de bord sur ∂I

$$(Af)(x) := \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \langle f | Ag \rangle = \int_I \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)g(x)\Big|_{\partial I} - \int_I \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} g(x)$$

admettons comme condition de bord que $f(x) \stackrel{!}{=} 0$ sur le bord ∂I.

$$\Rightarrow \quad \langle f | Ag \rangle = \int_I \mathrm{d}x \left(-\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right) g(x) \stackrel{!}{=} \langle A^+ f | g \rangle$$

et on identifie l'opérateur adjoint $(A^+ f)(x) = -\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -f'(x)$.

Notation: en mécanique quantique, $\langle f | Ag \rangle = \langle f | A | g \rangle$ est appelé *'élément de matrice'* de A.

Deux classes d'opérateurs ont un intérêt particulier:

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert et $A : V \to V$ linéaire et invertible.*
(i) A est **hermitique**, *si $A = A^+$. (ii) A est* **unitaire**, *si $A^{-1} = A^+$.*

Si A est unitaire, on peut écrire

$$\langle x|y\rangle = \langle x|\mathbf{1}y\rangle = \langle x|A^{-1}Ay\rangle = \langle x|A^+Ay\rangle = \langle Ax|Ay\rangle \qquad \text{(AU)}$$

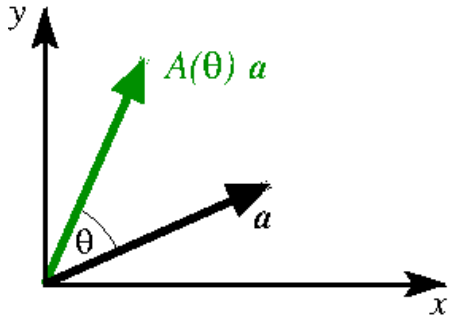
Conséquences de (AU): (i) $\|x\|^2 = \langle x|x\rangle = \langle Ax|Ax\rangle = \|Ax\|^2$

☞ *les opérateurs unitaires conservent les longueurs*

(ii) si $\langle x|y\rangle = 0 \quad \text{alors} \quad \langle Ax|Ay\rangle = 0$

☞ *les opérateurs unitaires conservent l'orthogonalité*

Exemple: opérateur/matrice unitaire en $\mathbb{R}^2$:
rotation par un angle θ (sens mathématique positif)



$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

l'inverse $A^{-1}(\theta) = A(-\theta) = A^+(\theta)$

pour le voir formellement, on vérifie la propriété de groupe

$$
\begin{aligned}
A(\theta_1)A(\theta_2) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ -\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \\
&= A(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned}
$$

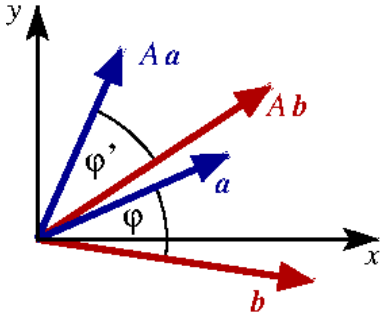
par conséquent $A(\theta)A(-\theta) = A(0) = \mathbf{1}$.

(iii) **Plus systématiquement**:
avec le produit scalaire, on peut définir un angle φ entre les vecteurs $a, b \in V$:

$$\langle a|b\rangle = \|a\|\,\|b\|\cos\varphi$$

de même, on définit un angle φ' entre les vecteurs Aa et $Ab \in V$:

$$\langle Aa|Ab\rangle = \|Aa\|\,\|Ab\|\cos\varphi'$$



la relation (AU), voir $\langle a|b\rangle = \langle Aa|Ab\rangle$, implique que $\boxed{\varphi = \varphi'}$

☞ *les opérateurs unitaires conservent les angles*

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Skalarprodukt, *n*	produit scalaire, *m*
komplex konjugiert	conjugué complexe
Norm, *f*	norme, *f*
senkrecht; (orthogonal)	perpendiculaire; orthogonal
adjungiert	adjoint
hermitesch	hermitique; hermitien
konform; winkeltreu	conforme
Scherung, *f*	cisaillement, *m*
Ähnlichkeitstransformation, *f*	transformation de similarité, *f*
unitäre Transformation, *f*	transformation unitaire, *f*
Drehung, *f*; Rotation, *f*	rotation, *f*
drehen	tourner
vollständig	complet
konvergent	convergent
Cauchyfolge, *f*	suite de Cauchy, *f*
Hilbertraum, *m*	espace d'Hilbert, *m*

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

COURS IV/ VORLESUNG IV

Rappels: Produit scalaire entre deux vecteurs $\langle x|y\rangle$, V devient espace pré-Hilbert

Norme $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ d'un vecteur $x \in V$

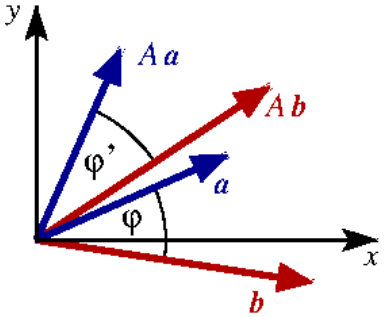
Inégalités: (i) Schwarz: $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ (ii) triangle: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

* Si V est espace pré-Hilbert et $A : V \to V$ linéaire, l'**application adjointe** $A^+ : V \to V$ est définie par $\langle A^+x|y\rangle = \langle x|Ay\rangle \ \forall x, y \in V$ $\Rightarrow A^+$ linéaire

si $V = \mathbb{R}^d$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2d} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^+ = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{d1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{d2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1d} & a_{2d} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$ matrice transposée

Cas spéciaux: (i) A **hermitique**, si $A = A^+$, (ii) A **unitaire**, si $A^{-1} = A^+$.

- si A est unitaire, on a $\langle x|y\rangle = \langle Ax|Ay\rangle$

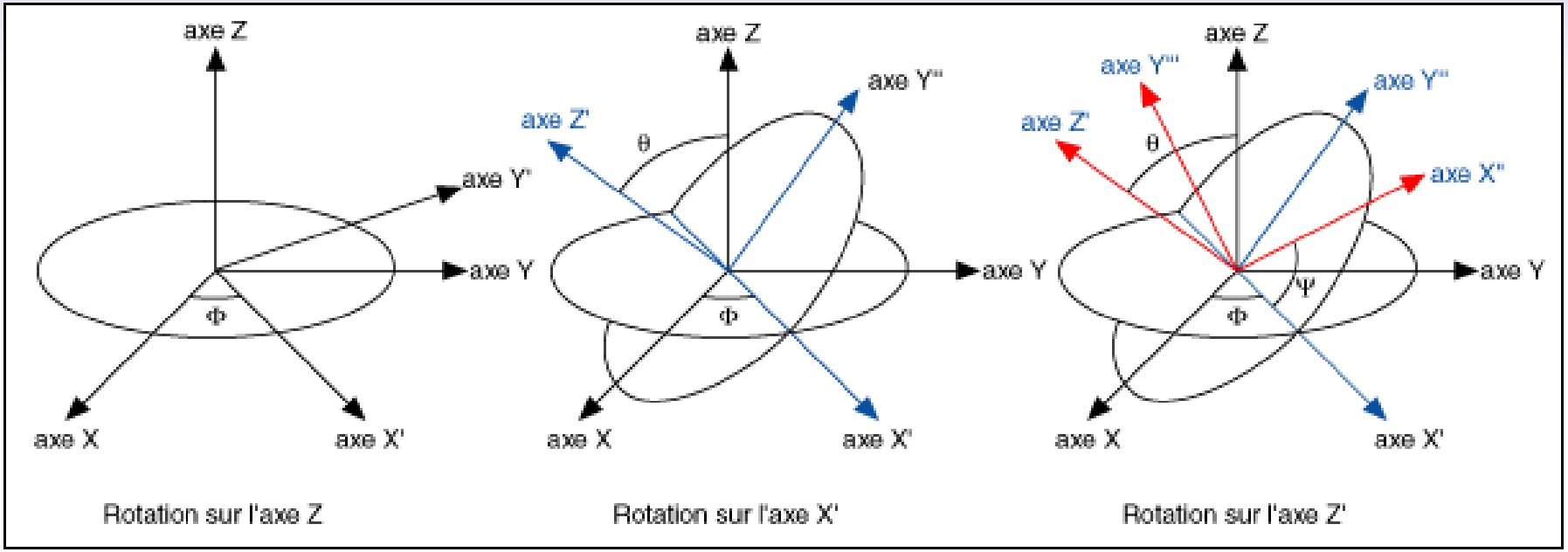


1. *les applications unitaires conservent les longueurs*
2. *les applications unitaires conservent l'orthogonalité*
3. *les applications unitaires conservent les angles*

si $V = \mathbb{R}^2$ matrice unitaire $\Leftrightarrow$ rotation $\theta \in [-\pi, \pi]$ mod 2π $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1+\theta_2) \\ A^{-1}(\theta) = A(-\theta) = A^+(\theta) \end{cases}$

- si A est hermitique . . . *à suivre* . . .

Rotations dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ tri-dimensionnel



Source: `https://wikimeca.org/index.php?title=Fichier:Angles_euler.gif`

en trois dimensions, il y a trois axes possibles $\Rightarrow$ trois angles de rotation

fréquemment, on utilise une paramétrisation introduite par EULER

les 3 rotations s'appliquent de droite à gauche

$$A(\Psi,\Theta,\Phi) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rotation autour de l'axe } z'} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}}_{\text{rotation autour de l'axe } x'} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rotation autour de l'axe } z}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\Psi\cos\Phi - \sin\Psi\cos\Theta\sin\Phi & \cos\Psi\sin\Phi + \sin\Psi\cos\Theta\cos\Phi & \sin\Psi\sin\Theta \\ -\sin\Psi\cos\Phi - \cos\Psi\cos\Theta\sin\Phi & -\sin\Psi\sin\Phi + \cos\Psi\cos\Theta\cos\Phi & \cos\Psi\sin\Theta \\ \sin\Theta\sin\Phi & -\sin\Theta\cos\Phi & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Φ, Θ, Ψ s'appellent **angles d'Euler**

N.B.: $A^{-1}(\Psi,\Theta,\Phi) = A^{+}(\Psi,\Theta,\Phi) = A(-\Phi,-\Theta,-\Psi)$

! changement d'ordre des facteurs !

Proposition: *Pour deux opérateurs linéaires A, B, on a:* $\boxed{(AB)^+ = B^+A^+}$.

Démonstration: $\langle x|ABy\rangle = \langle x|A(By)\rangle = \langle A^+x|By\rangle = \langle B^+(A^+x)|y\rangle$ QED

en particulier, en $\mathbb{R}^d$: $(AB)^T = B^TA^T$.

Corollaire: *Si A, B sont unitaires, alors AB est unitaire.*

Démonstration: $(AB)(AB)^+ = (AB)B^+A^+ = A(BB^+)A^+ = AA^+ = \mathbf{1}$ QED

Soit $U : V \to V$ unitaire. Pour $x, y \in V$, posons $x = Uu$ et $y = Uv$.

$$\langle x|Ay\rangle = \langle Uu|AUv\rangle = \langle u|U^+AUv\rangle = \langle u|(U^{-1}AU)v\rangle$$

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert, $A : V \to V$ linéaire et $U : V \to V$ linéaire et invertible (c.à.d. U^{-1} existe). La transformation*

$$A \mapsto U^{-1}\,A\,U \qquad (*)$$

est une **transformation de similarité**. *Si $U : V \to V$ est unitaire, (*) devient une* **transformation unitaire**

$$A \mapsto U^+\,A\,U \qquad (**)$$

en alternative: partir de $y = Ax$. Pour le vecteur $v = U^{-1}y = U^+y$ tourné, on trouve la forme (**) de A transformée $v = U^{-1}y = (U^{-1}AUU^{-1})x = U^+AU(U^+x) = (U^+AU)u$.

Exemple: transformation unitaire d'une matrice 2×2, espace pré-Hilbert $\mathbb{R}^2$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

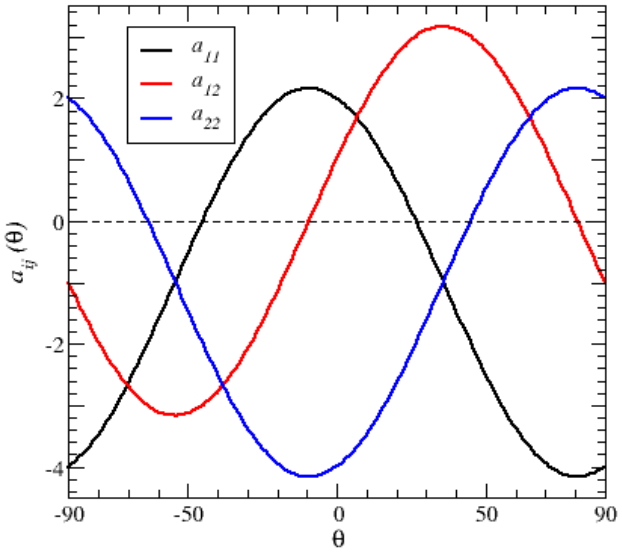
au lieu de la base canonique orthonormée $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on passe à la nouvelle base (tournée), également orthonormée

$\boldsymbol{f}_1 = U^+ \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{f}_2 = U^+ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ et $U = U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

La matrice transformée $U^+ A U$ s'écrit dans la nouvelle base $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\theta) & a_{12}(\theta) \\ a_{12}(\theta) & a_{22}(\theta) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{U^+} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{U}$$



dépendance des éléments

$a_{11}(\theta)$, $a_{12}(\theta) = a_{21}(\theta)$, $a_{22}(\theta)$ de l'angle θ

fonctions périodiques the θ, période 180°

pour $\theta = -\frac{90}{\pi} \arctan \frac{1}{3} \simeq -9,22^o$, on trouve $a_{12} = 0$

$\Rightarrow$ matrice transformée **diagonale**

$\Rightarrow$ valeurs extrémales de $\begin{array}{l} a_{11} = -1 + \sqrt{10} \simeq 2.16 \\ a_{22} = -1 - \sqrt{10} \simeq -4.16 \end{array}$

pour $\theta \simeq 80,78^o$, a_{11} et a_{22} sont échangés, $a_{12} = 0$

10. Valeurs propres et vecteurs propres

transformations unitaires: conservent la longueur et changent la direction
peut-on avoir la situation opposée, donc $Ax = \alpha x$?
dans ce cas, la direction était conservée et les longueurs changéaient ...

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert et $A : V \to V$ linéaire. Si $Ax = \alpha x$, avec $x \neq 0$, α est* **valeur propre** *de A et x est* **vecteur propre** *de A.*

Exemple: $V = \mathbb{R}^2$ et matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ hermitique.

? comment trouver les valeurs propres et vecteurs propres de A ?

$$\boxed{Ax = \alpha x \quad \Longrightarrow \quad \big(A - \alpha \mathbf{1}\big)x = 0}$$

théorie èqs linéaires $\Rightarrow$ solution $x \neq 0$ existe seulement si $\det\big(A - \alpha \mathbf{1}\big) = 0$.

Définition: $P(\lambda) := \det\big(A - \lambda \mathbf{1}\big)$ *est le* **polynôme caractéristique** *de A.*

☞ pour trouver les valeurs propres de A, on cherche les zéros de $P(\lambda)$.

(i) calcul du polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \det\big(A - \lambda\mathbf{1}\big) \;=\; \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 8\lambda - 1$$

(ii) recherche des zéros de $P(\lambda)$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda - 1 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_\pm = 4 \pm \sqrt{17}$$

2 valeurs propres réelles pour une matrice 2×2 hermitique

(iii) calcul des vecteurs propres, d'abord pour α_+: $A\boldsymbol{x}_+ = \alpha_+ \boldsymbol{x}_+$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \big(4 + \sqrt{17}\big) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \big(-1 - \sqrt{17}\big)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 \quad + \big(1 - \sqrt{17}\big)x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}\big(1 + \sqrt{17}\big)x_1$ le vecteur propre n'a pas de normalisation fixée

calcul des vecteurs propres, ensuite pour α_-: $A\boldsymbol{x}_- = \alpha_- \boldsymbol{x}_-$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \big(4 - \sqrt{17}\big) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \big(-1 + \sqrt{17}\big)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 \quad + \big(1 + \sqrt{17}\big)x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}\big(1 - \sqrt{17}\big)x_1$ le vecteur propre n'a pas de normalisation fixée

si $\alpha = \alpha_+ = 4 + \sqrt{17}$, $\quad \boldsymbol{x}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{17}}{4} \end{pmatrix}$ $\qquad$ si $\alpha = \alpha_- = 4 - \sqrt{17}$, $\quad \boldsymbol{x}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{17}}{4} \end{pmatrix}$

N.B.: on observe: on a $\alpha_+ \neq \alpha_-$, vecteurs $\boldsymbol{x}_\pm$ linéairement indépendants et $\boldsymbol{x}_+ \cdot \boldsymbol{x}_- = 0$.
on peut encore normaliser $\boldsymbol{x}_+, \boldsymbol{x}_-$, afin d'avoir $\|\boldsymbol{x}_+\| = \|\boldsymbol{x}_-\| \stackrel{!}{=} 1$

* Si les vecteurs propres sont normés $\|\boldsymbol{x}_\pm\| = 1$, on a (implicitement) trouvé une transformation unitaire U telle que dans la base orthonormée des vecteurs propres $\boldsymbol{x}_\pm$, la matrice A

$$A \mapsto D = U^+ A U = \begin{pmatrix} \alpha_+ & 0 \\ 0 & \alpha_- \end{pmatrix}$$

devient diagonale. On parle de la **diagonalisation** de la matrice A.

* Si $\{\boldsymbol{e}_i\}$ est base orthonormée de V, et $\boldsymbol{u}_i := U\boldsymbol{e}_i$, alors $\{\boldsymbol{u}_i\}$ est aussi base orthonormée de V, et $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$.

voir exemple sur la page suivante

$$\Rightarrow \boldsymbol{u}_i = U\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{di} \end{pmatrix} \implies U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1i} & \cdots & u_{1d} \\ u_{21} & \cdots & u_{2i} & \cdots & u_{2d} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{d1} & \cdots & u_{di} & \cdots & u_{dd} \end{pmatrix}$$

est matrice unitaire et $U^+ U = \mathbf{1}$

ceci est aussi valable si $\{\boldsymbol{u}_i\}$ est une base orthonormée de vecteurs propres d'une matrice A.

* Sous transformation unitaire, on observe sur l'adjoint de A

$$A^+ \mapsto \left(U^+ A U\right)^+ = U^+ A^+ U^{++} = U^+ A U$$

si $A = A^+$ est hermitique, elle le reste sous transformation unitaire

☞ *les transformations unitaires conservent l'hermiticité d'une matrice*

Exemple: considérons le problème suivant des valeurs et vecteurs propres $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(i) calcul du polynôme caractéristique et recherche de ses zéros

$$P(\lambda) = \det\left(A - \lambda \mathbf{1}\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_6 = 6$.

(ii) calcul des vecteurs propres: $A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$ et $A\boldsymbol{x}_6 = \lambda_6 \boldsymbol{x}_6$.

si normalisés tels que $\|\boldsymbol{x}_1\| = 1$ et $\|\boldsymbol{x}_6\| = 1$, on a

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x}_6 = \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_6 = 0$$

orthogonalité des vecteurs propres

(iii) les équations des vecteurs propres ont la forme $\begin{cases} 5x_1 - 2y_1 = 1x_1 \\ -2x_1 + 2y_1 = 1y_1 \end{cases}$, $\begin{cases} 5x_6 - 2y_6 = 6x_6 \\ -2x_6 + 2y_6 = 6y_6 \end{cases}$

forme matricielle $\implies$ $\boxed{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_6 \\ y_1 & y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_6 \\ y_1 & y_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}$

$\Rightarrow$ équation de forme $\boxed{AU = UD}$, où $U = \begin{pmatrix} x_1 & x_6 \\ y_1 & y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, construite des vecteurs propres normés, est matrice unitaire $U^+ = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_6 & y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = U^{-1}$,

c.à.d. $U^+ U = \mathbf{1}$.

☞ matrice de transformation U systématiquement construite des vecteurs propres orthonormés

[Astuce de démonstration: inverses de gauche et de droite

On considère les matrices $d \times d$ invertibles A. On sait déjà qu'elles forment un groupe (non commutatif) sous multiplication des matrices.

Définition: *Si A, B sont matrices et $AB = \mathbf{1}$, on dit que B est* **inverse de droite** *de A.*
Si en revanche $BA = \mathbf{1}$, on dit que B est **inverse de gauche** *de A.*

Proposition: *(1) Si B est l'inverse de droite de A, elle est aussi son inverse de gauche.*
(2) Si B est l'inverse de gauche de A, elle est aussi son inverse de droite.
(3) Si B, B' sont les inverses de droite et de gauche de A, alors $B = B' =: A^{-1}$.

Dans la pratique, il suffit donc de ne vérifier qu'une seule des inverses de gauche/droite.

Démonstration: (1) Si $AB = \mathbf{1}$, on multiplie de gauche avec B et de droite avec A pour trouver $B(AB)A = BA \Rightarrow (BA)^2 = BA$. Car $C := BA$ est élément du groupe, il existe bien son inverse (de droite) D telle que $CD = \mathbf{1}$. La relation $C^2 = C$ implique donc $BA = C = \mathbf{1}$. B est donc inverse de gauche.
(2) Si $BA = 1$, on en tire $(AB)^2 = A(BA)A = AB$. Car $C := AB$ a bien une inverse D (de gauche) $DC = \mathbf{1}$, la relation $C^2 = C$ implique $AB = C = \mathbf{1}$. B est donc inverse de droite.
(3) Si $AB = \mathbf{1}$ et $B'A = \mathbf{1}$, on multiplie la 1ère avec A de droite et la 2e avec A de gauche pour en tirer $ABA = A = AB'A$. Multiplication avec B' de gauche et B de droite produit $\underbrace{B'A}\,B\,\underbrace{AB} = \underbrace{B'A}\,B'\,\underbrace{AB} \Rightarrow B = B'$. QED]

on arrive à un des résultats les plus importants de l'algèbre linéaire

Théorème: (théorème spectral) *Soit V espace pré-Hilbert (de dimension finie) et $A : V \to V$ hermitique, $A = A^+$. Alors*
(i) toute valeur propre α de A est réelle
(ii) si α, β sont deux valeurs propres distincts de A, $\alpha \neq \beta$, et x, y sont les vecteurs propres associés, on a $\langle x|y\rangle = 0$
(iii) il existe une base orthonormée $\{e_i\}$ de V, telle que

$$Ae_i = \alpha_i e_i \quad , \quad x = \sum_i \langle e_i|x\rangle\, e_i \quad \forall x \in V$$

Importance physique de ce résultat: en mécanique quantique, toutes les "quantités physiques" sont représentées à l'aide des opérateurs hermitiques A tel que leurs seules valeurs observables sont les valeurs propres α de A. C'est très bien que $\alpha \in \mathbb{R}$ est garanti !

☞ nous voyons que toutes les propriétés notées ci-haut dans l'exemple d'une matrice 2×2 hermitique (symétrique) sont tout à fait génériques

Démonstration: (i) par calcul direct, avec $A = A^+$

$$\begin{aligned} \langle x | Ax \rangle &= \alpha \langle x | x \rangle = \alpha \|x\| \\ \| \\ \langle Ax | x \rangle &= \alpha^* \langle x | x \rangle = \alpha^* \|x\| \end{aligned}$$

pour $x \neq 0$ on a $\|x\| \neq 0$, donc $\alpha^* = \alpha \in \mathbb{R}$.
(ii) soit $Ax = \alpha x$ et $Ay = \beta y$ tel que $\alpha \neq \beta$. Alors

$$\begin{aligned} \langle x | Ay \rangle &= \beta \langle x | y \rangle \\ \| \\ \langle Ax | y \rangle &= \alpha^* \langle x | y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

il vient $(\alpha - \beta)\langle x | y \rangle = 0$ donc $\langle x | y \rangle = 0$.
(iii) on utilise l'isomorphisme $V \triangleq \mathbb{R}^n$, $n < \infty$. Pour $\mathbb{R}^n$, les valeurs propres sont les zéros $P(\alpha) = 0$ du polynôme caractéristique (si $\mathbb{C}^n$, coefficients *a priori* complexes). Le **théorème fondamental de l'algèbre** (ou théorème de Gauss-d'Alembert) garantit l'existence d'un $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha_1) = 0$. On a $Ax_1 = \alpha_1 x_1$, $x_1 \in V$. On forme

$$V_1^\perp := \{ y \in V \,|\, \langle x_1 | y \rangle = 0 \} \qquad \text{tous les vecteurs orthogonaux à } x_1$$

$\Rightarrow V_1^\perp \subset \mathbb{R}^n$ est sous-espace vectoriel de $V \triangleq \mathbb{R}^n$ et $\dim V_1^\perp = n - 1$.

on écrit $x = \xi_1 x_1 + y$ où $y \in V_1^\perp$. Car $Ax = \xi_1 A x_1 + Ay = \xi_1 \alpha_1 x_1 + Ay$, il vient $\langle x_1 | Ay \rangle = \langle Ax_1 | y \rangle = \alpha_1 \langle x_1 | y \rangle = 0$. Donc $Ay \in V_1^\perp$.
La matrice associée à A prend donc la structure on sait que $\alpha_1 \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 : V_1^\perp \to V_1^\perp \qquad \begin{array}{l} \text{est matrice } (n-1) \times (n-1) \\ \text{et hermitique } A_1 = A_1^+ \end{array}$$

car si $y, y' \in V_1^\perp$, on a $\langle y | A_1 y' \rangle = \langle y | Ay' \rangle = \langle Ay | y' \rangle = \langle A_1 y | y' \rangle$, donc $A_1 = A_1^+$.
On repète la même argumentation pour A_1: on calcule le polynome caracteristique $P_1(\lambda) := \det(A_1 - \lambda \mathbf{1})$ et on sait qu'il existe $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ tel que $P_1(\alpha_2) = 0$. On a $Ax_2 = A_1 x_2 = \alpha_2 x_2$, avec $x_2 \in V_1^\perp$. On forme

$$V_2^\perp := \{ y \in V_1^\perp \,|\, \langle x_2 | y \rangle = 0 \} \qquad \text{tous les vecteurs orthogonaux à } x_1 \text{ et à } x_2$$

$\Rightarrow V_2^\perp \subset \mathbb{R}^n$ est sous-espace vectoriel de $V_1^\perp \subset \mathbb{R}^n$ et $\dim V_2^\perp = n - 2$ etc.
L'argument est repeté $n - 1$ fois. QED

Conclusion: chaque matrice $d \times d$ hermitique A se ramène à une forme diagonale

$$\boxed{D = U^+ A U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_d \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \;\; ; \;\; i = 1, \ldots, d}$$

voici un exemple d'opérateur sur un espace de fonctions

Exemple: considérons un espace de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ avec valeurs complexes et dérivables & intégrables comme il se révélera nécessaire, et les opérations standard d'espace vectoriel

espace de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R})$

$$\big(f+g\big)(x) := f(x) + g(x) \ , \ \ \big(\alpha\, f\big)(x) := \alpha f(x) \ ; \ \ \alpha \in \mathbb{C}$$

et du produit scalaire

il faut: $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, |f(x)|^2 < \infty$ et f dérivable

$$\big\langle f \big| g \big\rangle := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ f^*(x) g(x)$$

Étudions l'opérateur $\big(pf\big)(x) := \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, évidemment linéaire

$$\begin{aligned}
\big\langle f \big| p\, g \big\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ f^*(x) \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \\
&= \underbrace{\frac{1}{\mathrm{i}} f^*(x) g(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ requis à } \pm\infty\text{, sinon divergence}} - \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \frac{\mathrm{d}f^*(x)}{\mathrm{d}x} g(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \left(\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right)^* g(x) \ = \ \big\langle p\, f \big| g \big\rangle
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ l'opérateur p est hermitique

☞ en mécanique quantique, p devient l'opérateur de l'impulsion (quantité de mouvement)

? quelles valeurs propres et vecteurs propres ?

on considère l'équation des valeurs propres

$$\big(pf\big)(x) = \lambda f(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lambda f(x)$$

dans ce cas, il faut résoudre une équation différentielle, et non pas une équation algébrique.

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x) = f_0\, e^{\mathrm{i}\lambda x} \qquad \text{onde plane stationnaire}}$$

☞ chaque valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre.

interprétation physique: dans un système spatialement infini, l'impulsion d'une particule libre peut prendre toute valeur réelle

Définition: *Soit V espace pré-Hilbert et $A : V \to V$ linéaire. A est* **normale**, *si $AA^+ = A^+A$.*

N.B.: les matrices hermitiques et les matrices unitaires sont normales

Théorème: *Une matrice A a une base orthonormée de vecteurs propres si et seulement si A est normale.*

Démonstration: (i) "$\Rightarrow$" si A a une base orthonormée des vecteurs propres, elle devient diagonale dans cette base $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_d \end{pmatrix} \Rightarrow AA^+ = A^+A$.

(ii) "$\Leftarrow$" on se concentre au cas $V \triangleq \mathbb{C}^n$. Avec le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det\left(A - \lambda \mathbf{1}\right)$, il existe $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha_1) = 0$ et $Ax_1 = \alpha_1 x_1$. Soit

$$V_1^\perp := \left\{ y \in V \middle| \langle x_1 | y \rangle = 0 \right\} \quad \text{et décomposition } x = \xi_1 x_1 + y \Rightarrow \dim V_1^\perp = n - 1$$

Si $y \in V_1^\perp$, on a $\langle x_1 | Ay \rangle = \langle A^+ x_1 | y \rangle = \langle \alpha_1^* x_1 | y \rangle = \alpha_1^{**} \langle x_1 | y \rangle = \alpha_1 \langle x_1 | y \rangle = 0$, donc $Ay \in V_1^\perp$. Ceci implique $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}$ où $A_1 : V_1^\perp \to V_1^\perp$. De plus, $A_1 A_1^+ y = AA^+ y = A^+ A y = A_1^+ A_1 y$, donc A_1 est normale. On repète cet argument $n-1$ fois afin de réduire la matrice $n \times n$ A à sa forme diagonale. QED

on comprend mieux l'importance de ce résultat en étudiant des matrices non normales:

Exemple: $V = \mathbb{R}^2$, matrices 2×2 non normales $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_1$ a deux fois la valeur propre α; A_2 a les valeurs propres α, β;

calcul des vecteurs propres de A_2, pour $\alpha \neq \beta$

$$A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \alpha x + y = \alpha x \\ \beta y = \alpha y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \text{ arbitraire} \neq 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \qquad \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \alpha x + y = \beta x \\ \beta y = \beta y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \text{ arbitraire} \neq 0 \\ y = (\beta - \alpha) x \end{array} \right. \qquad \begin{pmatrix} x \\ (\beta - \alpha) x \end{pmatrix}$$

- si $\alpha \neq \beta$, vecteurs propres distincts $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ (\beta - \alpha) x \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = x^2 \neq 0$

A_2 non normale $\Rightarrow$ vecteurs propres linéairement indépendants, mais non orthogonaux

- si cas limite $\alpha = \beta$, vecteur propre $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_2$

A_1 non normale $\Rightarrow$ un seul vecteur propre pour 2 valeurs propres !

pour finir, voici un dernier résultat général

Définition: *Une matrice $n \times n$ J est un* **bloc de Jordan**, *si elle s'écrit sous la forme*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Une telle matrice a n fois la valeur propre λ, mais qu'un seul vecteur propre.

Théorème: (Jordan) *Soit V espace pré-Hilbert et $A : V \to V$ linéaire.*
Il existe toujours une transformation de similarité telle que A se réduit à la forme

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

où les J_i sont les blocs de Jordan, avec valeurs propres λ_i. De plus,
$\dim J_1 + \cdots + \dim J_k = \dim V$.

N.B.: dans l'exemple précedent, la matrice A_1 est un bloc de Jordan 2×2.

[Astuce de calcul: division des polynômes

Exercice: résoudre l'équation $P(x) := x^3 - 6x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{65}{2} = 0$.
Seule la formule pour les zéros des polynômes quadratiques est facile, celles pour les ordres 3 et 4 sont fastidieuses, et en général inexistantes pour les ordres ≥ 5.

Dans la pratique, on se tire souvent d'affaire en devinant une solution: ici $x = 2$.
En effet: $2^3 - 6 \cdot 2^2 - \frac{33}{4} \cdot 2 + \frac{65}{2} = -16 + \frac{32}{2} = 0$. $\Rightarrow P(2) = 0$ et $P(x)$ est divisible par $x - 2$.

La division du polynôme $P(x)$ par $x - 2$ procède ainsi:

$$\left(x^3 - 6x^2 - \tfrac{33}{4}x + \tfrac{65}{2}\right) : (x - 2) = x^2$$

diviser le 1er terme de $P(x)$ par x, noter le résultat x^2

$$\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)}$$

on multiplie le résultat x^2 avec $x - 2$

$$-4x^2$$

effectuer la soustraction

[Astuce de calcul: division des polynômes

Exercice: résoudre l'équation $P(x) := x^3 - 6x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{65}{2} = 0$.
Seule la formule pour les zéros des polynômes quadratiques est facile, celles pour les ordres 3 et 4 sont fastidieuses, et en général inexistantes pour les ordres ≥ 5.

Dans la pratique, on se tire souvent d'affaire en devinant une solution: ici $x = 2$.
En effet: $2^3 - 6 \cdot 2^2 - \frac{33}{4} \cdot 2 + \frac{65}{2} = -16 + \frac{32}{2} = 0$. $\Rightarrow P(2) = 0$ et $P(x)$ est divisible par $x - 2$.

La division du polynôme $P(x)$ par $x - 2$ procède ainsi:

$$\left(x^3 - 6x^2 - \tfrac{33}{4}x + \tfrac{65}{2}\right) : (x - 2) = x^2 - 4x$$

diviser le 1er terme de $P(x)$ par x, noter le résultat x^2

$$-\left(x^3 - 2x^2\right)$$

on multiplie le résultat x^2 avec $x - 2$

$$-4x^2 - \tfrac{33}{4}x$$

effectuer la soustraction, puis faire descendre le prochain terme de $P(x)$

$$-\left(-4x^2 + 8x\right)$$

diviser le 1er terme par x, noter le résultat $-4x$. Ensuite le multiplier par $x - 2$

$$-\tfrac{65}{4}x$$

effectuer la soustraction

[Astuce de calcul: division des polynômes

Exercice: résoudre l'équation $P(x) := x^3 - 6x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{65}{2} = 0$.
Seule la formule pour les zéros des polynômes quadratiques est facile, celles pour les ordres 3 et 4 sont fastidieuses, et en général inexistantes pour les ordres ≥ 5.

Dans la pratique, on se tire souvent d'affaire en devinant une solution: ici $x = 2$.
En effet: $2^3 - 6 \cdot 4 - \frac{33}{4} \cdot 2 + \frac{65}{2} = -16 + \frac{32}{2} = 0$. $\Rightarrow P(2) = 0$ et $P(x)$ est divisible par $x - 2$.
La division du polynôme $P(x)$ par $x - 2$ procède ainsi:

$$\left(x^3 - 6x^2 - \tfrac{33}{4}x + \tfrac{65}{2}\right) : (x-2) = x^2 - 4x - \tfrac{65}{4}$$

diviser le 1er terme de $P(x)$ par x, noter le résultat x^2

$$-\left(x^3 - 2x^2\right)$$

on multiplie le résultat x^2 avec $x - 2$

$$-4x^2 - \tfrac{33}{4}x$$

effectuer la soustraction, puis faire descendre le prochain terme de $P(x)$

$$-\left(-4x^2 + 8x\right)$$

diviser le 1er terme par x, noter le résultat $-4x$. Ensuite le multiplier par $x - 2$

$$-\tfrac{65}{4}x + \tfrac{65}{2}$$

effectuer la soustraction, puis faire descendre le prochain terme de $P(x)$

$$-\left(-\tfrac{65}{4}x + \tfrac{65}{2}\right)$$

diviser le 1er terme par x, noter le résultat $-\frac{65}{4}$. Ensuite le multiplier par $x - 2$

$$0$$

effectuer la soustraction: on trouve 0 $\Rightarrow$ la division est terminée !

N.B.: si le premier zéro est correctement deviné, la division doit toujours se terminer avec 0.

Conclusion: $\boxed{P(x) = x^3 - 6x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{65}{2} = \left(x^2 - 4x - \frac{65}{4}\right)(x-2)}$.

La solution de l'équation quadratique restante donne $P(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{13}{2}\right)(x-2)$,
avec les trois zéros $x = -\frac{5}{2}$, $x = \frac{13}{2}$, $x = 2$.]

11. Méthode numérique pour valeurs propres

technique simple et efficace afin d'obtenir la valeur propre maximale d'une matrice A

$*$ itération simple/*Potenzmethode* afin d'en illustrer l'idée !

si matrice $m \times m$ est normale, $A^+A = AA^+$, utiliser la représentation spectrale

$$A = \sum_i \alpha_i \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big| \quad , \quad A\big|e_i\big\rangle = \alpha_i \big|e_i\big\rangle$$

on peut ordonner: $|\alpha_1| > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \ldots$

on applique A à un vector initial/*Startvektor* $y = \big|y\big\rangle$: 1 application

$$A\big|y\big\rangle = \sum_i \alpha_i \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big|y\big\rangle$$

11. Méthode numérique pour valeurs propres

technique simple et efficace afin d'obtenir la valeur propre maximale d'une matrice A

$*$ itération simple/*Potenzmethode* afin d'en illustrer l'idée !

si matrice $m \times m$ est normale, $A^+A = AA^+$, utiliser la représentation spectrale

$$A = \sum_i \alpha_i \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big| \quad , \quad A\big|e_i\big\rangle = \alpha_i \big|e_i\big\rangle$$

on peut ordonner: $|\alpha_1| > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \ldots$

on applique A à un vector initial/*Startvektor* $y = \big|y\big\rangle$: 2 applications

$$A^2\big|y\big\rangle = \sum_i \alpha_i^2 \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big|y\big\rangle$$

11. Méthode numérique pour valeurs propres

technique simple et efficace afin d'obtenir la valeur propre maximale d'une matrice A

$*$ itération simple/*Potenzmethode* afin d'en illustrer l'idée !

si matrice $m \times m$ est normale, $A^+A = AA^+$, utiliser la représentation spectrale

$$A = \sum_i \alpha_i \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big| \quad , \quad A\big|e_i\big\rangle = \alpha_i \big|e_i\big\rangle$$

on peut ordonner: $|\alpha_1| > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \ldots$

on applique A à un vector initial/*Startvektor* $y = \big|y\big\rangle$: 3 applications

$$A^3\big|y\big\rangle = \sum_i \alpha_i^3 \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big|y\big\rangle$$

11. Méthode numérique pour valeurs propres

technique simple et efficace afin d'obtenir la valeur propre maximale d'une matrice A

$*$ itération simple/*Potenzmethode* afin d'en illustrer l'idée !

si matrice $m \times m$ est normale, $A^+A = AA^+$, utiliser la représentation spectrale

$$A = \sum_i \alpha_i \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big| \quad , \quad A\big|e_i\big\rangle = \alpha_i \big|e_i\big\rangle$$

on peut ordonner: $|\alpha_1| > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \ldots$

on applique A à un vector initial/*Startvektor* $y = \big|y\big\rangle$: n applications

$$A^n\big|y\big\rangle = \sum_i \alpha_i^n \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big|y\big\rangle$$

11. Méthode numérique pour valeurs propres

technique simple et efficace afin d'obtenir la valeur propre maximale d'une matrice A

$*$ itération simple/*Potenzmethode* afin d'en illustrer l'idée !

si matrice $m \times m$ est normale, $A^+A = AA^+$, utiliser la représentation spectrale

$$A = \sum_i \alpha_i \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big| \quad , \quad A\big|e_i\big\rangle = \alpha_i \big|e_i\big\rangle$$

on peut ordonner: $|\alpha_1| > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \dots$

on applique A à un vector initial/*Startvektor* $y = \big|y\big\rangle$: n applications

$$A^n\big|y\big\rangle = \sum_i \alpha_i^n \big|e_i\big\rangle\big\langle e_i\big|y\big\rangle$$

si $n \gg 1$, on a $|\alpha_1|^n \gg |\alpha_2|^n \geq |\alpha_3|^n \geq \dots$ et $\lim_{n\to\infty} g^{1/n} = 1$ si $g \neq 0$

$$A^n\big|y\big\rangle \simeq \alpha_1^n \big|e_1\big\rangle\big\langle e_1\big|y\big\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = \lim_{n\to\infty} \big\langle y\big|A^n\big|y\big\rangle^{1/n}}$$

N.B.: convergence assurée sauf si $\big\langle e_1|y\big\rangle = 0$.

Mise en pratique: on définit d'abord un **algorithme**, comme suit

1. choisir un vecteur initial $\boldsymbol{x}_0$. Poser $k = 0$. Fixer le nombre maximal d'itérations, $N_{\max}$.
2. calculer $A\boldsymbol{x}_k$. Poser $\mu_k := \max_{j=1,\dots,n} \left|\left(A\boldsymbol{x}_k\right)_i\right|$.
3. normaliser $\boldsymbol{x}_{k+1} := \frac{1}{\mu_k} A\boldsymbol{x}_k$. Augmenter k par un.
4. si $k < N_{\max}$, retourner à l'étape 2. Sinon, arrêter.

pour l'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, avec $\alpha_+ = 7$ et $\alpha_- = 1$, on obtient

k	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{x}_k$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.225 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.2035 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.2005 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.20007 \end{pmatrix}$
$A\boldsymbol{x}_k$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.125 \\ 1.450 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.0175 \\ 1.4070 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.0025 \\ 1.4010 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.00036 \\ 1.40014 \end{pmatrix}$
μ_k	5	8	7.125	7.01575	7.0025	7.00036

on constate:

1. les valeurs de μ_k convergent vers la valeur propre $\alpha_+ = 7$, pour $k \to \infty$.
2. les vecteurs $\boldsymbol{x}_k$ convergent vers le vecteur propre $\boldsymbol{x}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/5 \end{pmatrix}$, pour $k \to \infty$.

grand avantage pratique: il ne faut que le résultat de l'application de la matrice A sur un vecteur $\boldsymbol{x}$, donc bien adapté aux **matrices creuses** (c.à.d. avec très peu d'éléments non nuls, typiquement $\mathrm{O}(m)$) de taille m énorme ($m \sim 2^{100} \simeq 10^{30}$ faisables).

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

hermitesch	hermitique; hermitien
konform; winkeltreu	conforme
Scherung, *f*	cisaillement, *m*
Ähnlichkeitstransformation, *f*	transformation de similarité, *f*
unitäre Transformation, *f*	transformation unitaire, *f*
Drehung, *f*; Rotation, *f*	rotation, *f*
drehen	tourner
Eigenwert, *m* (engl. eigenvalue)	valeur propre, *f*
Eigenvektor, *m* (engl. eigenvector)	vecteur propre, *m*
charakteristisches Polynom, *n*	polynôme caractéristique, *m*
teilbar	divisible
dünnbesetzte Matrix, *f* (engl. sparse matrix)	matrice creuse, *f*
vollbesetzte Matrix, *f*	matrice dense, *f*

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

COURS V/ VORLESUNG V

II) Fondations de la mécanique
1. Notions élémentaires

• objectif de la mécanique: décrire le mouvement des corps

une variable utile est la **position**:

$$\text{vecteur de position} \quad \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

quelle est la variation de la position $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ en fonction du temps ?

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}(t_1 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_1) \ , \ \Delta t = t_2 - t_1$$

on définit la **vitesse** (vieux: célérité) sous forme d'une dérivée de $\boldsymbol{r}(t)$

$$\boldsymbol{v} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

N.B.: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ est également un vecteur

$$\text{vecteur de vitesse} \quad \boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

la direction de $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ est tangentielle par rapport à l'orbite $\boldsymbol{r} = r(t)$

N.B.: un vecteur $\boldsymbol{r}$ a une **longueur**

$$\left|\boldsymbol{r}\right| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

et une **direction**. L'une ou l'autre peuvent changer.

Pour les besoins de la mécanique, la seule vitesse ne contient pas toujours assez d'informations.

On définit aussi l'**accélération**

$$\boldsymbol{a} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

N.B.: notations habituelles en physique pour les dérivées par rapport au temps t

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \quad , \quad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}}$$

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Grundlage, *f*	fondation, *f*
Grundbegriff, *m*	notion élémentaire, *f*
Ort, *m*	position, *f*
Ortsvektor, *m*	vecteur de position, *m*
Geschwindigkeit, *f*	vitesse, *f*; célérité, *f*
Geschwindigkeitsvektor, *m*	vecteur de vitesse, *m*
Länge, *f*	longueur, *f*
Richtung, *f*	direction, *f*
Beschleunigung, *f*	accélération, *f*
Beschleunigungsvektor, *m*	vecteur d'accélération, *m*
Differentialquotient, *m*	taux de variation, *m*
Ableitung, *f*	dérivée, *f*
ableiten	dériver; prendre la dérivée
Herleitung, *f*; Ableitung, *f* ⚠	déduction, *f*
herleiten; ableiten ⚠	déduire; démontrer
alte Zöpfe soll man abschneiden	il faut couper les vieilles tresses

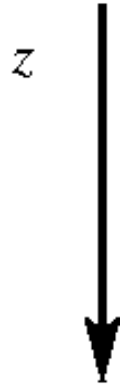
le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

Exemples: (1) orbite rectiligne/*geradlinige Bahn*

le vecteur de vitesse a la même direction que son changement $\boldsymbol{v}(t) \parallel \Delta\boldsymbol{v}(t)$

donc l'accélération $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$

situation physique: particule, initialement au repos, chute sous l'influence de la pesanteur



accélération $a_z = g$ $\Rightarrow \ddot{z} = g$

le mouvement est donc décrit à l'aide d'une équadiff

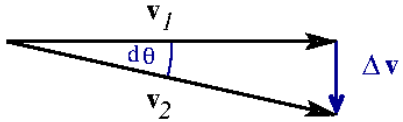
[**N.B.:** si l'on admet $z(t) = z_0 + \frac{1}{2}gt^2$, on retrouve bien entendu $\ddot{z}(t) = g$]

(2) orbite circulaire/*kreisförmige Bahn*

le vecteur de vitesse est perpendiculaire à son changement $\boldsymbol{v}(t) \perp \Delta\boldsymbol{v}(t)$

changement de position par angle $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}v}{v} \Rightarrow \mathrm{d}v = v\mathrm{d}\theta$

et $v = |\boldsymbol{v}| = \mathrm{cste.}$



définir la **vitesse angulaire** $\omega := \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

obtenir l'**accélération radiale** $a_r = \omega v$

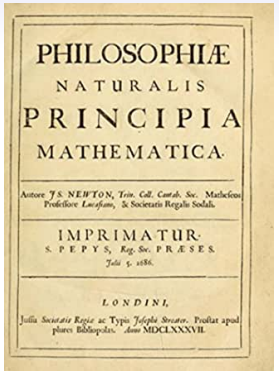
☞ Un mouvement accéléré a un vecteur de vitesse $\boldsymbol{v}(t) \neq \mathrm{cste.}$, *a contrario* des habitudes quotidiennes !

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Bahn, *f*	orbite, *f*
geradlinige Bahn, *f*	orbite rectiligne, *f*
geradlinig gleichförmige Bahn, *f*	orbite rectiligne uniforme, *f*
in Ruhe	au repos
am Anfang; anfangs	initialement; au début
Schwerefeld, *n*	pesanteur, *f*
fallen	chuter; tomber
kreisförmige Bahn, *f*; Kreisbahn, *f*	orbite circulaire, *f*
senkrecht	perpendiculaire; orthogonale
Winkelgeschwindigkeit, *f*	vitesse angulaire, *f*
Radialbeschleunigung, *f*	accélération radiale, *f*

le genre grammatical (*m,f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

2. Les axiomes de Newton (1687)


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

- condensé des expériences ☞ formulation mathématique précise
- définit aussi un cadre

☞ toute la structure de la mécanique se déduit des trois axiomes suivantes

> *"Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare."*

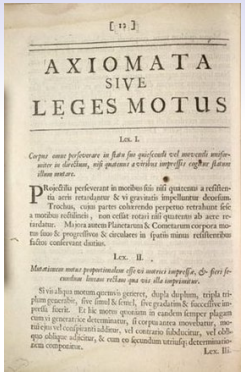
> *"Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état."*

C'est le **principe d'inertie**, formulé par GALILÉE, *'Discorsi . . . '* (1638)

- sélectionne une classe de repères – les **repères d'inertie** – où les autres axiomes sont valables

Contre-exemple physique: voiture ou train passant par une courbe

☞ 'forces fictives' provenant de l'accélération du repère


[19]

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus fusius conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquatur, & cum eo secundum utriusque determinationis compositum.

Lex. III.

Il faut placer ici deux **Définitions**:

(1) **masse** := densité $\times$ volume, ou bien $m := \rho \cdot V$

(2) **impulsion** := masse $\times$ vitesse, ou bien $p := m \cdot v$

vieux: **quantité de mouvement**

le $\cdot$ indique tout juste la multiplication

II *"Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam reactam qua vis illa imprimitur."*

II *"Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée."*

Notre notation moderne de cet axiome est (ne valable que dans repères d'inertie)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F} \qquad \text{force}}$$

Si la masse m ne dépend pas du temps t, on a $\dot{\boldsymbol{p}} = m\dot{\boldsymbol{v}}$, alors $\boxed{m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}}$.

N.B.: programme: donner les forces $\boldsymbol{F}$ explicitement, puis résoudre équadiff de mouvement.

III *"Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi."*

III *"L'action est toujours égale à la réaction; c'est à dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires."*

On l'énonce souvent en compact: $\boxed{\textit{actio} = \textit{reactio}}$

Sélectionne systèmes isolés, où chaque composante interagit avec les autres

Exemple: système à deux corps
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}_1 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}_2$ ou encore

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = \mathbf{0}}$$

"La somme des impulsions est constante."

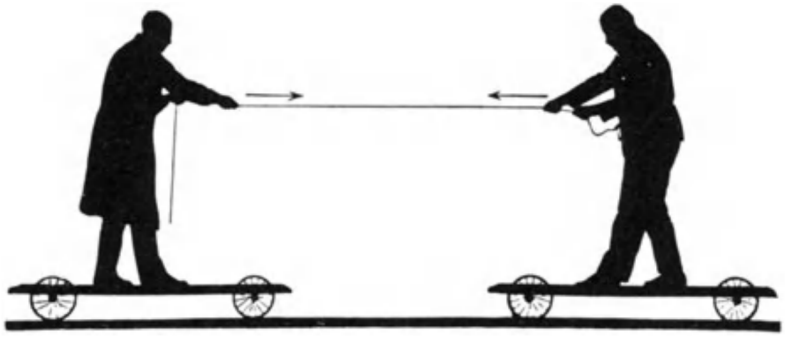


Abb. 33. Kraft = Gegenkraft, actio = reactio

R.W. Pohl, *Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, 18e, Heidelberg (1982); Abb. 33

Afin de compléter l'appréciation des axiomes newtoniennes:

- **I** et **III** formulent des restrictions sur les systèmes à l'étude, où finalement **II** est vrai.

  N.B.: on se concentre sur des systèmes isolés, dans un repère d'inertie.

- **II** définit un algorithme mathématique pour trouver le mouvement:

  - donner explicitement les forces $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r})$ pour tous les éléments du système

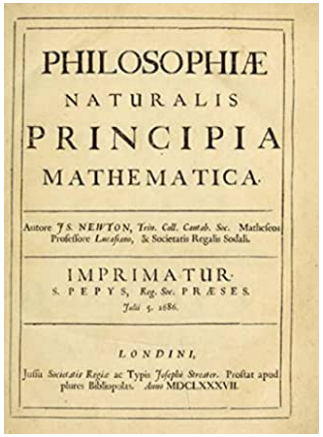
    il faut le faire avec l'intuition de physicien, le formalisme n'y aide point
  - calculer le mouvement $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, en résolvant l'équation différentielle $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$.

en principe faisable (mathématiquement on a des garanties d'existence de solution unique, pour une condition initiale donnée), dans la pratique souvent très fastidieux

☞ d'où l'intérêt d'obtenir des moyens plus astucieux pour y parvenir

N.B.: une des grandes avancées chez Newton est la distinction claire entre impulsions et forces

Remarque historique: la première (et toujours l'unique) traduction de la 'Principia' de NEWTON en français fut produite par VOLTAIRE (1694-1778) et la MARQUISE DE CHÂTELET (1706-49), dans le château des Châtelet à Cirey-sur-Blaise (Lorraine) et surtout à la cour du roi de Pologne Stanislas (1677-1766) à Lunéville !

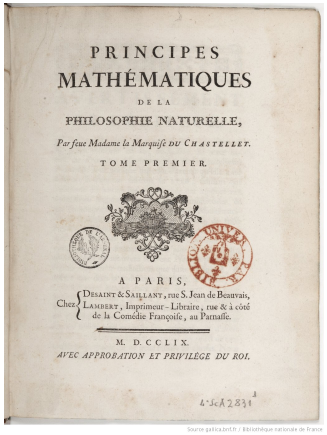

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

1687


PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE,
Par feue Madame la Marquise DU CHASTELLET.
TOME PREMIER.

A PARIS,
Chez DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais, LAMBERT, Imprimeur-Libraire, rue & à côté de la Comédie Françoise, au Parnasse.

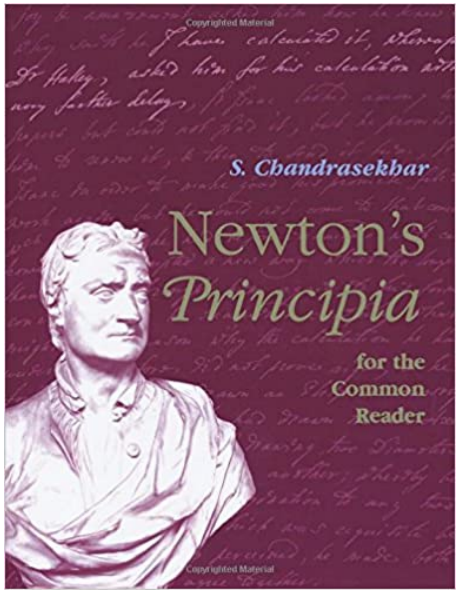
M. DCCLIX.
AVEC APPROBATION ET PRIVILÈGE DU ROI.

1759

N.B.: pendant les années 1730 et 1740 la cour de Lunéville était une des cours les plus brillantes des Lumières en Europe ... présence de MONTESQUIEU, MAUPERTUIS, HELVÉTIUS, HÉNAULT, BOFFRAND, HÉRÉ, ... et hors de la France, très important pour la sécurité personnelle de VOLTAIRE ...

source: `https://gallica.bnf.fr/essentiels/mini-notice/cour-luneville-0` & `wikipedia`

La *'Principia'* de NEWTON est écrit dans un style expressément formel et surtout fait appel à des techniques géométriques dont on est moins habitué aujourd'hui (la version originale ne contient aucune équation, mais en parle sans cesse).



Le physicien S. CHADRASEKHAR (1910-95) a rendu le texte originel dans une forme qui est plus facile à saisir pour un lecteur moderne. Ainsi on peut toujours apprécier les idées de NEWTON directement.

Remarque finale: NEWTON admet sans question l'espace euclidéen et le temps 'bien connus de tous'.

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Axiom, *n*	axiome, *m*
Kraft, *f*	force, *f*
Scheinkraft, *f*	force fictive, *f*
Bezugssystem, *n*	repère, *m*
Inertialsystem, *n*	repère d'inertie, *m*
Trägheitsprinzip, *n*	principe d'inertie, *m*
Dichte, *f*	masse volumique, *f*; densité, *f*
Impuls, *m*	impulsion, *f*
Bewegungsgröße, *f*	quantité de mouvement, *f* ⚠ *veraltet*/vieillot, désuet

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

3. Travail et énergie

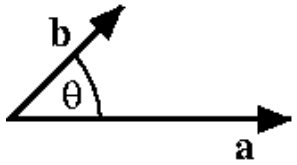
on développera des conceptions auxiliaires, afin de simplifier à la fois la discussion qualitative et aussi les calculs
considérons le mouvement (lent) d'une particule, sous l'influence d'une force $\boldsymbol{F}$

Définition: *Le* **travail** *W est mesuré par le produit de la force avec la distance parcourue:* $\boxed{\textit{travail} := \textit{force} \times \textit{distance}}$ $\boxed{\textit{Arbeit} := \textit{Kraft} \cdot \textit{Weg}}$

$$\boxed{W := \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}}$$

où $\cdot$ est le produit scalaire entre les vecteurs $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{r}$.

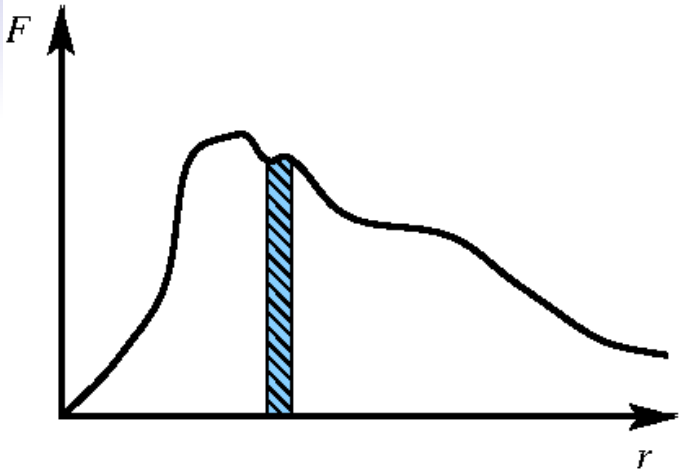
Rappel: produit scalaire $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos\theta$
avec $a = |\boldsymbol{a}|$ longueur de $\boldsymbol{a}$, et θ: angle entre les deux vecteurs



(i) si $W > 0$, $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{r}$ ont le même sens
☞ *"la force fournit du travail"*

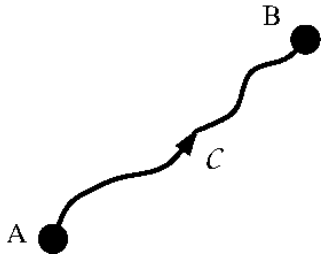
(ii) si $W < 0$, $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{r}$ ont des sens opposés
☞ *"faire du travail contre la force"*

souvent, la force $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ dépend de la distance alors il faut sommer sur les sections



$$W = \sum_i \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i \longrightarrow \int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\boxed{W = \int_A^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}$$



Ici, l'intégrale curviligne dépend *a priori* des détails de la courbe $\mathcal{C}$ qui relie les points A et B.

Définition: *Une force* $\boldsymbol{F}$ *est* **conservative**, *s'il existe une fonction scalaire* $V = V(\boldsymbol{r})$ *telle que*

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}\, V(\boldsymbol{r})}$$

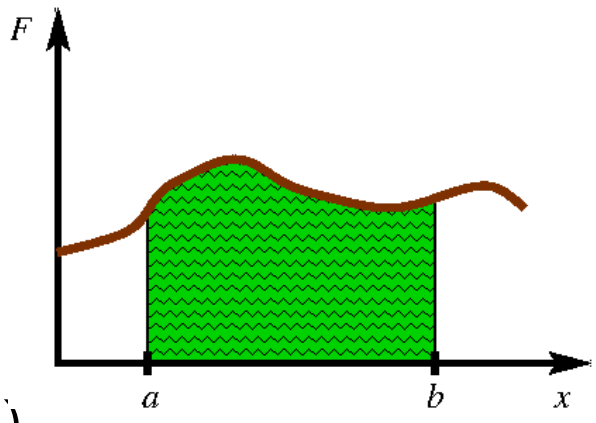
où $\boldsymbol{\nabla} := \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ *est le* **gradient** *(ou 'nabla').*

La fonction V *s'appelle le* **potentiel**.

Illustration au cas $1D$:

calculons le travail W le long de l'axe x d'une force $F = F(x)$ (surface)

$$W = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$



si $F = F(x)$ est conservative, alors $F(x) = -V'(x) = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}$. Il vient

$$\Longrightarrow \quad W = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -V(x)\Big|_a^b = V(a) - V(b)$$

$\Rightarrow$ W ne dépend que du potentiel dans les deux points extrêmes a et b.

Théorème: *Pour des forces conservatives, le travail ne dépend toujours que des points extrêmes A, B d'une courbe $\mathcal{C}$*

notation symbolique

$$W = \int_{\{\mathcal{C}\}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = V(A) - V(B)$$

Illustrations des forces conservatives et non conservatives:

(a) la force gravitationnelle exercée d'un centre à l'origine sur un corps à l'endroit $\boldsymbol{r}$ est conservative, car

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{grav}}(\boldsymbol{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{e_r} = -\boldsymbol{\nabla} V_{\mathrm{grav}}(r) \quad , \quad V_{\mathrm{grav}}(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

où $r = \left|\boldsymbol{r}\right|$ et $\boldsymbol{e_r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ est le vecteur unité en direction radiale. Ici $G = 6.67430(15) \cdot 10^{-11}[\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}]$ est la constante gravitationnelle.

(b) la force coulombienne exercée d'une charge électrique q_1 à l'origine sur une charge q_2 à l'endroit $\boldsymbol{r}$ est conservative, car

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{coul}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e_r} = -\boldsymbol{\nabla} V_{\mathrm{coul}}(r) \quad , \quad V_{\mathrm{coul}}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

Ici $\varepsilon_0 = 8.8541878128(13) \cdot 10^{-12}[\mathrm{F\ m}^{-1}]$ est la constante diélectrique.

(c) des forces de frottement n'admettent pas de potentiel, par exemple

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{frott}} = -\gamma\boldsymbol{v} = -\gamma\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \text{où } \gamma = \mathrm{cste.}$$

Par conséquent, elles ne sont pas conservatives (mais dissipatives).

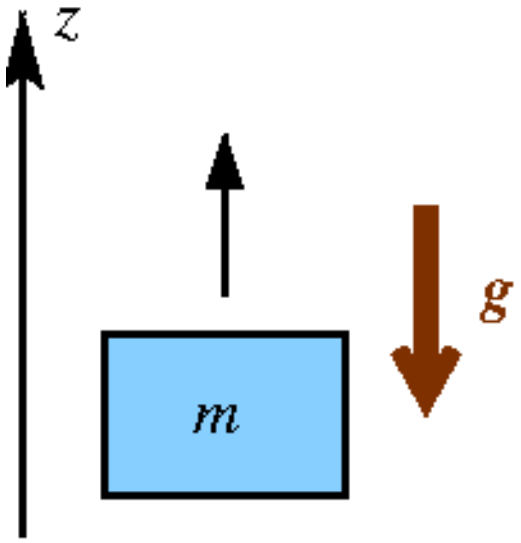
Exemples:

(1) levée d'une masse contre la pesanteur

force de la pesanteur $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$

travail $\mathrm{d}W = m\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{z} = -\, mg\mathrm{d}z$

N.B.: le signe relatif est négatif, car on fournit du travail contre la pesanteur



◦ si masse initialement à l'hauteur h_1, et finalement à l'hauteur h_2, on trouve

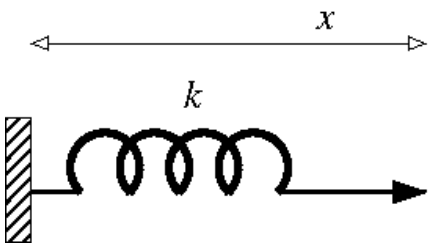
$$W = \int_{h_1}^{h_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{z} = -\int_{h_1}^{h_2} mg\mathrm{d}z = -\big(h_2 - h_1\big)mg$$

Notons encore $h = h_2 - h_1$ la difference des hauteurs

On retient la formule finale pour le travail d'une levée de masse (*Hubarbeit*)

$$\boxed{W = mgh}$$

(2) l'étirement d'un ressort de raideur connue



force pour rallonger le ressort (loi de HOOKE)

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r} \quad , \quad k \text{ est la } \textbf{raideur}$$

travail: $\mathrm{d}W = -\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = k\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

on a mis le sens de l'axe dans la direction vers laquelle on tire, on fournit donc du travail

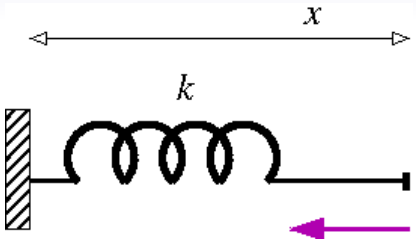
afin d'étirer le ressort jusqu'à la longueur x, il faut fournir du travail

$$W = \int_0^x k\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2$$

On retient la formule finale pour le travail d'étirement d'un ressort (*Dehnungsarbeit einer Feder*)

$$\boxed{W = \frac{1}{2}kx^2}$$

(3) travail d'accélération d'un ressort



on considère un ressort étiré, qui est relâché
$\Rightarrow$ le ressort se rétrécit, avec vitesse $v = v(t)$
$\Rightarrow$ le ressort fournit le travail $\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x$

en général, d'apres l'axiome **II** de NEWTON

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

pour un mouvement le long de l'axe x, on a l'élement infinitésimal du travail

$$\mathrm{d}W = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\,\mathrm{d}t = mv\,\mathrm{d}v$$

ce qu'on peut intégrer

vitesse initiale nulle au moment du relâchement

$$W = \int_0^v mv\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv^2$$

On retient: formule finale pour le travail d'accélération (*Beschleunigungsarbeit*)

$$\boxed{W = \frac{1}{2}mv^2}$$

Définition: *Si l'on fournit du travail sur un système, ce système acquiert la capacité de fournir du travail. On dit que le système a acquis de l'***énergie***.*

Un système peut avoir acquis de l'**énergie potentielle**.

Exemples:

(1) lors de la levée d'une masse m à une hauteur h, l'énergie potentielle est

$$V = E_{\text{pot}} = mgh$$

(2) un ressort, de raideur k, étiré à une longueur x, a l'énergie potentielle

$$V = E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$$

En revanche, un corps accéléré peut aussi fournir du travail, p.ex. pour déformer un autre corps.

(3) On dit qu'un corps en mouvement, de masse m et de vitesse v, a l'**énergie cinétique**

$$T = E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Théorème: *Pour des systèmes mécaniques conservatifs, on trouve*

$$\boxed{E = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \text{cste.}}$$

N.B.: on comprend l'origine de la terminologie 'force conservative'

On peut en tirer profit comme suit: si un corps ne se déplace le long de l'axe x et sous influence d'une force conservative, qu'on peut donc d'écrire à l'aide d'un potentiel $F(x) = -V'(x)$, on obtient donc la relation suivante entre la vitesse $v = \dot{x}$ et la coordonnée x elle-même

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E = \text{cste.}$$

☞ prend la forme d'une équadiff (du 1er ordre) pour la position $x = x(t)$!

Pour les forces conservatives on peut donc se faciliter la tâche d'obtenir une équadiff pour le mouvement. Pour le faire, il faut trouver le potentiel $V = V(x)$.

Problème restant: ceci ne fonctionne qu'aux cas avec une seule variable $x = x(t)$ à déterminer ...

Démonstration: nous considérons un mouvement rectiligne, le long de l'axe x, avec une force conservative

$$F = -V'(x) = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}$$

L'énergie totale est donnée par $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$. Sa conservation se voit comme suit, en calculant la dérivée totale par rapport au temps t

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}m\,2\dot{x}\ddot{x} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\dot{x} \\
&= \Bigg(\underbrace{m\ddot{x} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}}_{=0}\Bigg)\dot{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

car l'axiome **II** de Newton affirme que $F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = m\ddot{x}$. Q.E.D.

N.B.: dans cet argument, l'ingrédient essentiel semble être la force conservative ...

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Arbeit, *f*	travail, *m*
die Kraft verrichtet Arbeit	la force fournit du travail
gegen eine Kraft Arbeit verrichten	faire du travail contre une force
Linienintegral, *n*; Wegintegral, *n*	intégrale curviligne, *f*
konservative Kraft, *f*	force conservative, *f*
Erhaltungssatz, *m*	théorème de conservation, *m*
Potential, *n*	potentiel, *m*
Hubarbeit, *f*	travail de levée de masse, *m*
Beschleunigungsarbeit, *f*	travail d'accélération, *m*
Energie, *f*	énergie, *f*
potentielle Energie, *f*	énergie potentielle, *f*
kinetische Energie, *f*	énergie cinétique, *f*
Feder, *f*	ressort, *m*
Steifigkeit, *f*	raideur, *f*
Federkonstante *k*, *f*	raideur *k* d'un ressort, *f*
dissipativ	dissipatif
gedämpft	amorti
sich zusammenziehen; schrumpfen	se rétrécir

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

COURS VI/ VORLESUNG VI

III. Le lagrangien

Rappel: les 3 axiomes de la mécanique de Newton

I *"Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état."*

II *"Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée."*

III *"L'action est toujours égale à la réaction; c'est à dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires."*

☞ Si repère d'inertie et système isolé $\Rightarrow$ éq. de mouvement $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$

Ceci est complété des définitions:

(1) **masse** := densité $\times$ volume, $m := \rho V$ (2) **impulsion** := masse $\times$ vitesse $\boldsymbol{p} := m\boldsymbol{v}$

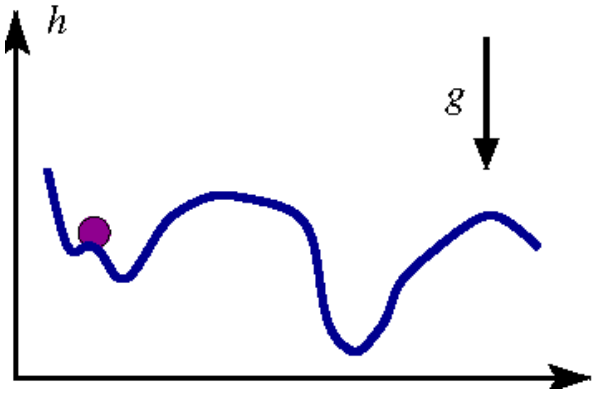
et des concepts auxiliaires (3) **travail** := force $\times$ distance $W := \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ et **énergie**

(4) si forces conservatives $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$, avec **potentiel** V (scalaire)

(5) **énergie cinétique** $T := \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2$

si on peut travailler dans un repère d'inertie et le système physique est isolé, on a le programme:
(1) déterminer toutes les forces $\boldsymbol{F}$ agissantes sur le système
(2) résoudre l'équadiff $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$

Difficulté: souvent, les forces ne sont pas connues explicitement d'avance !



Exemple: chariot sur montagne russe
- une force connue: la pesanteur g (constante)
- ○ la forme de la montagne fixée par la construction
- ○ le chariot (la bille) *'doit rester'* sur les rails
  ☞ système soumis à une **contrainte**
- mouvement très inhomogène (accéléré)

☞ autres forces doivent agair

force externe $\boldsymbol{F}_{\text{ex}} = m\boldsymbol{g} = \text{cste.}$
en revanche, on observe l'accélération $\boldsymbol{a} \neq \text{cste.}$

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\text{ex}} + \boldsymbol{F}_{\text{con}} \quad , \quad \boldsymbol{F}_{\text{con}} \text{ est une } \textbf{force de contrainte}$$

? peut-on trouver $\boldsymbol{F}_{\text{con}}$? comment ?

Réponse préliminaire:

on ne considère qu'un mouvement unidimensionnel, avec forces conservatives

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V = -\mathrm{grad}\, V$$

notons $x = x(t)$ la seule variable du problème

Dans ce cas, l'énergie totale est conservée $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = \mathrm{cste}$

Rappel: en effet $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} m\, 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\dot{x} = \Bigg(\underbrace{m\ddot{x} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}}_{=0} \Bigg) \dot{x} = 0$

ici, la connaissance du seul potentiel $V = V(x)$ suffit afin de trouver une équadiff pour le mouvement

N.B.: pratiquement, un seul potentiel est plus facile à trouver qu'un vecteur $\boldsymbol{F}$

☞ conditions d'applicabilité très restrictives

Formalisme général

d'abord, on donnera la construction, suivi des exemples. Ensuite, on apportera la justification, qui fera appel au calcul variationnel.

considèrons: système respectant les 3 axiomes de Newton & forces conservatives
soit l'**énergie cinétique** T et le **potentiel** V du système

Définition: *La fonction* $L = T - V$ *est le* **lagrangien** *du système*.

Le lagrangien est une fonction des positions x_i et des vitesse $\dot{x}_i$ de toutes les particules dans le système, $L = L(x_i, \dot{x}_i, t)$

Théorème: (Euler, Lagrange) *Pour un système mécanique avec des forces conservatives, les équations de mouvement sont*

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0}$$

Définition: *Le nombre N de variables indépendantes d'un système physique est son* **nombre de degrés de liberté**.

Les degrés de liberté ne sont pas toujours des coordonnées cartésiennes.
Toute autre variable peut être utilisée (**ex.**: coordonnées sphériques (r, θ, φ))

Un système est décrit à l'aide des **coordonnées généralisées** q_i, $i = 1, \ldots, N$.

Ainsi, le lagrangien devient $L = L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, t)$.

Théorème: (Euler, Lagrange) *Pour un système mécanique avec N degrés de liberté et des forces conservatives, les équations de mouvement sont*

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ ; \ \ i = 1, \ldots, N}$$

Pour les N degrés de liberté, on a N équadiffs de mouvement.
Définition: *Ces équations s'appellent* **équations d'Euler-Lagrange**.

Exemple 1

considérons 1 particule dans l'espace tri-dimensionnel, soumise à une force conservative $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$, avec potentiel $V = V(x, y, z)$.

- on a $N = 3$ degrés de liberte, décrits par les coordonnées cartésiennes x, y, z.
- on écrit l'énergie cinétique $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$. m: masse de la particule
- le potentiel est admis donné $V = V(x, y, z)$.
- on écrit le lagrangien

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x, y, z)$$

$N = 3$ degrés de liberté $\Rightarrow$ il faut trouver $N = 3$ équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad \text{puis les injecter dans } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

- ainsi on obtient l'équation d'Euler-Lagrange pour la coordonnée x

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

c'est la composante x de l'équation newtonienne $m\ddot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\nabla} V = m\ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$.

les 3 équations d'Euler-Lagrange sont donc

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad , \quad m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad , \quad m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$\Rightarrow$ en coordonnées cartésiennes, les éqs d'Euler-Lagrange réproduisent l'axiome **II** de Newton

les 3 équations d'Euler-Lagrange sont donc

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad , \quad m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad , \quad m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$\Rightarrow$ en coordonnées cartésiennes, les éqs d'Euler-Lagrange réproduisent l'axiome **II** de Newton

? Compatibilité avec l'axiome **I**, c.à.d avec le principe d'inertie **?**

les 3 équations d'Euler-Lagrange sont donc

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad , \quad m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad , \quad m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$\Rightarrow$ en coordonnées cartésiennes, les éqs d'Euler-Lagrange réproduisent l'axiome **II** de Newton

? Compatibilité avec l'axiome **I**, c.à.d avec le principe d'inertie ?

Considérons une particule libre, sans forces externes,

(1) dans un temps-espace uniforme (uniformité du temps et de l'espace)

$\Rightarrow L$ est indépendant de t et de $\boldsymbol{r}$

$\Rightarrow L = L(\boldsymbol{v})$, où $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}$

(2) isotropie de l'espace: L est indépendant de la direction de $\boldsymbol{v}$

$\Rightarrow L = L(v^2)$

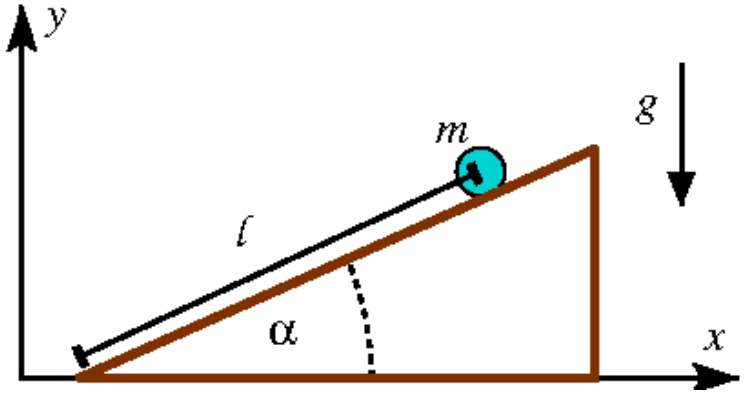
des eqs d'Euler-Langrange on tire: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v_i} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial v_i} = \mathrm{cste}$ indépendante de la direction

$\Rightarrow v_i = \mathrm{cste}$ ce qui reproduit le principe d'inertie.

Exemple 2

Particule de masse m glisse sur plan incliné,
sous la pesanteur
angle d'inclinaison α du plan fixé
contrainte: particule doit rester sur le plan



• Nombre de degrés de liberté: $N = 2$ (deux coordonnées x, y) - 1 (1 contrainte) $= 1$
$\Rightarrow$ il faut donc trouver 1 éq. d'Euler-Lagrange

ici choix pratique: coordonnées polaires

$$x = \ell \cos \alpha \quad , \quad y = \ell \sin \alpha$$

ce qui permet une formulation simple de la contrainte: $\alpha = \text{cste.}$

N.B.: à la place des coordonnées cartésiennes x, y, on travaille avec des coordonnées généralisées ℓ, α.
☞ Ici, le seul degré de liberté est décrit à l'aide de $\ell = \ell(t)$, car $\alpha = \text{cste.}$

• calcul de l'énergie cinétique T

procédure: d'abord écrire T en coordonnées cartésiennes, ensuite faire explicitement le changement vers coordonnées généralisées

pour clarté, la transformation est faite sans tenir compte de la contrainte $\alpha = \mathrm{cste}$.

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \\
&= \frac{m}{2}\left[\left(\dot{\ell}\cos\alpha - \ell\dot{\alpha}\sin\alpha\right)^2 + \left(\dot{\ell}\sin\alpha + \ell\dot{\alpha}\cos\alpha\right)^2\right] \\
&= \frac{m}{2}\left[\left(\dot{\ell}^2\cos^2\alpha - 2\dot{\ell}\ell\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha + \ell^2\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left(\dot{\ell}^2\sin^2\alpha + 2\dot{\ell}\ell\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha + \ell^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha\right)\right] \\
&= \frac{m}{2}\left[\dot{\ell}^2\underbrace{\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)}_{=1} + \ell^2\dot{\alpha}^2\underbrace{\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)}_{=1}\right] \\
&= \frac{m}{2}\left[\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{\alpha}^2\right] \qquad \text{(T)}
\end{aligned}
$$

et avec la contrainte $\dot{\alpha} = 0$, on en tire finalement $T = \frac{m}{2}\dot{\ell}^2$.

• calcul du potentiel (énergie potentielle) V

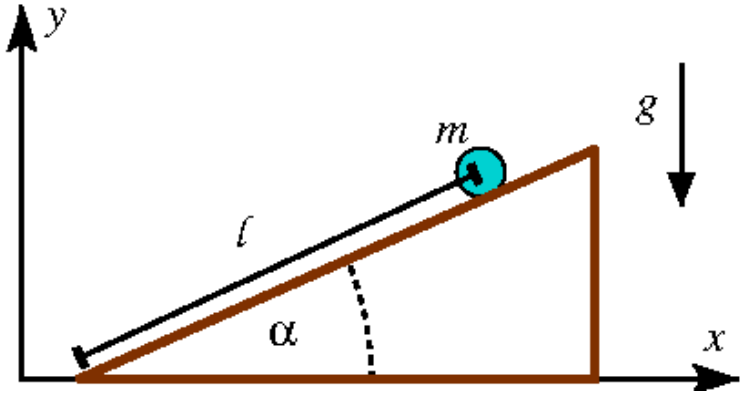
procédure: d'abord écrire V en coordonnées cartésiennes, ensuite faire explicitement le changement vers coordonnées généralisées

potentiel d'une levée de masse

$V = mgy + \text{cste.}$

◦ V n'est déterminé qu'à une constante additive près

◦ une constante additive en V (ou en L) ne change pas les éqs d'Euler-Lagrange



⚠ attention au 'bon' choix de signe !

$$\Rightarrow \qquad V = mg\ell \sin\alpha$$

• on écrit le lagrangien

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{\ell}^2 - mg\ell\sin\alpha$$

☞ calculs préparatifs

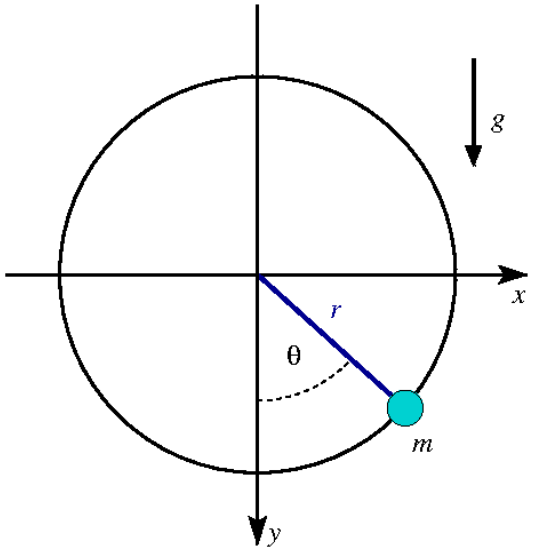
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} = m\dot{\ell} \ , \quad \frac{\partial L}{\partial \ell} = -mg\sin\alpha \qquad \text{puis les injecter dans } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \ell} = 0$$

• finalement, écrire l'éq. d'Euler-Lagrange $m\ddot{\ell} + mg\sin\alpha = 0$

$$\boxed{\ddot{\ell} = -g\sin\alpha}$$

Exemple 3

Pendule sphérique: particule de masse m sur un anneau sous la pesanteur
rayon r de l'anneau fixé
contrainte: particule doit rester sur l'anneau



• Nombre de degrés de liberté: $N = 2$ (deux coordonnées x, y) - 1 (1 contrainte) $= 1$
$\Rightarrow$ il faut donc trouver 1 éq. d'Euler-Lagrange

ici choix pratique: coordonnées polaires

$$x = r \sin\theta \quad , \quad y = r \cos\theta$$

ce qui permet une formulation simple de la contrainte: $r = \text{cste.}$

N.B.: à la place des coordonnées cartésiennes x, y, on travaille avec des coordonnées généralisées r, θ.
☞ Ici, le seul degré de liberté est décrit à l'aide de $\theta = \theta(t)$, car $r = \text{cste.}$

procédure: d'abord écrire T et V en coordonnées cartésiennes, ensuite faire explicitement le changement vers coordonnées généralisées

- calcul de l'énergie cinétique, avec l'éq. (T) de l'exemple 2 & contrainte $\dot{r} = 0$

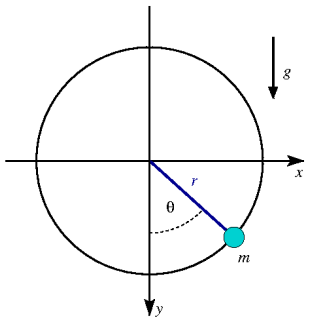
$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \overset{(\mathrm{T})}{=} \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \overset{\dot{r}=0}{=} \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2$$

- calcul du potentiel (énergie potentielle) V

potentiel d'une levée de masse $V = -mgy + \mathrm{cste.}$

⚠ attention au 'bon' choix de signe !

$$\Rightarrow \qquad V = -mgr\cos\theta$$



- calcul du lagrangien

$$L = T - V = \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + mgr\cos\theta$$

calculons $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ et $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta$, puis injecter dans $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

- l'éq. d'Euler-Lagrange (on dit aussi *'pendule physique'*)

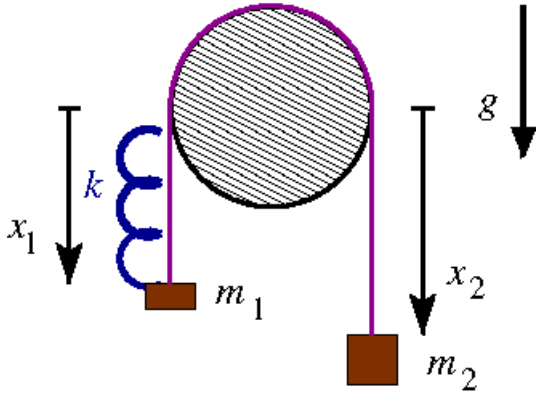
$$\boxed{mr^2\ddot{\theta} + mgr\sin\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{r}\sin\theta = 0}$$

N.B.: si $\theta \ll 1$, on a $\ddot{\theta} \simeq -\frac{g}{r}\theta \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$, où $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{2\pi}{P}$ *'pendule mathématique'*

Exemple 4

Voici un système fait de deux corps

Deux corps de masses $m_{1,2}$ sont liés par un fil de longueur ℓ constante, et soumises à la pesanteur.
Le fil passe sur une poulie de masse nulle.
Contrainte: $x_1 + x_2 = \ell = \mathrm{cste}$.
Le 1er corps est aussi attaché à un ressort de raideur k.



• Nombre de degrés de liberté: $N = 2$ (deux coordonnées x_1, x_2) - 1 (1 contrainte) $= 1$
$\Rightarrow$ il faut donc trouver 1 éq. d'Euler-Lagrange

N.B.: la contrainte s'écrit aussi sous la forme $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0$

procédure: d'abord écrire T et V en coordonnées cartésiennes, ensuite faire explicitement le changement vers coordonnées généralisées

- calcul de l'énergie cinétique: d'abord écrire la somme des énergies cinétiques individuelles

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2$$

en tenant compte de la contrainte $\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$, on a $T = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}_1^2$.

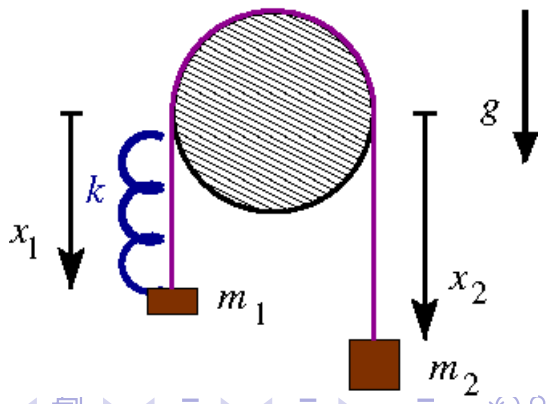
- calcul du potentiel: d'abord écrire la somme des potentiels individuelles

$$\begin{aligned} V &= \underbrace{-m_1 g x_1 + \frac{k}{2}x_1^2}_{=V_1} + \underbrace{-m_2 g x_2}_{=V_2} \quad \text{sans tenir compte de la contrainte} \\ &= -m_1 g x_1 - m_2 g\left(\ell - x_1\right) + \frac{k}{2}x_1^2 \quad \text{avec la contrainte } x_2 = \ell - x_1 \\ &= (m_2 - m_1) g x_1 + \frac{k}{2}x_1^2 + \text{cste.} \end{aligned}$$

⚠ attention au 'bon' choix de signe !

- calcul du lagrangien

$$L = T - V = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}_1^2 - (m_2 - m_1) g x_1 - \frac{k}{2}x_1^2$$



• calcul du lagrangien

$$L = T - V = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}_1^2 - (m_2 - m_1)gx_1 - \frac{k}{2}x_1^2$$

ce qu'il faut injecter dans l'éq. d'Euler-Lagrange $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -(m_2 - m_1)g - kx_1$$

• écrire l'éq. d'Euler-Lagrange

$$\boxed{(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + (m_2 - m_1)g + kx_1 = 0}$$

N.B.: l'inertie totale du système est bien la somme $m_1 + m_2$ des deux masses

N.B.': la différence $m_2 - m_1$ indique vers quel coté le système voudrait descendre

Remarques générales:

Le lagrangien L et les équations d'Euler-Lagrange permettent d'obtenir facilement les équations différentielles de mouvement, aussi dans les cas où les forces ne sont pas toutes connues d'avance. En présence de contraintes, on peut traiter le problème en éliminant les contraintes du problème.

Physiquement, on est restreint aux forces conservatives.

Une fois les équations d'Euler-Lagrange écrites, le formalisme n'est plus d'appui dans la tâche de trouver des solutions explicites.

Aucune information directe sur les forces de contrainte.

un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Hilfsbegriff, *m*	concept auxiliaire, *m*
Achterbahn, *f*	montagne russe, *f*
Zwangsbedingung, *f*	contrainte, *f*
eingeschränkt	réstrictif
Zwangskraft, *f*	force de contrainte, *f*
Anwendbarkeit, *f*	applicabilité, *f*
Freiheitsgrad, *m*	degré de liberté, *m*
Lagrangefunktion, *f*	lagrangien, *m*
verallgemeinert, generalisiert	généralisé
Koordinate, *f*	coordonnée, *f*
schiefe Ebene, *f*	plan incliné, *m*
⚠ auf der schiefen Bahn (moralisch)	sur la mauvaise voie (sens morale) ⚠
physikalisches Pendel, *n*	pendule physique, *m*
Pendel, *n*	pendule, *m*
Pendeluhr, *f*	pendule, *f* ⚠

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*