# Mécanique Analytique 1

Malte Henkel

[a]Laboratoire de Physique de Chimie Théoriques (CNRS UMR 7019),
Université de Lorraine **Nancy**, France

[b]Centro de Física Téorica e Computacional, Universidade de Lisboa, Portugal

E-Post/courriel: `malte.henkel@univ-lorraine.fr`

Cours Semestre d'hiver 2020/21, Université de Lorraine **Nancy**

# Un peu de lecuture complémentaire/*Literaturhinweise*

H. Goldstein, *Mécanique classique/Klassische Mechanik*
L.D. Landau et E.M. Lifchitz, *Mécanique/Klassische Mechanik*
ou tout autre livre sur la mécanique classique

M.L Boas, *Mathematical methods in the physical sciences*, 3e (Wiley, New York 2006)
V.S. Dotsenko *et al.*, *Méthodes mathématiques pour la physique*, 2e Dunod (Paris 2021)

Vous allez avoir besoin des formulaires mathématiques/physiques

## **Contenu**/*Inhalt*

Cours I/Vorlesung I: Discussion aprofondie des contraintes
Symétries et théorème de Nœther

Cours II/Vorlesung II: Problème de deux corps

Cours III/Vorlesung III: Diffusion

Ces notes ne contiennent que la partie du cours donnée en vidéo-conférence

# COURS I/ VORLESUNG I

# 1. Discussion approfondie des contraintes

**Rappels**:

* en mécanique, nous avons introduits des **coordonnées généralisées** $q_i$, $i = 1, \ldots, \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est le nombre de **degrés de liberté**

**Exemples**: (1) une particule, coordonnées cartésiennes $x, y, z$
(2) une particule, coordonnées sphériques $r, \theta, \phi$

* en général, le 2$^e$ axiome de Newton donne les équations de mouvement $\ddot{x}_i = F_i\big(\{x_k\}\big)$, mais il faut encore trouver explicitement les forces $F_i$

*a priori* définit algorithme mathématique: résoudre système d'équations différentielles

* souvent, forces exprimées implicitement sous forme des **contraintes**

**Exemple**: waggon sur montagne russe ☞ waggon doit rester sur le rail !

☞ cette difficulté est contournée par l'approche d'Euler-Lagrange:

*(a)* choisir des coordonnées généralisées afin de paramétriser les contraintes

*(b)* restriction aux forces conservatives: $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ où $V$: **potentiel**

*(c)* avec l'énergie cinétique, former le **lagrangien** $L := T - V$

*(d)* écrire les équations d'Euler-Lagrange $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$

pour les $q_i$ indépendantes ☞ réduction de $\mathcal{N}$ par les contraintes

L'approche d'Euler-Lagrange:

*(a)* choisir des coordonnées généralisées afin de paramétriser les contraintes

*(b)* restriction aux forces conservatives: $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ où $V$: **potentiel**

*(c)* avec l'énergie cinétique, former le **lagrangien** $L := T - V$

*(d)* écrire les équations d'Euler-Lagrange $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$

pour les $q_i$ indépendantes ☞ réduction de $\mathcal{N}$ par les contraintes

* ainsi les contraintes sont éliminées du problème mécanique
* méthode trés efficace d'obtenir les équations différentielles du mouvement
* mais les forces de contrainte ne sont pas déterminées

**Exemple**: waggon sur montagne russe

☞ forces de contrainte sont les forces qui tirent sur les rails (3$^e$ axiome de Newton)

*important pour la construction stable de la structure de la montagne russe*

Considérons un système mecanique, avec $\mathcal{N}$ degrés de liberté et coordonnées généralisées $q_i$, $i = 1, \ldots, \mathcal{N}$.

**Définition**: *Une contrainte est* **holonome**, *si elle s'écrit sous la forme*

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0$$

*Toute autre contrainte est dite* **non holomome**.

**Exemple**: pour une particule, en coordonnées sphériques $r, \theta, \phi$, une contrainte $r = r_0$ est holonome et une contrainte $r \leq r_0$ est non holonome.

analyse differentielle d'une contrainte holonome:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\sum_{\ell=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial q_\ell}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Considérons un système mecanique, avec $\mathcal{N}$ degrés de liberté et coordonnées généralisées $q_i$, $i = 1, \ldots, \mathcal{N}$.

**Définition**: *Une contrainte est* **holonome**, *si elle s'écrit sous la forme*

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0$$

*Toute autre contrainte est dite* **non holomome**.

**Exemple**: pour une particule, en coordonnées sphériques $r, \theta, \phi$, une contrainte $r = r_0$ est holonome et une contrainte $r \leq r_0$ est non holonome.

analyse differentielle d'une contrainte holonome:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\sum_{\ell=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial q_\ell}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t = 0$$

Considérons un système mecanique, avec $\mathcal{N}$ degrés de liberté et coordonnées généralisées $q_i$, $i = 1, \ldots, \mathcal{N}$.

**Définition**: *Une contrainte est* **holonome**, *si elle s'écrit sous la forme*

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0$$

*Toute autre contrainte est dite* **non holomome**.

**Exemple**: pour une particule, en coordonnées sphériques $r, \theta, \phi$, une contrainte $r = r_0$ est holonome et une contrainte $r \leq r_0$ est non holonome.

analyse differentielle d'une contrainte holonome:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\sum_{\ell=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial q_\ell}\mathrm{d}q_k + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t = 0$$

Considérons un système mecanique, avec $\mathcal{N}$ degrés de liberté et coordonnées généralisées $q_i$, $i = 1, \ldots, \mathcal{N}$.

**Définition**: *Une contrainte est* **holonome**, *si elle s'écrit sous la forme*

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0$$

*Toute autre contrainte est dite* **non holomome**.

**Exemple**: pour une particule, en coordonnées sphériques $r, \theta, \phi$, une contrainte $r = r_0$ est holonome et une contrainte $r \leq r_0$ est non holonome.

analyse differentielle d'une contrainte holonome:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\boxed{\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \mathrm{d}q_k + a_t \mathrm{d}t = 0}$$

où $a_\ell := \frac{\partial f}{\partial q_\ell}$ et $a_t := \frac{\partial f}{\partial t}$.

cette discussion nous fournit notre point de départ:

*Considérons un système mecanique, avec $\mathcal{N}$ degrés de liberté et coordonnées généralisées $q_i$, $i = 1, \ldots, \mathcal{N}$ et une contrainte de forme*

$$\boxed{\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \mathrm{d}q_k + a_t \mathrm{d}t = 0}$$

**N.B.:** cette condition est un peu plus général qu'une contrainte holonome

comment obtenir les équations d'Euler-Lagrange ? ☞ principe d'Hamilton !

**Principe d'Hamilton** *Le mouvement d'un système mécanique, entre les temps $t_1$ et $t_2$ donnés et où les valeurs $q_i(t_1)$ et $q_i(t_2)$ sont fixés, est tel que l'action soit minimale:*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L = \min\ !$$

*Ici, $L = T - V$ est le lagrangien du système.*

Appliquons ceci à la discussion de la contrainte, sous sa forme différentielle. Car les temps sont fixés dans le principe d'Hamilton, on a $\mathrm{d}t = 0$.
Ceci implique

$$\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \mathrm{d}q_\ell = 0$$

avant, nous avons étudié les variations $\eta_\ell(t)$ autour de la solution du problème variationnel. Nous pouvons en particulier regarder le cas $\mathrm{d}q_\ell = \eta_\ell$.

La contrainte peut aussi être multipliée avec une constante $\lambda$, tel que

$$\lambda \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \mathrm{d}q_\ell = 0$$

**Définition**: *La constante $\lambda$ s'apelle* **multiplicateur de Lagrange**.

Auparavant, notre discussion du principle d'Hamilton nous a mené à

$$\Delta S = \left.\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \eta_i(t) = 0$$

et nous y ajoutons la contrainte sous la forme (c.à.d. avec $\mathrm{d}q_\ell = \eta_\ell$)

$$\lambda \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \mathrm{d}q_\ell = 0$$

Ces deux conditions donnent ensemble la condition d'extrémalité

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \lambda a_i\right] \eta_i(t) = 0$$

comment procéder avec la condition d'extrémalité

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \lambda a_i \right] \eta_i(t) = 0$$

sans contraintes, ou avec les contraintes éliminées, les $\eta_i$ restantes étaient toutes indépendantes. Dans ce cas, on a pu conclure que $[\ldots] = 0$ dans la condition d'extrémalité. Ainsi les équations d'Euler-Langrangre se déduisaient. Ce raisonnement n'est plus appliquable, car on a bien la condition supplémentaire $\sum_{i=1}^{k} a_i \eta_i = 0$.

? Comment s'en sortir ?

* Pour $\mathcal{N}$ degrés de liberté, les variations $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\mathcal{N}-1}$ sont indépendantes.
* **Choisir** $\lambda$ tel que

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\mathcal{N}}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mathcal{N}}} \right) + \lambda a_{\mathcal{N}} \stackrel{!}{=} 0$$

* Maintenant, l'argumentation habituelle peut s'appliquer aux variations $\eta_1, \ldots, \eta_{\mathcal{N}-1}$ indépendantes, afin de déduire comme auparavant

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \lambda a_i = 0 \ ; \ \ i = 1, \ldots, \mathcal{N} - 1$$

nous avons donc un système de $\mathcal{N}+1$ équations, c'est à dire

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \lambda a_i &= 0 \;\; ; \;\; i = 1, \ldots, \mathcal{N} \\ \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \frac{\mathrm{d}q_\ell}{\mathrm{d}t} &= 0 \qquad \text{ici une seule contrainte}\end{aligned}$$

pour les $\mathcal{N}+1$ variables $q_i$, $i = 1, \ldots, \mathcal{N}$ et $\lambda$.

Un tel système peut être résolu, car le nombre d'équations est égal au nombre des inconnues.

Interprétation de $\lambda$ ? Nous avons les équations différentielles

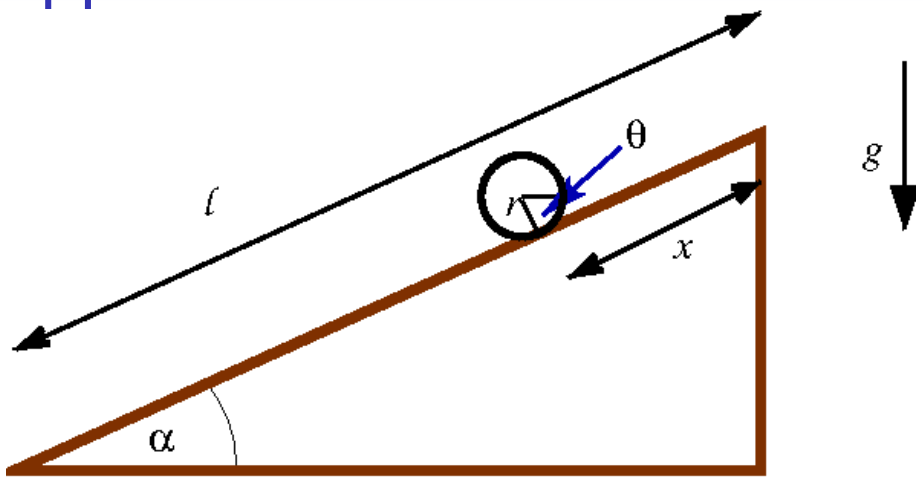
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda a_i = \text{force}$$

**donc**: $\lambda a_i$ est la composante de la **force de contrainte**,
dans la direction de la variable $q_i$.

☞ *algorithme pour le calcul des forces de contrainte*

# Exemple d'application

une roue de masse $m$ et de rayon $r$ roule sur un plan incliné, avec angle $\alpha$ d'inclinaison constant, sous l'influence de la pesanteur




nombre de degrés de liberté: 2 décrit p.ex. par les coordonnées $x$, $\theta$

contrainte: $x = r\theta \;\Rightarrow\; -\mathrm{d}x + r\mathrm{d}\theta = 0$ a bien la forme étudiée ci-dessus

energie cinétique

$$T = \underbrace{\frac{m}{2}\,\dot{x}^2}_{\text{mouvement du centre de masse}} + \underbrace{\frac{m}{2}\,r^2\,\dot{\theta}^2}_{\text{rotation autour du centre}}$$

potentiel la seule force explicite est la pesanteur

$$V = mg\big(\ell - x\big)\sin\alpha$$

lagrangien

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 - mg\big(\ell - x\big)\sin\alpha$$

*(A)* élimination d'une variable, ici via $x = r\theta$. On trouve

$$\begin{aligned} L &= mr^2\dot{\theta}^2 - mg\big(\ell - r\theta\big)\sin\alpha \\ &= m\dot{x}^2 + mgsin(\alpha)x + \mathrm{cste.} \end{aligned}$$

**N.B.:** on observe bien ume inertie $m$, differente de $\frac{m}{2}$ qu'on obtient pour une bille qui glisse sur le plan

*(B)* calcul explicit des forces de contrainte

car $x = r\theta$, on a bien $-\mathrm{d}x + r\mathrm{d}\theta = 0 \Rightarrow$ on identifie $\boxed{a_x = -1,\ a_\theta = r}$.

$\Rightarrow$ il faut écrire deux équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \lambda a_x = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) + \lambda a_\theta = 0$$

$$mg\sin\alpha - m\ddot{x} + \lambda(-1) = 0 \quad , \quad -mr^2\ddot{\theta} \quad + \lambda r = 0$$

ensemble avec la contrainte, on a un système des 3 équations différentielles pour les 3 variables $x, \theta, \lambda$

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - mg\sin\alpha + \lambda &= 0 \\ mr^2\ddot{\theta} - \lambda r &= 0 \\ r\dot{\theta} - \dot{x} &= 0 \end{aligned}$$

techniquement, la solution est immédiate:
$(3^e)\ r\ddot{\theta} = \ddot{x} \Rightarrow (2^e)\ m\ddot{x} = \lambda \ \Rightarrow\ (1^{er})\ 2\lambda - mg\sin\alpha = 0$, donc

$$\lambda = \frac{1}{2}mg\sin\alpha \ = \text{cste.} \ , \ \ \ddot{x} = \frac{1}{2}g\sin\alpha \ , \ \ \ddot{\theta} = \frac{g\sin\alpha}{2r}$$

la contrainte freine la roue, par rapport à la bille qui ne glisse
**force de contrainte**: $F_x = \lambda a_x = -\frac{1}{2}mg\sin\alpha$
ceci est bien entendu compatible avec le bilan des forces

$$\boxed{m\ddot{x} = F_{\text{ex}} + F_{\text{contr}} = mg\sin\alpha + \left(-\frac{1}{2}\right)mg\sin\alpha = \frac{1}{2}mg\sin\alpha}$$

le facteur $\frac{1}{2}$ est consistent avec le résultat obtenu ci-dessus par élimination d'une variable

# un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

| | |
|---|---|
| Koordinate, *f* | coordonnée, *f* |
| Zwangsbedingung, *f* | contrainte, *f* |
| Freiheitsgrad, *m* | degré de liberté, *m* |
| Potential, *n* (potentielle Energie, *f*) | potentiel, *m* (énergie potentielle, *f*) |
| kinetische Energie, *f* | énergie cinétique, *f* |
| Lagrangefunktion, *f* | lagrangien, *m* |
| Lagrangemultiplikator, *m* | multiplicateur de Lagrange, *m* |
| Zwangskraft, *f* | force de contrainte, *f* |
| holonom | holonome |
| nichtholonom | non holonome |

le genre grammatical des substantifs (*m*,*f*) est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

# 2. Symétries et lois de conservation

comment peut-on trouver des lois de conservation plus systématiquement ?

système mécanique, avec $\mathcal{N}$ degrés de liberté et coordonnées généralisées $q_i$

**Définition**: *Une variable $q_c$ s'appelle* **cyclique** *si elle n'est pas présente dans le lagrangien*

$$\frac{\partial L}{\partial q_c} = 0$$

**Définition**: *L'***impulsion** *canoniquement conjuguée à la variable $q_i$ est*

$$\boxed{p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$$

**Théorème**: *Si $q_c$ est cyclique, alors l'impulsion $p_c$ est conservée.*

**Démonstration**:

$$\dot{p}_c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_c} = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

l'identification d'une variable cyclique donne directement une quantité conservée.

**Exemple**: particule de masse $m$, avec potentiel **central**,
c.à.d. $V = V\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\big)$.

*(a)* coordonnées cartésiennes

$$L = T - V = \frac{m}{2}\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\big) - V\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\big)$$

aucune variable cyclique apparente $\Rightarrow$ aucune quantité conservée évidente
*(b)* coordonnées sphériques

$$L = T - V = \frac{m}{2}\big(\dot{r}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\big) - V(r)$$

la variable $\phi$ est cyclique, car $\partial L/\partial\phi = 0$. Donc le moment cinétique

$$p_\phi = \partial L/\partial\dot{\phi} = mr^2\sin^2(\theta)\,\dot{\phi} = \mathrm{cste.}$$

est bien une quantité conservée.

cet résultat peut encore être considéré d'un point de vue légèrement différent:

Si $q_c$ est cyclique, le lagrangien est *invariant* sous un changement de $q_c$:

$$L(q_c) = L(q_c + \varepsilon)$$

dans ce cas on parle d'une **symétrie** du lagrangien $L$

**Théorème** (Nœther):

*Si $L$ est symétrique en $q_c$, alors l'impulsion $p_c$ est conservée.*

**Exemple**: considérons la coordonnée spatiale $x_i$,

et admettons que $L$ soit invariant sous translations en $x_i$

$$L(x_i) = L(x_i + \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

donc l'impulsion $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i = \mathrm{cste.}$ est conservée

*invariance sous translations spatiales $\Rightarrow$ conservation de l'impulsion*

habituellement, l'énergie cinétique $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\boldsymbol{x}}_i\right)^2$, potentiel $V = V(\{\boldsymbol{x}_i\})$

$$\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_i} = m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i$$

est bien la *quantité de mouvement*, dans la terminologie d'antan

# un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

| | |
|---|---|
| zyklisch | cyclique |
| Impuls, *m*, (ALT: Bewegungsgröße, *f*) | quantité de mouvement, *f* |
| Impuls, *m* | impulsion, *f* |
| kanonisch konjugierter Impuls, *m* | impulsion canoniquement conjuguée, *f* |
| Erhaltungsgröße, *f* | quantité conservée, *f* |
| Drehimpuls, *m* | moment cinétique, *m* |
| Drehmoment, *n* | couple, *m* |
| Symmetrie, *f* | symétrie, *f* |
| Translationsinvarianz, *f* | invariance sous translations, *f* |
| Rotationsinvarianz, *f* | invariance sous rotations, *f* |

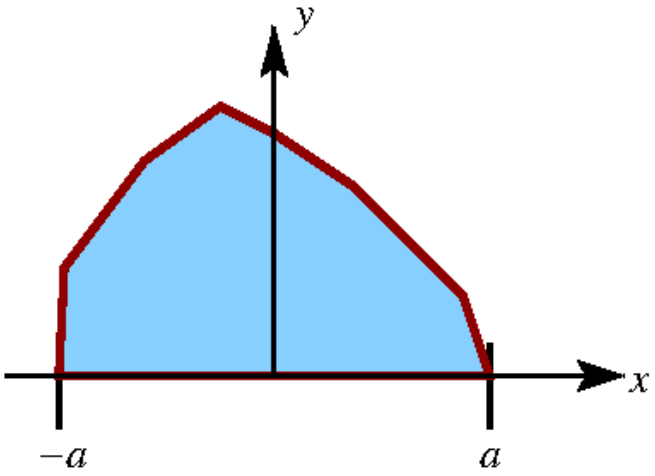
le genre grammatical des substantifs (*m,f*) est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

# 3. Un peu plus sur les contraintes

souvent un problème se pose où la contrainte est donnée par la valeur d'une intégrale

(A) **Exemple** classique: le **problème isopérimétrique**

quelle est la courbe $y = y(x)$, dans le démi-plan supérieur, qui passe par les points $(a, 0)$ et $(-a, 0)$, a une longueur $\ell$ fixée et entoure l'**aire** maximale ?




la fonction $y = y(x)$ recherchée doit obéir aux conditions suivantes

$$\text{conditions be bord:} \qquad y(a) = y(-a) = 0$$

$$\text{longueur fixée:} \qquad K[y] = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \ell = \text{cste.}$$

$$\text{aire sous la courbe:} \qquad J[y] = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, y(x) = \text{min !}$$

de nouveau, on peut le traiter à l'aide d'un **multiplicateur de Lagrange:**

On cherche un extremum $y = y(x)$ de la fonctionnelle

$$J[y] = \int_a^b \mathrm{d}x\, F(x, y(x), y'(x))$$

avec les points extrêmes $a, b$ et les conditions de bord $y(a) = A$ et $y(b) = B$ fixés. De plus, l'intégrale

$$K[y] = \int_a^b \mathrm{d}x\, G(x, y(x), y'(x)) \stackrel{!}{=} \ell$$

doit prendre une valeur $\ell$ prescrite.

**Théorème**: *Si la fonction $y = y(x)$ n'est pas une extrémale de la fonctionnelle $K[y]$, alors il existe une constante $\lambda$ telle que la solution du problème variationnel $\delta J[y] = 0$, soumise à la condition $K[y] = \ell$, est une extrémale de la fonctionnelle*

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, \left[F(x, y(x), y'(x)) + \lambda G(x, y(x), y'(x))\right]$$

*La constante $\lambda$ s'appelle* **multiplicateur de Lagrange**.

Nous appliquons ce théorème au problème isopérimétrique: il faut minimaliser

$$\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \left( y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) = \min \, !$$

L'équation d'Euler de cette fonctionelle s'écrit

$$1 + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0$$

une intégration rend ceci dans la forme

$$x + \lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 = \mathrm{cste.}$$

et ceci donne finalement une équation différentielle explicite pour $y(x)$:

$$\left(C_1 - x\right)^2 = \lambda^2 \frac{y'^2}{1 + y'^2} \quad \Rightarrow \quad y'^2 = \frac{\left(x - C_1\right)^2}{\lambda^2 - \left(x - C_1\right)^2}$$

il faut encore intégrer l'équadiff: $y'(x) = \frac{x-C_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}}$.

$$y - C_2 = \int \mathrm{d}x \, \frac{x - C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}u \, \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - u}} = -\sqrt{\lambda^2 - u}$$

avec le changement de variables $u = (x - C_1)^2$, $\mathrm{d}u = 2(x - C_1)\mathrm{d}x$

Ainsi, on peut écrire la solution sous la forme

$$\boxed{\left(y - C_2\right)^2 + \left(x - C_1\right)^2 = \lambda^2}$$

ceci est bien l'équation d'un cercle, autour du centre $(C_1, C_2)$, avec rayon $\lambda$.

par symétrie, on pose $x - C_1 = R \sin\varphi$, $y - C_2 = R\cos\varphi \Rightarrow R^2 = \lambda^2$.

Si $\varphi = 0, \pi$, comparer avec $y(\pm a) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow R = a = \lambda$.

*Le cercle est la courbe, avec une longueur donnée, qui entoure l'aire maximale*

(B) **Forme optimale des inégalités mathématiques**

* **inégalité de Poincaré**: *si sur le bord du domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *on a* $u|_{\partial\Omega} = 0$, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \left|u(\boldsymbol{x})\right|^2 \leq C \int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \left|\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})\right|^2$$

? quelle est la valeur minimale possible de $C$ ?

* **inégalité de Minkowski**:

*il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour deux fonctions* $u(x)$, $v(x)$, *on a*

$$\int \mathrm{d}x\, \left(u(x) + v(x)\right)^2 \leq C \left[\int \mathrm{d}x\, u^2(x) + \int \mathrm{d}x\, v^2(x)\right]$$

? quelle est la valeur minimale possible de $C$ ?

ces questions sont reformulées comme problèmes variationnelles:

* inégalité de Poincaré:

$$C^{-1} \leq \frac{\int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left|\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})\right|^2}{\int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left|u(\boldsymbol{x})\right|^2}$$

* inégalité de Minkowski:

$$C \geq \frac{\int \mathrm{d}x \left(u(x) + v(x)\right)^2}{\int \mathrm{d}x\, u^2(x) + \int \mathrm{d}x\, v^2(x)}$$

**N.B.:** si l'on multiplie $u(x) \mapsto \alpha u(x)$, la valeur de $C$ ne change pas

on peut imposer une normalisation pour $u(x)$ et fixer $\int \mathrm{d}x\, u^2(x) \stackrel{!}{=} 1$

reformulation comme problème variationnel avec une contrainte:

* inégalité de Poincaré:

$$C^{-1} \leq \int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \left|\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})\right|^2 = \max\,! \quad \text{tel que} \quad \int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \left|u(\boldsymbol{x})\right|^2 \stackrel{!}{=} 1$$

* inégalité de Minkowski:

$$C \geq \int \mathrm{d}x\, \big(u(x) + v(x)\big)^2 \quad \text{tel que} \quad \int \mathrm{d}x\, u^2(x) = \int \mathrm{d}x\, v^2(x) \stackrel{!}{=} 1$$

par conséquent, il faut extrémaliser les fonctionnelles suivantes:
* inégalité de Poincaré:

$$J[u] = \int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \left|\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})\right|^2 - \lambda^2 \int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \left|u(\boldsymbol{x})\right|^2$$

avec le multiplicateur de Lagrange $\lambda$
* inégalité de Minkowski:

$$J[u, v] = \int \mathrm{d}x\, \big(u(x) + v(x)\big)^2 - \lambda \int \mathrm{d}x\, u^2(x) - \mu \int \mathrm{d}x\, v^2(x)$$

avec deux multiplicateurs de Langrange $\lambda, \mu$

**Illustration**: l'inégalité de Poincaré en $n = 1$ dimensions,

domaine $\Omega$ = intervalle $[-1, 1]$, donc $u(\pm 1) = 0$.

l'équation d'Euler s'écrit

$$2u''(x) + 2\lambda^2 u(x) = 0 \ , \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, u^2(x) = 1 \ , \quad u(\pm 1) = 0$$

dont la solution générale est $u(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$.

conditions de bord $u(\pm 1) = 0$ ☞ deux solutions différentes, avec $n \in \mathbb{N}$

$$\text{(i)} \ \lambda = \frac{\pi}{2}(2n+1) \ \text{ et } \ B = 0 \ ; \ \ \text{(ii)} \ \lambda = \frac{\pi}{2}(2n) \ \text{ et } \ A = 0$$

car $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, \cos^2\big(\frac{\pi}{2}(2n+1)x\big) = 1$, on a $A = 1$ pour la solution (i) et
car $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, \sin^2\big(\frac{\pi}{2}(2n)x\big) = 1$, on a $B = 1$ pour la solution (ii).

le problème variationnel a donc les deux familles de solutions

$$u_n^{(1)}(x) = \cos\Big(\frac{\pi}{2}(2n+1)x\Big) \ , \quad u_n^{(2)}(x) = \sin\Big(\frac{\pi}{2}(2n)x\Big)$$

car $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, \big(u_n'^{(1)}(x)\big)^2 = \big(\pi(n + \frac{1}{2})\big)$ et $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, \big(u_n'^{(2)}(x)\big)^2 = \big(\pi n\big)$, le multiplicateur de Lagrange $\lambda^2 = C^{-1}$. Ainsi la forme optimale de l'inégalite de Poincaré s'écrit

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, u^2(x) \leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, \Big(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\Big)^2}$$

# un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

| | |
|---|---|
| Gebiet, *n* | domaine, *m* |
| Intervall, *n* | intervalle, *f* |
| offenes/geschlossenes Intervall, *n* | intervalle ouverte/fermée, *f* |
| Rand, *m* | bord, *m* |
| innen | à l'intérieur |
| außen | à l'extérieur |
| auf dem Rand | sur le bord |
| Innere, *n* | l'intérieur, *m* |
| Äußere, *n* | l'extérieur, *m* |
| Randbedingung, *f* | condition de bord, *f* |
| Anfangsbedingung, *f* | condition initiale, *f* |
| Lagrangemultiplikator, *m* | multiplicateur de Lagrange, *m* |

le genre grammatical des substantifs (*m,f*) est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

# COURS II/ VORLESUNG II

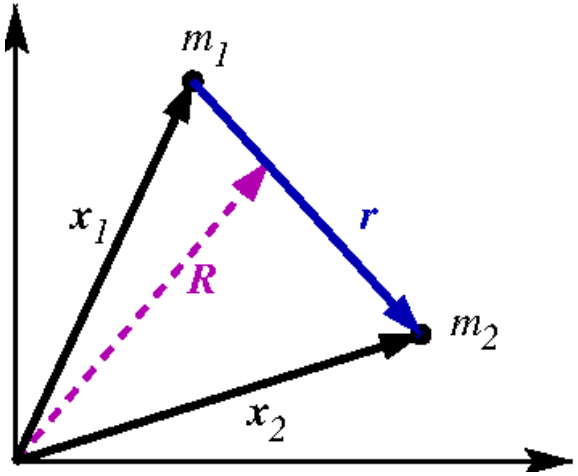
# 1. Forces centrales & problème de deux corps

on considère deux particules, de masses $m_{1,2}$, à des positions $\boldsymbol{x}_{1,2}$

**Définition** *On dit qu'une force est* **centrale**, *si le potentiel associé ne dépend que de la valeur absolue de la distance entre les particules, c.à.d.*

$$V = V(|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|)$$

Pour les forces centrales, on peut toujours séparer le problème de deux corps en deux problèmes à un seul corps

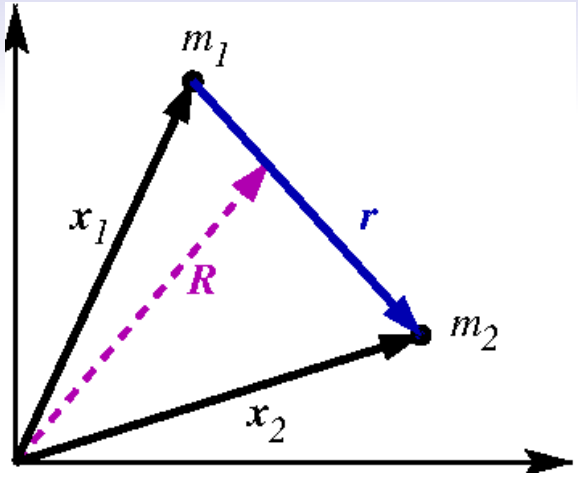



vecteur de distance $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$

vecteur **centre de masses** $\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2}$

pour des jolies animations, voir
https://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_à_deux_corps#équation_de_la_trajectoire_de_la_particule_fictive

N.B. ne **jamais** utiliser des charactères spéciaux comme ã, è, î, ó, ü, ç, ß dans les noms de sites/fichiers!




vecteur de distance $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$

vecteur **centre de masses** $\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2}$

énergie cinétique $T = \frac{m_1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\boldsymbol{x}}_2^2$

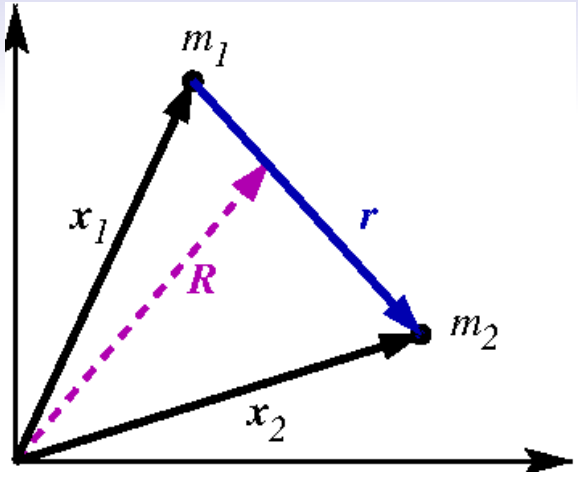
mais nous voulons $T \stackrel{!}{=} T\left(\dot{\boldsymbol{R}}, \dot{\boldsymbol{r}}\right)$

$$(m_1 + m_2)\boldsymbol{R} = m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 \quad , \quad \begin{cases} m_1\boldsymbol{r} = -m_1\boldsymbol{x}_1 + m_1\boldsymbol{x}_2 \\ -m_2\boldsymbol{r} = \quad m_2\boldsymbol{x}_1 - m_2\boldsymbol{x}_2 \end{cases}$$

additionner donne

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\boldsymbol{R} + m_1\boldsymbol{r} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{x}_2 \\ (m_1 + m_2)\boldsymbol{R} - m_2\boldsymbol{r} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{x}_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} \quad , \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}}$$




vecteur de distance $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$

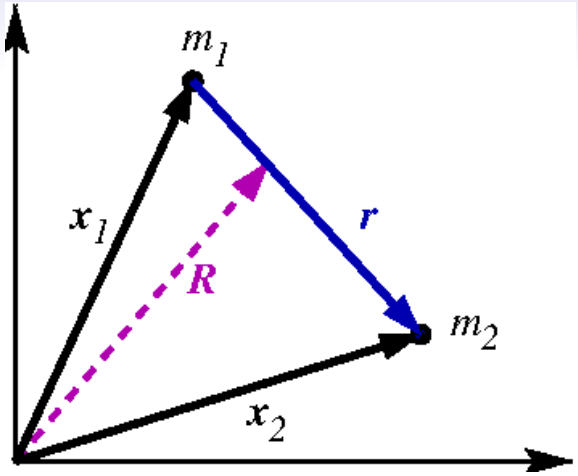
vecteur **centre de masses** $\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2}$

$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$

énergie cinétique $T = \frac{m_1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\boldsymbol{x}}_2^2$

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m_1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{R}}^2 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\boldsymbol{r}}^2\right) \\
&\quad + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\boldsymbol{r}}^2\right) \\
&= \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{m_1 m_2(m_1+m_2)}{2(m_1+m_2)^2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 \\
&= \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 \quad \text{où } \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \text{ est la } \textbf{masse réduite}
\end{aligned}
$$

on peut aussi écrire $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$




vecteur de distance $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$

vecteur **centre de masses** $\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2}$

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$$

on a donc le lagrangien $\boxed{L = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r)}$

séparation en lagrangiens des sous-systèmes $L = L_1\left(\dot{\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{R}\right) + L_2\left(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}\right)$

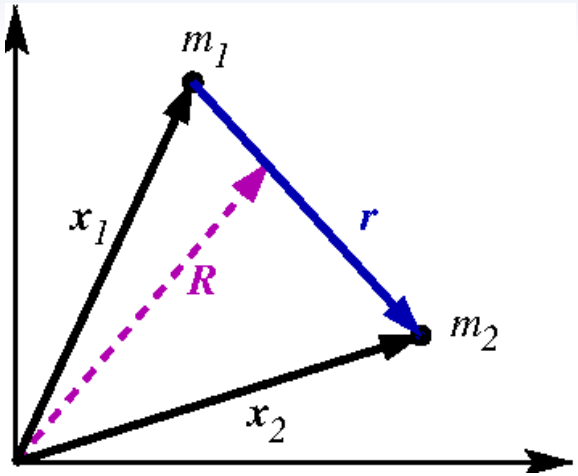
**(a)** $\boldsymbol{R}$ est cyclique $\Rightarrow \boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} = (m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{R}} = \text{cste.}$

☞ mouvement rectiligne uniforme du centre de masses

on peut toujours choisir un repère tel que $\dot{\boldsymbol{R}} = 0$

☞ $L = L_2\left(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}\right)$ se réduit au lagrangien $L_2$ qui décrit le mouvement relatif, autour du centre de masses.

changement de notation: on écrit dès maintenant $L_2 \mapsto L$




vecteur de distance $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$

vecteur **centre de masses** $\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2}$

$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$

lagrangien du mouvement relatif $L = \frac{\mu}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r)$

☞ *problème effectif d'un seul corps*

**(b)** lagrangien du mouvement relatif, en coordonées sphériques

$$\boxed{L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - V(r)}$$

$\phi$ est cyclique

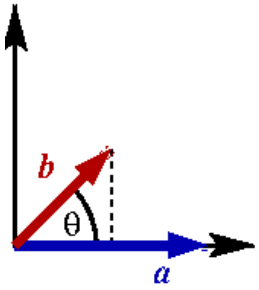
$$\Rightarrow \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi} = \text{cste.} \qquad (*)$$

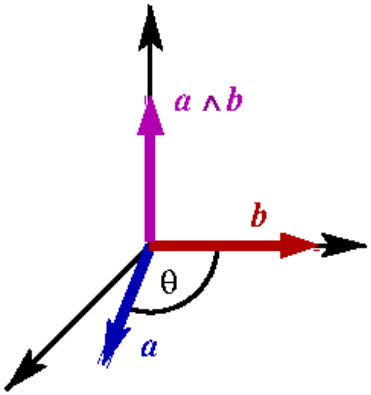
☞ conservation d'une composante du moment cinétique

# Quelques mots sur les produits des vecteurs

? comment peut-on multiplier les vecteurs

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad ?$$




$(\alpha)$ **produit scalaire**: où $\theta$ est l'angle entre les deux vecteurs

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \quad \in \mathbb{R}$$

☞ $\boxed{\text{Si le produit scalaire s'annule } \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0, \text{ il s'ensuit } \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}}$.

$(\beta)$ **produit vectoriel**: in Deutschland schreibt man $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} := \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & a_x & b_x \\ \boldsymbol{e}_y & a_y & b_y \\ \boldsymbol{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} \quad \in \mathbb{R}^3$$

Géométriquement, on a $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et la formule $|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$.

* On a l'identité $\boxed{\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a})}$ permutation cyclique

# Loi de conservation provenant de l'invariance sous rotations

Rotation autour d'une axe fixe, avec angle de rotation $\delta\varphi$ infinitésimal

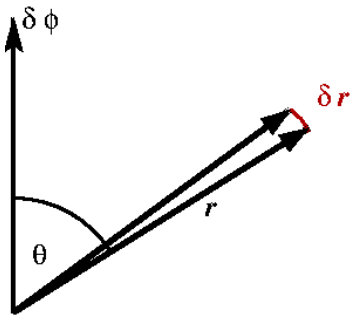
on a bien $|\delta \boldsymbol{r}| = r\sin(\theta)\delta\varphi$

et car $\delta \boldsymbol{r} \perp \delta\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{r}$, on peut écrire

$\delta \boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{r}$

de même pour la vitesse $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ :

$\delta \boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{v}$




* si système invariant sous rotations, $\varphi$ est cyclique $\Rightarrow$ symétrie du lagrangien $L$

* invariance $\delta L = 0 \Rightarrow \boxed{0 = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i} \cdot \delta \boldsymbol{v}_i\right)}$

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_i \left[\dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{p}_i \cdot \delta \boldsymbol{v}_i\right] && \text{rappel: } \dot{\boldsymbol{p}}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} \\
&= \sum_i \left[\dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot \left(\delta\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{r}\right)_i) + \boldsymbol{p}_i \cdot \left(\delta\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{v}\right)_i)\right] && \text{rappel: } \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}) \\
&= \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \wedge \dot{\boldsymbol{p}}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i \wedge \boldsymbol{p}_i\right) = \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{p}_i\right)\right)
\end{aligned}
$$

* alors, $\boxed{\text{car } \delta L = 0, \text{ on a } \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}t} = 0, \text{ où } \boldsymbol{\ell} := \sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{p}_i \textbf{ moment cinétique}}$

Nous retournons au mouvement relatif autour du centre de masses
le vecteur $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$ conservé définit une direction spatiale
le mouvement est confiné dans le plan perpendiculaire à $\boldsymbol{\ell}$, car

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{r} \cdot \left(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}\right) = \boldsymbol{p} \cdot \left(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{r}\right) = 0$$

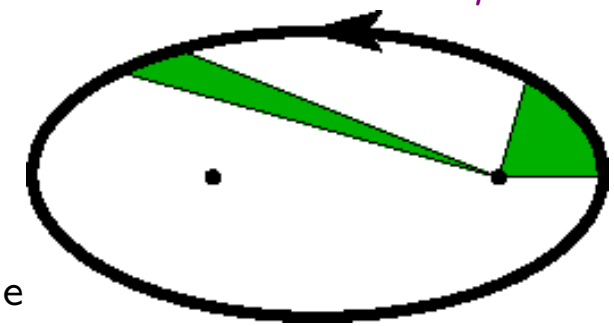
choix de l'orientation des coordonnées: $\phi = \frac{\pi}{2}$, tel que dans (*) $p_\phi = 0$.
ainsi le lagrangien devient $L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$.
$\theta$ est cyclique, donc $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta}$ est conservé.

$$\boxed{\mu r^2 \dot{\theta} =: \ell = \mathrm{cste}}$$

définir la **vitesse des aires** $\mathcal{A} := \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$, loi de conservation $\dot{\mathcal{A}} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\ell}{2\mu} = \mathrm{cste}$

☞ **2$^e$ loi de Kepler** ou **loi des aires**

en temps égaux le rayon soleil-planète couvre des surfaces égales



observation empirique de 2$^e$ loi de Kepler $\Rightarrow$ force doit être centrale

# 2. Le potentiel effectif

la dernière éq. d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$

Car nous savons que $\dot{\theta} = \ell\left(\mu r^2\right)^{-1}$, ceci devient $\mu\ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$ ou encore

$$\boxed{\mu\ddot{r} + \frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}(r)}{\mathrm{d}r} = 0 \quad , \quad V_{\mathrm{eff}}(r) := V(r) + \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}}$$

**Définition**: $V_{\mathrm{eff}}(r)$ *s'appelle* **potentiel effectif**.

☞ réduction à un problème effectif unidimensionnel à un seul corps.

le potentiel effectif est un outil très pratique pour la discussion qualitative

en partant de

$$\mu\ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu}\frac{1}{r^3} + \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$

le potentiel effectif est un outil très pratique pour la discussion qualitative

on arrive à

$$\mu \dot{r} \ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu} \frac{\dot{r}}{r^3} + \dot{r} \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$

le potentiel effectif est un outil très pratique pour la discussion qualitative

on arrive à

$$\mu \dot{r} \ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu} \frac{\dot{r}}{r^3} + \dot{r} \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$

le potentiel effectif est un outil très pratique pour la discussion qualitative

et ensuite à

$$\mu \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dot{r}^2 - \frac{\ell^2}{\mu} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(r) = 0$$

le potentiel effectif est un outil très pratique pour la discussion qualitative

ou encore à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} + V(r)\right] = 0$$

le potentiel effectif est un outil très pratique pour la discussion qualitative

ou encore à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} + V(r)\right] = 0$$

ce qui implique la conservation de l'énergie

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} + V(r)}_{=V_{\mathrm{eff}}(r)} = \mathrm{cste.}$$

car $\dot{r}^2 \geq 0$, les points $\dot{r} = 0$ sont les points extrêmes, où $V_{\mathrm{eff}}$ est maximal.

On a donc toujours $\boxed{V_{\mathrm{eff}}(r) \leq E}$.

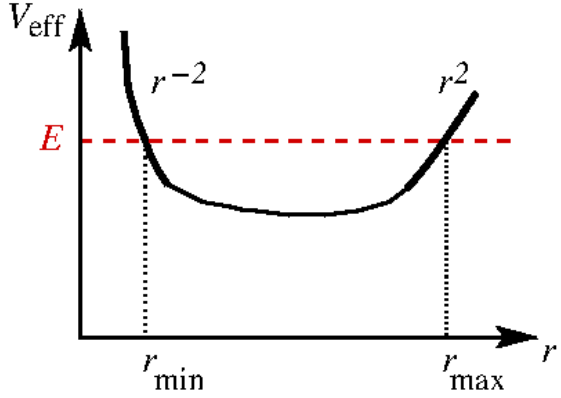
critère de sélection pour les valeurs de $r$ admissibles

☞ *très pratique ('zweckmäßig'* dixit *Poincaré) afin d'obtenir rapidement une idée physique sur les orbites, sans véritable calcul*

**Exemple 1**: oscillateur harmonique $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$, avec $k > 0$

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} + \frac{k}{2}r^2$$

mouvement physique seulement possible si $V_{\text{eff}}(r) \leq E$
et ceci implique ici




$$\boxed{r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}}$$

où $V_{\text{eff}}(r_{\text{min,max}}) \stackrel{!}{=} E$.

☞ on trouve $r^2_{\text{min,max}} = \frac{2E}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\ell^2 k}{4\mu E}}\right)$.

et on a aussi $E \geq \frac{\ell^2 k}{4\mu}$ pour tout mouvement physique

☞ toujours *mouvement lié* car $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$, $r$ est toujours borné

**Exemple 2**: gravitation/électrostatique $V(r) = -kr^{-1}$, avec $k > 0$, attractif

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} - k\frac{1}{r}$$

il faut distinguer 4 cas:

*(i)* $E > 0$: on a $r \geq r_{\min}$, où $V_{\text{eff}}(r_{\min}) \stackrel{!}{=} E$

$$r_{\min} = -\frac{k}{2E}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E^2}{\mu k^2}}\right) > 0$$

☞ mouvement non lié car la particule peut s'échapper vers l'infini

*(ii)* $E = 0$: on a $r \geq r_{\min} = \frac{\ell^2 k}{2\mu}$, où $V_{\text{eff}}(r_{\min}) \stackrel{!}{=} E$

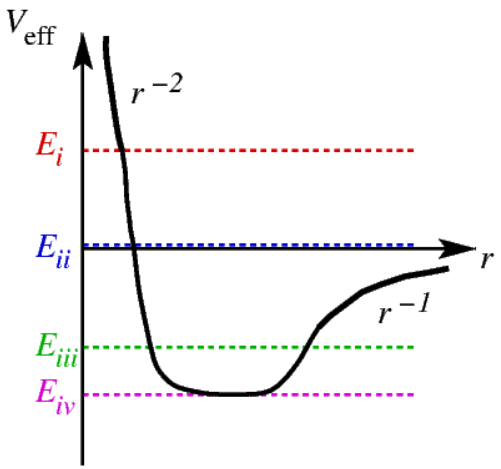
☞ mouvement non lié car la particule peut s'échapper vers l'infini, avec vitesse $\to 0$ si $r \to \infty$

*(iii)* $E < 0$: on a $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, où $V_{\text{eff}}(r_{\min,\max}) \stackrel{!}{=} E$

☞ mouvement lié car le rayon $r$ d'orbite reste toujours borné

*(iv)* $E = E_{\min} < 0$: on a $r = \text{cste}$.

☞ mouvement lié orbite circulaire (stable)



# un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

| | |
|---|---|
| Zentralkraft, *f* | force centrale, *f* |
| Zentralpotential, *n* | potentiel central, *m* |
| Schwerpunkt, *m* | centre de masses, *m* |
| reduzierte Masse, *f* | masse réduite, *f* |
| geradlinig-gleichförmige Bewegung, *f* | mouvement rectiligne uniforme, *m* |
| Relativbewegung, *f* | mouvement relatif, *m* |
| Skalarprodukt, *n* | produit scalaire, *m* |
| Vektorprodukt, *n* (Kreuzprodukt, *n*) | produit vectoriel, *m* |
| Spatprodukt, *n* | produit mixte, *m* |
| Flächengeschwindigkeit , *f* | vitesse des aires, *f* |
| Flächensatz, *m* | loi des aires, *f* |
| effectives Potential, *n* | potentiel effectif, *m* |
| gebundene Bewegung, *f* | mouvement lié, *m* |
| ungebundene Bewegung, *f* | mouvement non lié, *m* |
| anziehend | attractif |
| abstoßend | répulsif |
| Kreisbahn, *f* | orbite circulaire, *f* |
| ab sofort | dès maintenant |

le genre grammatical des substantifs (*m*,*f*) est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

# 3. Calcul de l'orbite

nos équadiffs nous donnent $r = r(t)$ et puis $\theta = \theta(t)$
ce qui permet *a priori* de trouver l'**orbite** $r = r(\theta)$
☞ *il est plus efficace de trouver l'orbite directement*
la conservation du moment cinétique donne

$$\ell = \mu r^2 \dot{\theta} = \mu r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\ell}{\mu r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}}$$

l'éq. de mouvement: $\mu \ddot{r} = -\frac{\partial V_{\mathrm{eff}}(r)}{\partial r} = f(r) + \frac{\ell^2}{\mu} \frac{1}{r^3}$ où $f(r)$ est la force

$$\frac{\ell}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left( \frac{\ell}{\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \right) - \frac{\ell^2}{\mu} \frac{1}{r^3} = f(r) \qquad (*)$$

pour la fonction $r = r(\theta)$. Nous changeons la variable

$$u = u(\theta) = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}}$$

en apportant ce changement de variable dans l'équation de mouvement (*), il vient

$$\frac{\ell^2}{\mu} u^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{\ell^2}{\mu} u^3 = f\left(\frac{1}{u}\right)$$

ce qui se simplifie, pour obtenir la **formule de Binet**

$$\boxed{\frac{\ell^2}{\mu} u^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right) = -f\left(\frac{1}{u}\right)}$$

cette formule peut s'utiliser dans les 2 sens:

*(i)* si $f(r)$ connu, on peut trouver l'orbite procédé de la *Principia* de Newton

*(ii)* si l'orbite connue des observations, on peut trouver la force

route historique Kepler $\rightarrow$ Newton; physique atomique/moléculaire et nucléaire

? comment intégrer la formule de Binet, si $f = f(r)$ est supposée connue ?

nous avons $\frac{\ell^2}{\mu} u^2 \left( \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u \right) = -f\left(\frac{1}{u}\right)$. notons $u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$ etc.

$$u'' + u = -\frac{\mu}{\ell^2} \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) =: g(u)$$

on a donc

$$u'\left(u''+u\right) = u' g(u) \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}u^2 - G(u)\right] = 0 \;\text{ où } G'(u) = g(u)$$

et la conservation de l'énergie s'écrit finalement sous la forme

$$u'^2 + u^2 - 2G(u) = K = \frac{2\mu E}{\ell^2} = \mathrm{cste.}$$

cette équadiff se sépare $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{2G(u) - u^2 + K}$, donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2G(u) + K - u^2}} = \mathrm{d}\theta}$$

☞ *ainsi, le problème de deux corps est réduit à seulement deux intégrations*

# Exemple: forces purement algébriques $f(r) = kr^n$

nous en tirons: $g(u) = \frac{\mu k}{\ell^2} u^{-2-n}$ et $G(u) = -\frac{\mu k}{\ell^2(n+1)} u^{-n-1}$, donc

$$\boxed{\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{K - \frac{2\mu k}{\ell^2(n+1)} u^{-n-1} - u^2}}}$$

pour certains choix de $n \in \mathbb{Z}$, ceci s'intégre facilement

* réduction à l'intégrale $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, ce qui est possible si $-(n+1) \stackrel{!}{=} 0, 1, 2$

$\Rightarrow n = -2, -3$ le cas $n = -1$ est problématique

* on peut changer la variable $u^2 = x$, et réduire au même type d'intégrale

$\Rightarrow n = 1$

☞ de cette façon, on sait résoudre les forces $\boxed{f(r) \sim r, r^{-2}, r^{-3}}$,

ou bien les potentiels $\boxed{V(r) \sim r^2, r^{-1}, r^{-2}}$.

inclut l'oscillateur harmonique et gravitation/électrostatique

**autres valeurs de** $n$: intégrales plus compliquées, à étudier avec des fonctions spéciales (p.ex. fonctions elliptiques)

# 4. Problème de Kepler

étudions le cas de la gravitation (ou force de Coulomb électrostatique)

$$f(r) = kr^{-2} \qquad\qquad k < 0 \text{ pour forces attractives}$$

$\Rightarrow g(u) = -\frac{\mu k}{\ell^2} u^{-2} u^2 = -\frac{\mu k}{\ell^2} = \text{cste.} \quad \Rightarrow \quad u'' + u = -\frac{\mu k}{\ell^2}$

☞ Équivalence du problème de Kepler avec un oscillateur harmonique sous force externe constante 'pesanteur' (!)

posons donc $v = u + \frac{\mu k}{\ell^2} \;\Rightarrow\; v'' + v = 0 \;\Rightarrow\; v(\theta) = b\cos(\theta - \theta_0)$

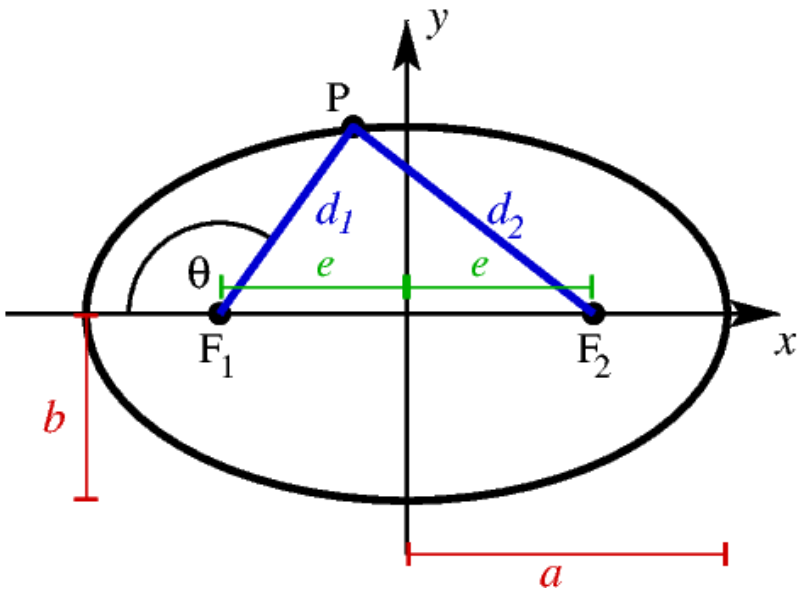
$$\boxed{\frac{1}{r(\theta)} = u(\theta) = -\frac{\mu k}{\ell^2} + b\cos(\theta - \theta_0)}$$

C'est l'équation d'une **conique**, ou la $1^{ere}$ **loi de Kepler** de l'astronomie.
Pour des orbites liées, il s'agit d'une **ellipse**.

**proprieté remarquable**: orbite fermée après une période, ne se réalise que pour $n = 1, -2$

# Quelques propriétés des ellipses

**Définition**: *Une* **ellipse** *est une courbe plane, donnée par le lieu des points $P$ dont la somme des distances à deux points fixes $F_{1,2}$, les* **foyers**, *est constante.*




distances: $d_1 = \left|\overline{F_1P}\right|$, $d_2 = \left|\overline{F_2P}\right|$, $2e = \left|\overline{F_1F_2}\right|$

somme des distances $\boxed{d_1 + d_2 \overset{!}{=} 2a}$

**démi-axe majeure** $a$,
**démi-axe mineure** $b = \sqrt{a^2 - e^2}$,

* forme centrée sur l'origine: $\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

* forme en coordonnées polaires, autour du foyer $F_1$ et pour le rayon $r = d_1$:
$(2a - r)^2 = (2e)^2 + r^2 - 2(2e)\,r\cos(\pi - \theta)$. On pose $b^2 = a^2 - e^2 = a/p$ et $e = a\varepsilon$.

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{r} = p\big(1 + \varepsilon\cos\theta\big)}$ où $p$: paramètre, $\varepsilon$: excentricité

☞ aire de l'ellipse $\boxed{\mathcal{A} = \pi ab}$

plus généralement, on peut écire une **conique** sous la forme

$$\frac{1}{r} = p\big(1 + \varepsilon \cos\big(\theta - \theta_0\big)\big)$$

où $p$ est le **paramètre** et $\varepsilon$ est l'**excentricité**.
En fonction de la valeur de $\varepsilon$, on trouve

$$\begin{cases} \varepsilon > 1 & \text{hyperbole} \\ \varepsilon = 1 & \text{parabole} \\ 0 < \varepsilon < 1 & \text{ellipse} \\ \varepsilon = 0 & \text{cercle} \end{cases}$$

**Définition**: *Une* **hyperbole** *est une courbe plane, donnée par le lieu des points $P$ dont la différence des distances aux deux foyers fixes $F_{1,2}$ est constante.*

retour à la solution du problème de Kepler:

**Énoncé** (KEPLER 1609): *Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers.*

**N.B.:** résultat d'une analyse purement empirique des observations astrononiques (T. Brahe)

**N.B.':** les orbites elliptiques sont un départ des *orbites purement circulaires* des grecs de l'antiquité

de la solution explicite donnée auparavant, on identifie

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}} \quad , \quad p = \frac{\mu k}{\ell^2}$$

d'ou la démi-axe majeure $a = \frac{1}{2}\left(r_{\min} + r_{\max}\right) = \frac{1}{2p}\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{2p}\frac{1}{1-\varepsilon} = \frac{1}{p}\frac{1}{1-\varepsilon^2}$
y injecter les valeurs de $p$ et $\varepsilon$ mène à

$$\boxed{a = -\frac{k}{2E}}$$

*l'énergie $E$ ne dépend que de $a$, mais elle est indépendente de l'excentricité $\varepsilon$*

☞ résultat très important dans l'étude de l'atome d'hydrogène

(fait d'un proton et d'un électron, avec force électrostatique de Coulomb)

# La 3$^e$ loi de Kepler

revenons à la vitesse des aires $\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{\ell}{2\mu}$

orbite elliptique: pour obtenir l'aire totale $\mathcal{A} \Rightarrow$ intégrer sur une **période** $P$

$$\mathcal{A} = \int_0^P \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\ell P}{2\mu} = \pi a b$$

nous avons eu: $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{\frac{a}{p}} = \sqrt{\frac{\ell^2 a}{\mu k}}$. Il vient $\boxed{P = a^{3/2}\, 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}}$.

Pour la gravitation, avec les quantités du problème de deux corps $k = G m_1 m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

La **3$^e$ loi de Kepler** prend donc sa forme finale

trouvé 1619 empiriquement

$$\boxed{P = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}\, a^{3/2}}$$

**N.B.:** la proportionalité $P \sim a^{3/2}$ est spécifique du potentiel $V(r) \sim r^{-1}$.

très utilisé en astronomie pour trouver les masses des planètes, étoiles, ...

**N.B.:** il paraît que la terminologie *'lois de Kepler'* provient de Voltaire (1738) et Lalande (1774)

# un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

| | |
|---|---|
| Kegelschnitt, *m* | conique, *f* |
| Ellipse, *f* | ellipse, *f* |
| Parabel, *f* | parabole, *f* |
| Hyperbel, *f* | hyperbole, *f* |
| Exzentrizität, *f* | excentricité, *f* |
| Brennpunkt, *m* | foyer, *m*; point focal, *m* |
| große/kleine Halbachse, *f* | démi-axe majeure/mineure, *f* |
| Wasserstoffatom, *n* | atome d'hydrogène, *m* |
| untersuchen | se pencher sur |
| prüfen | examiner |
| überprüfen | mettre à l'épreuve |

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

# COURS III/ VORLESUNG III

**Rappel**: le problème de deux corps avec forces centrales $V = V\left(\left|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\right|\right) = V(r)$

* calcul de l'orbite: formule de Binet, $u = \frac{1}{r}$ $\ell$: moment cinétique, $\mu$: masse réduite

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right) = -\frac{\mu}{\ell^2}\frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right)} \quad , \quad \text{où } f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \text{ est la force}$$

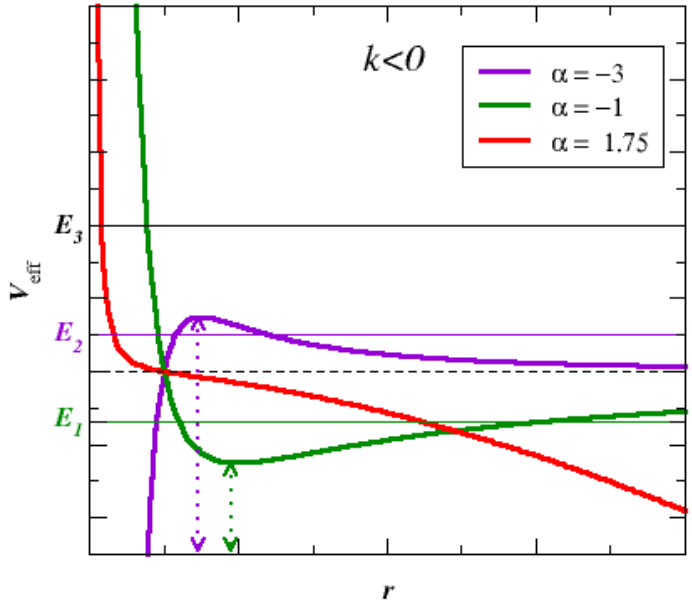
problème intégrable, et résolu à deux intégrations près

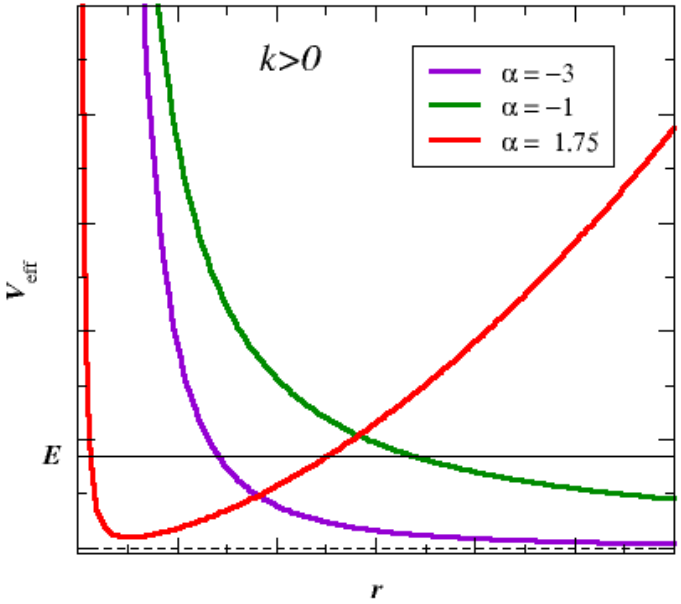
* Pour gravitation ou électrostatique, avec $V(r) = k/r$,
explication des trois lois de Kepler:

1. *"Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers."*
   $\frac{1}{r} = u = p\big(1 + \varepsilon \cos\big(\theta - \theta_0\big)\big)$ conique, devient ellipse si $0 < \varepsilon < 1$
2. *"Des aires égales sont balayées dans des temps égaux."*
   Conservation du moment cinétique $\mu r^2 \dot{\theta} = \ell = \text{cste.}$
3. *"Le carré de la période $P$ d'une planète est directement proportionnel au cube du demi-grand axe $a$"*
   $P = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1+m_2)}}\, a^{3/2}$ détermination de masses d'objets astronomiques

**Rappel**: le **potentiel effectif**, discussion qualitative des mouvements possibles

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} + V(r) \quad , \quad \text{ici exemple:} \quad V(r) = kr^\alpha$$




$\alpha < -2$: orbite non liée
orbite circulaire instable

$-2 < \alpha < 0$: orbite liée, ssi $E < 0$
orbite circulaire stable

$0 < \alpha$: orbite non liée

$\alpha < 0$: orbite non liée

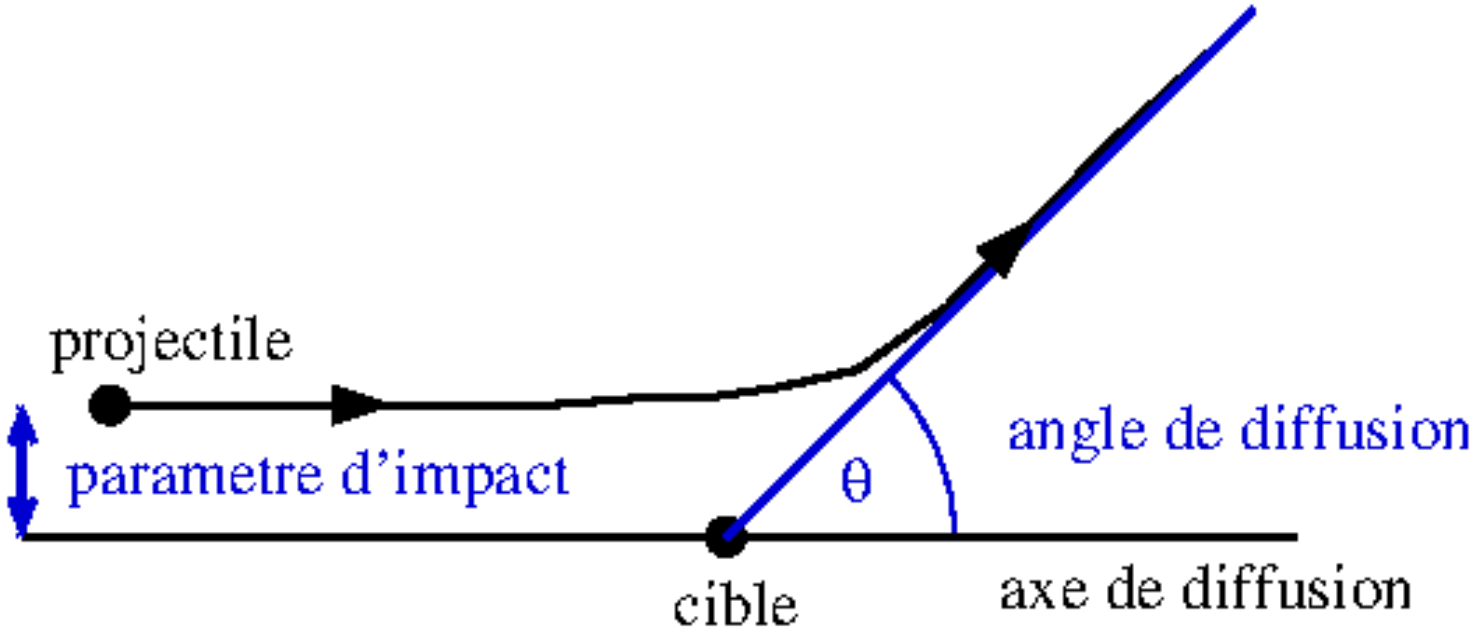
$\alpha > 0$: orbite liée
orbite circulaire stable

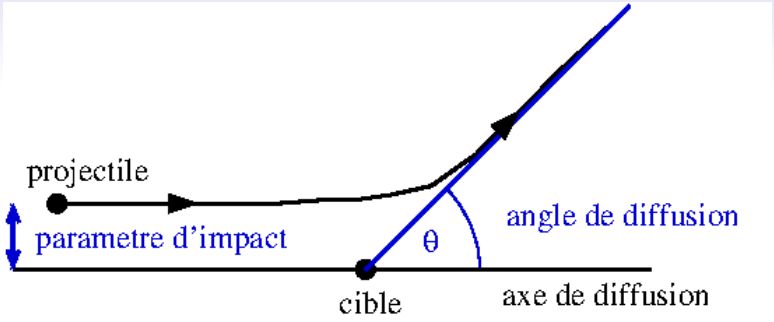
# 1. Introduction à la diffusion

Un malentendu potentiel: le mot 'diffusion' peut avoir deux sens distincts:

1. *diffusion d'un colorant dans un verre d'eau* $\rightarrow$ en allemand '**Diffusion**'
2. *diffusion d'un projectile par une cible* $\rightarrow$ en allemand '**Streuung**' $\Leftarrow$

considérons un mouvement non lié, avec un potentiel central






habituellement, on observe un grand nombre de diffusions et on étudie les statistiques de tels processus

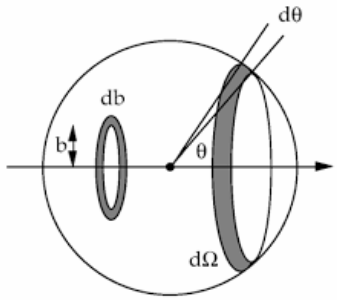
**Définition**: *La* **section efficace** *par angle solide est donnée par*

$$\sigma(\Omega)\mathrm{d}\Omega = \frac{\#\text{ particules diffusées par unite de temps dans l'angle solide } \mathrm{d}\Omega}{\#\text{ particules incidentes}}$$

*avec l'***angle solide** $\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta$.

La section efficace est l'observable centrale de la diffusion.

La notation habituelle est $\sigma(\Omega) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$.
Ainsi, on a défini une procédure expérimentale pour l'obtenir.

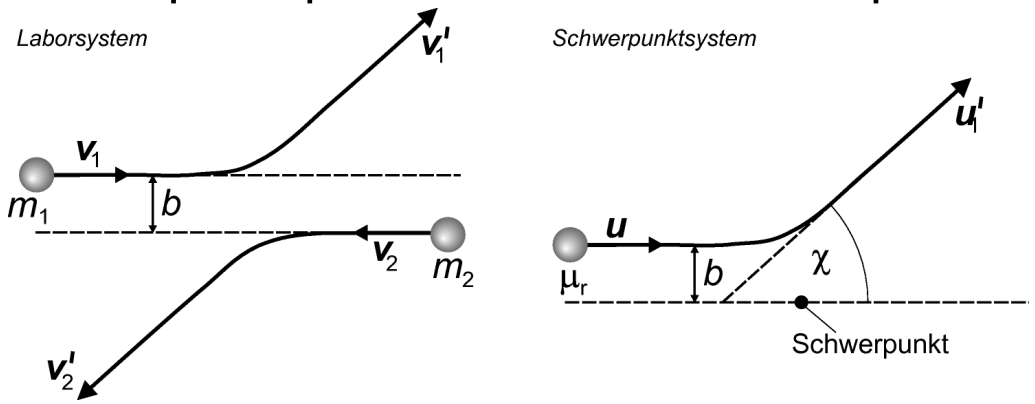



Source: `https://web-docs.gsi.de`

**Définition**: *La* **section efficace totale** *est* $\sigma := \int_{S^2} \mathrm{d}\Omega \, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$.

$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est la surface de la sphère, $\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2 \int_{S^2} \mathrm{d}\Omega = \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2\, 2\pi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta$

on travaille principalement dans deux repères différentes: ici, $b$: paramètre d'impact




Bildquelle: U. Stroth, *Plasmaphysik* (Springer 2018) notre notation $\chi \mapsto \theta$

(a) le **repère du laboratoire**: avant la collision, le cible est au repos.

(b) le **repère du centre de masse** (CMS): le centre de masse du système cible + projectile est au repos.

Presque toutes les mesures expérimentales sont faites dans le repère du laboratoire (exception: collisionneurs de particules élémentaires p.ex. LHC au CERN).
Tous les calculs théoriques sont effectués au repère du centre de masse.
☞ il faut savoir transformer entre ces deux repères.

notons: $\theta$: angle de diffusion au repère du centre de masse
$\vartheta$: angle de diffusion au repère du laboratoire

* le nombre de particules diffusées dans un élément $\mathrm{d}\Omega$ d'angle solide ne dépend pas du repère

$$2\pi I \sigma_{\mathrm{labo}}(\vartheta) \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta = 2\pi I \sigma_{\mathrm{CMS}}(\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

où $I$ est le flux incident de particules

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{labo}}(\vartheta) = \sigma_{\mathrm{CMS}}(\theta) \frac{\sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{\sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta} = \sigma_{\mathrm{CMS}}(\theta) \frac{\mathrm{d}\big(\cos\theta\big)}{\mathrm{d}\big(\cos\vartheta\big)}}$$

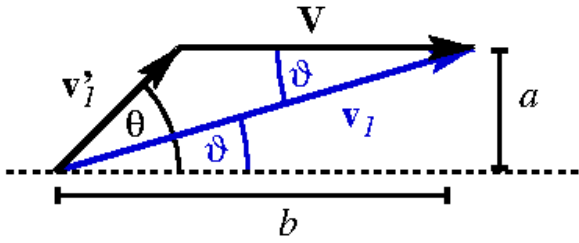
après la diffusion, on écrit les relations entre les vitesses des particules

on introduit les quantités:

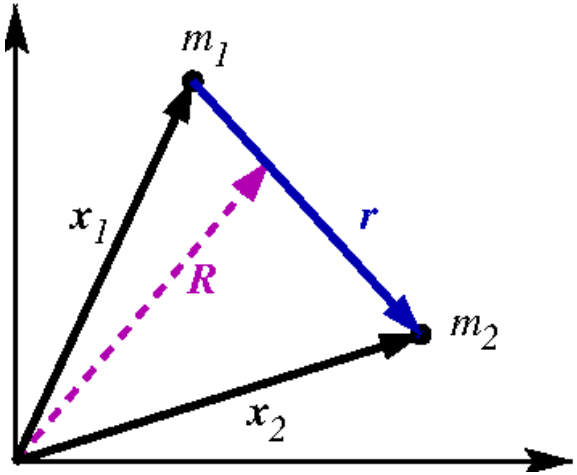
$\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{v}_1$: position et vitesse du projectile au repère du labo

$\boldsymbol{r}'_1$, $\boldsymbol{v}'_1$: position et vitesse du projectile au repère CMS

$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{V}$: position et vitesse du centre de masse (CMS)




certes: $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_1$ , $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'_1$ du diagramme: $\tan\vartheta = \dfrac{a}{b} = \dfrac{v'_1 \sin\theta}{v'_1 \cos\theta + V}$ $(*)$




vecteur de distance $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$

vecteur **centre de masses** $\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2}$

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{R} - \underbrace{\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}}_{=:\boldsymbol{r}'_1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{r}'_1 = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{x}_1 = \frac{\mu}{m_1}\boldsymbol{r} \Rightarrow \boldsymbol{v}'_1 = \frac{\mu}{m_1}\dot{\boldsymbol{r}}$. Car potentiel conservatif

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{vitesse relative avant diffusion} = \text{vitesse relative apres diffusion}}$

c.à.d. $v_0 = \left|\dot{\boldsymbol{r}}\right|$ donc enfin $v'_1 = \frac{\mu}{m_1} v_0$

d'autre part, la vitesse du centre de masse s'écrit, l'impulsion conservée au repère labo

$$\left(m_1 + m_2\right)\boldsymbol{V} = m_1 \boldsymbol{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \left(m_1 + m_2\right) V = m_1 v_0$$

et ainsi $V = \frac{\mu}{m_2} v_0$ $\qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ : masse réduite

On peut injecter les deux formules $v_1' = \frac{\mu}{m_1} v_0$ et $V = \frac{\mu}{m_2} v_0$ dans (*)

$$\boxed{\tan\vartheta = \frac{v_1' \sin\theta}{v_1' \cos\theta + V} = \frac{\left(\mu/m_1\right) v_0 \sin\theta}{\left(\mu/m_1\right) v_0 \cos\theta + \left(\mu/m_2\right) v_0} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}}$$

donne la relation recherchée entre $\vartheta$ et $\theta$. Il la faut encore invertir afin d'arriver à

$$\frac{\sigma_{\text{labo}}(\vartheta)}{\sigma_{\text{CMS}}(\theta)} = \frac{2m_1}{m_2}\cos\vartheta + \frac{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \cos 2\vartheta}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin^2\vartheta}} \qquad \text{si } m_1 < m_2$$

$$\frac{\sigma_{\text{labo}}(\vartheta)}{\sigma_{\text{CMS}}(\theta)} = 2\frac{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \cos 2\vartheta}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin^2\vartheta}} \qquad \text{si } m_1 > m_2$$

ceci n'est que de la cinématique, rien n'est dit sur les processus physiques sous-jacentes

# 2. Calcul des sections efficaces

nous allons d'abord déduire une formule générique pour la section efficace

* on part de la conservation du moment cinétique

$$\ell = \mu v_0 s = s\sqrt{2\mu E}$$

où $s$: paramètre d'impact, $v_0$: vitesse initiale du projectile, $E$: énergie
* si $E$ et $s$ fixés, l'angle de diffusion $\theta$ est déterminé.
* La conservation du nombre de particules donne

$$2\pi I s \mathrm{d}s = -2\pi I \sigma(\theta) \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$$

**N.B.:** signe $-$: tient compte du fait que $s$ diminue si $\theta$ augmente

$$\boxed{\sigma(\theta) = -\frac{s}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}} \qquad (\sigma)$$

de la conservation de l'énergie $E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} + V(r) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V_{\mathrm{eff}}(r)$
la re-conversion en équation d'orbite, selon $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}$, donne

$$\varphi = \varphi(r) = \frac{\ell}{\mu}\int_r^\infty \mathrm{d}\varrho\,\frac{1}{\varrho^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\big(E - V_{\mathrm{eff}}(\varrho)\big)}}$$

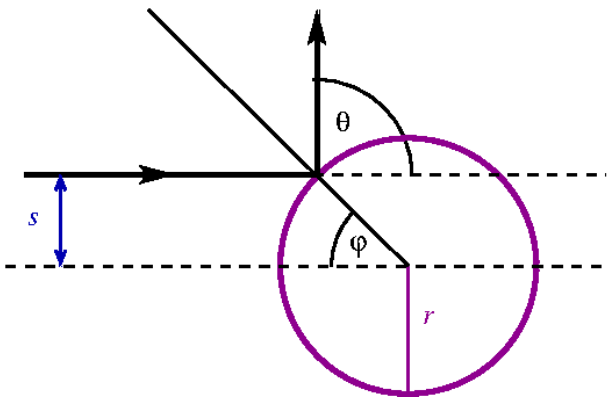
La valeur minimale de $r$ est donnée par $V_{\mathrm{eff}}(r_{\mathrm{min}}) \overset{!}{=} E$.
L'angle total de diffusion est $\theta = \pi - 2\varphi(r_{\mathrm{min}})$, donc

$$\theta = \pi - \frac{2\ell}{\mu}\int_{r_{\mathrm{min}}}^\infty \mathrm{d}\varrho\,\frac{1}{\varrho^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\big(E - V_{\mathrm{eff}}(\varrho)\big)}} \qquad (\theta)$$

et le moment cinétique $\ell = 2\mu v_0$ contient le paramètre d'impact $s$.

# Exemple 1: diffusion auprès d'une sphère dure

diffusion auprès d'une sphère dure, de rayon $r$




géométriquement: angle de diffusion $\theta = \pi - 2\varphi$

on peut voir de la géométrie
$s = r \sin\varphi = r \sin\frac{\pi-\theta}{2} = r\cos\frac{\theta}{2}$

Plus formellement: une sphere dure a le potentiel $V(\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varrho > r \\ \infty & \text{si } \varrho < r \end{cases}$

tel que $r_{\min} = 0$. Donc l'angle de diffusion devient, d'après $(\theta)$

$$\theta = \pi - 2s\int_r^\infty \mathrm{d}\varrho\,\frac{1}{\varrho^2}\frac{1}{\sqrt{1-s^2/\varrho^2}} = \pi - 2\int_0^{s/r}\mathrm{d}\xi\,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} = \pi - 2\arcsin\frac{s}{r}$$

On retrouve donc $s = r\cos\frac{\theta}{2}$, comme il le faut. La section efficace sort de $(\sigma)$

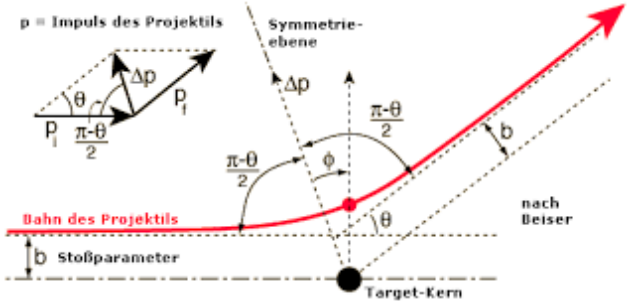
$$\boxed{\sigma(\theta) = \frac{r\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}\frac{r\sin\frac{\theta}{2}}{2} = \frac{r^4}{4}}$$ ; section efficace totale $$\boxed{\sigma_{\text{tot}} = \frac{r^2}{4}\cdot 4\pi = \pi r^2}$$

ce qui explique l'orgine du nom.

# Exemple 2: diffusion dans un potentiel $V(r) = kr^{-1}$

pour diffusion de deux charques electriques $q_{1,2}$, on a $k = q_1 q_2$ (repulsif, si $q_1 q_2 > 0$)

formule de Binet: $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = -\frac{q_1 q_2}{\mu v_0^2 s^2} = -\kappa}$$




$\Rightarrow$ conique $u = u_0 \cos\left(\varphi - \varphi_0\right) - \kappa$

pour ce mouvement nonlié, l'orbite est une hyperbole

Initialement, la particule arrive le long de l'axe de diffusion, donc on a la condition de bord $u \to 0$ et $r \sin\varphi \to b$ pour $\varphi \to \frac{\pi}{2}$. De plus, on a $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} \to -\frac{1}{s}$. Il vient $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \arctan s\kappa$. Car $\theta = \left|\pi - 2\varphi_0\right|$, on arrive finalement à

$$\boxed{s = \frac{q_1 q_2}{\mu v_0^2} \cot\frac{\theta}{2}} \quad \overset{(\sigma)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\sigma(\theta) = \left(\frac{q_1 q_2}{4E_{\mathrm{in}}}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}}$$

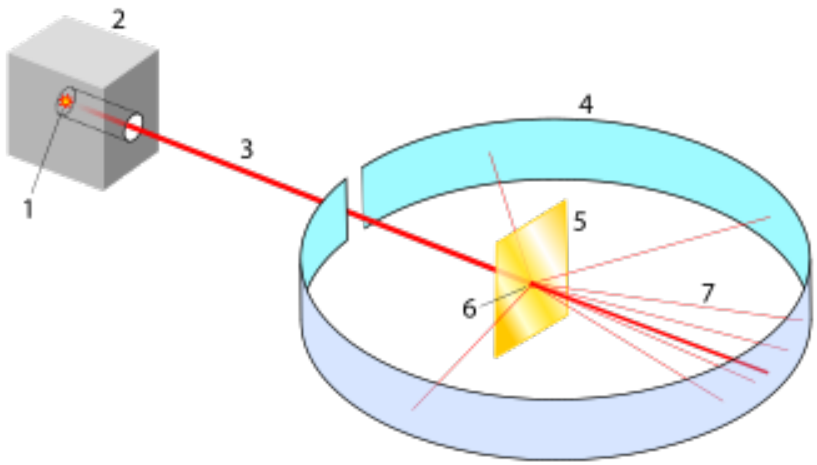
Ceci est la **formule de Rutherford** pour la diffusion dans le potentiel electrostatique avec force de Coulomb.

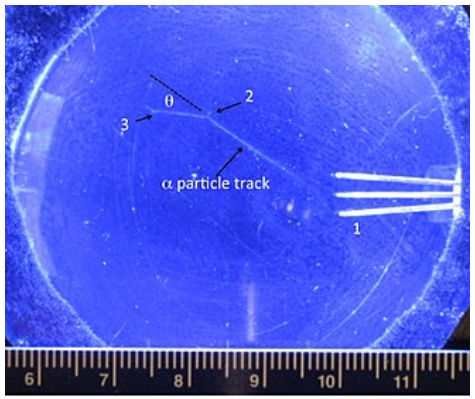
# Modèle de l'atome, selon Rutherford

afin de comprendre la structure des atomes, on les bombarde avec des particules de la plus haute énergie possible

le 'mieux' disponible en 1909: rayons-$\alpha$ provenant de la désintégration du radium

particule $\alpha$: noyau d'hélium



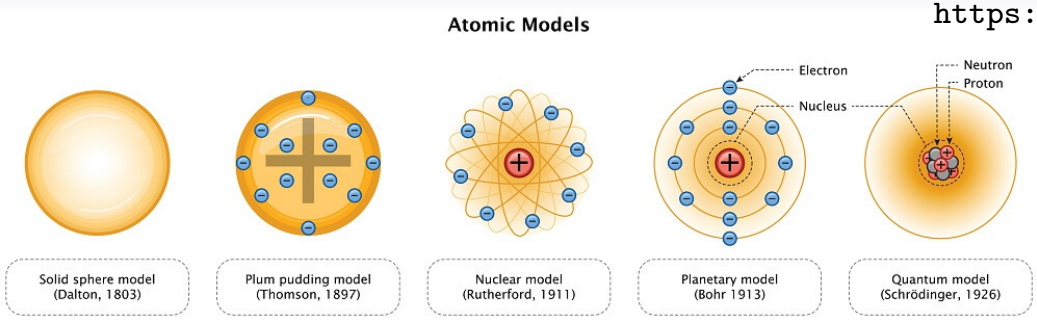

L'échantillon radioactif émet des particules $\alpha$, dont on produit un faisceaux en les laissant passer par un trou fin, et dirigée sur un film d'or. Les particules $\alpha$ sont détectées sur un écran et comptées.

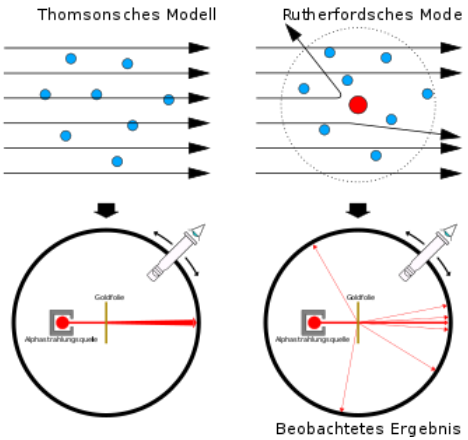
Observation d'une collision d'un particule $\alpha$ avec un noyau:
la trace 1 est la particule $\alpha$, qui collide au point 2 avec un atome (et une seconde fois dans le point 3).

Sources: https://de.wikipedia.org/wiki/Rutherford-Streuung, https://en.wikipedia.org/wiki/Rutherford_scattering

au fil du temps, des modèles plus ou moins simplistes des atomes ont été proposés

https://www.thegreatcoursesdaily.com/what-is-an-atom-like/

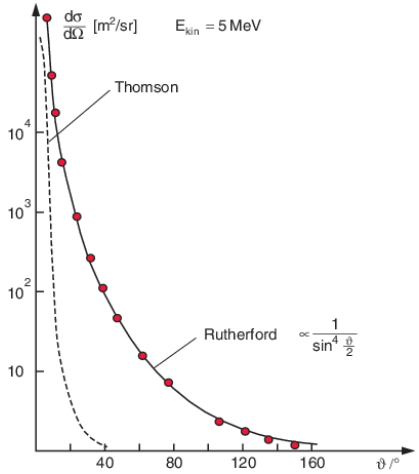



autour de 1900, le modèle en vogue fut celui du 'gateau aux raisins' de THOMSON: des *électrons localisées dans une distribution continue de charge électrique positive*

l'expérience de RUTHERFORD met à l'épreuve ce modèle THOMSON prédit: très petits angles de diffusion

en désaccord flagrant avec l'observation




Modèle de RUTHERFORD: la charge positive et presque toute la masse concentrés dans le **noyau**, entouré sur des orbites Keplériennes par des électrons

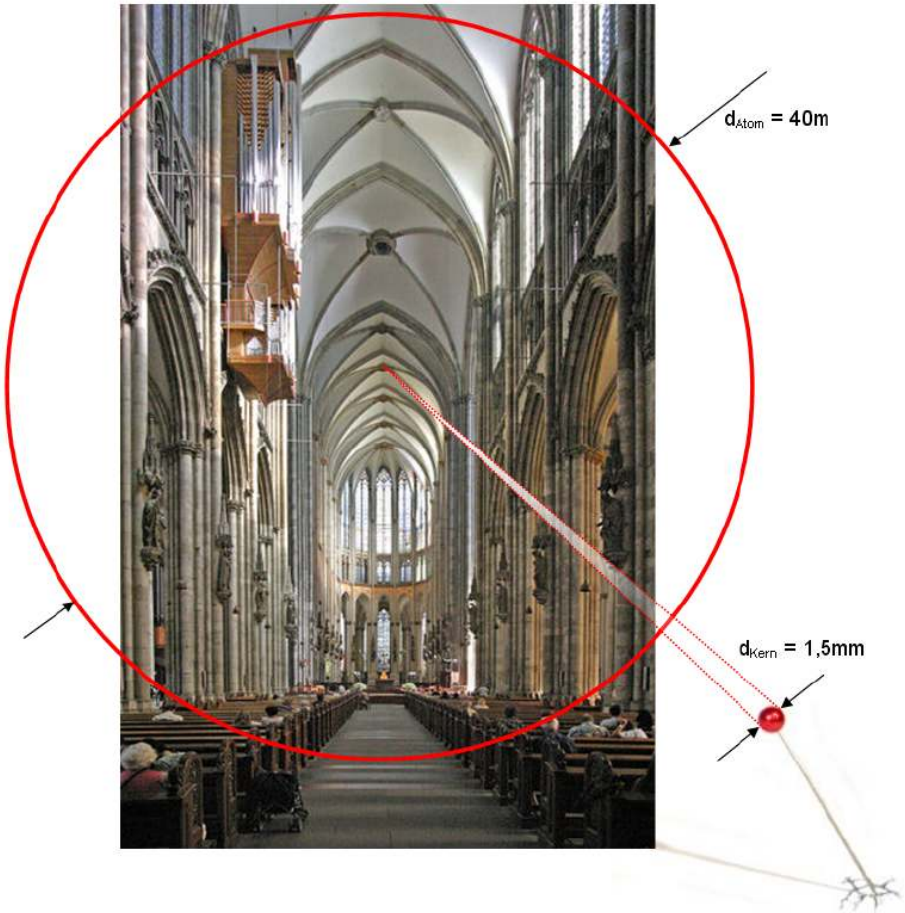
$$\boxed{\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \sin^{-4}\frac{\theta}{2}}$$ *confirmé brillamment par l'expérience*

☞ l'atome est dans l'essentiel vide !

Sources: https://de.wikipedia.org/wiki/Rutherford-Streuung

W. Demtröder, *Experimentalphysik 3*, Springer (1996)

# Le resultat: structure et taille des atomes




Source: `https://web-docs.gsi.de/`

si l'on agrandissant un atome par un facteur $10^{11}$, on obtiendrait une boule d'un diamètre de $40[\mathrm{m}]$ qu'on pourra tout juste placer à l'intérieur de la cathédrale de Cologne. Au centre de cet atome, le noyau serait une graine de diamètre $1,5[\mathrm{mm}]$. Le 'reste' de l'atome est vide – un vide réellement parfait !

# 3. Le vecteur de Runge-Lenz

découvert par Jacob Herrmann (1678-1733), puis par Jean Bernoulli, puis Laplace, ...

importance des symétries pour l'existence de quantités conservées:

| invariance | quantité conservée |
|---|---|
| translation temporelle | énergie |
| rotation | moment cinétique |
| translation spatiale | impulsion |

? peut-on en trouver autres exemples ?

une réponse affirmative est possible pour les potentiels de forme $V(r) = -\frac{k}{r}$

encore une fois, physiquement c'est la gravitation ou l'électrostatique

**Théorème**: *Pour le problème de un corps, avec potentiel* $V(r) = -kr^{-1}$, *on a le vecteur constant*

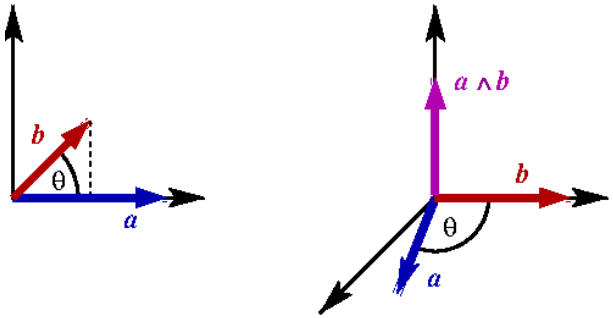
$$\boldsymbol{A} := \boldsymbol{p} \wedge \ell - \mu k \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

où $\boldsymbol{p} = \mu \dot{\boldsymbol{r}}$ impulsion

# Quelques mots sur les produits des vecteurs

? comment peut-on multiplier les vecteurs

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad ?$$




$(\alpha)$ **produit scalaire**: où $\theta$ est l'angle entre les deux vecteurs

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \quad \in \mathbb{R}$$

☞ $\boxed{\text{Si le produit scalaire s'annule } \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0, \text{ il s'ensuit } \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}}$.

$(\beta)$ **produit vectoriel**: in Deutschland schreibt man $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} := \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & a_x & b_x \\ \boldsymbol{e}_y & a_y & b_y \\ \boldsymbol{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} \quad \in \mathbb{R}^3$$

Géométriquement, on a $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et la formule $|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$.

* Identités: $\boxed{\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a})}$ permutation cyclique

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}$$

**point de départ**:

l'équation de mouvement $\dot{\boldsymbol{p}} = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, force $f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \in \mathbb{R}$

car la force est centrale, le moment cinétique $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$ est conservé.

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}} \wedge \boldsymbol{\ell} &= \frac{\mu f(r)}{r}\left(\boldsymbol{r} \wedge \left(\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}\right)\right) \\
&= \frac{\mu f(r)}{r}\left(\left(\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^2\dot{\boldsymbol{r}}\right) && (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \\
&= \frac{\mu f(r)}{r}\left(r\dot{r}\boldsymbol{r} - r^2\dot{\boldsymbol{r}}\right) && \boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = r\dot{r} \\
&= -\mu f(r) r^2 \left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \frac{\boldsymbol{r}\,\dot{r}}{r^2}\right) \\
&= -\mu f(r) r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)
\end{aligned}
$$

de plus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{\ell}) = \dot{\boldsymbol{p}} \wedge \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{p} \wedge \underbrace{\dot{\boldsymbol{\ell}}}_{=\boldsymbol{0}} = \dot{\boldsymbol{p}} \wedge \boldsymbol{\ell}$. Ainsi

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{\ell}) = -\mu f(r) r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)}
$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{\ell}) = -\mu f(r) r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)}$$

**cas spécial**: force gravitationnelle/électrostatique de forme $f(r) = -\frac{k}{r^2}$. Alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{\ell} - \mu k\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \boldsymbol{0}$$

*Si $f(r) = -\frac{k}{r^2}$, le* vecteur Runge-Lenz $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{\ell} - \mu k\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ *est constant.*

**Propriétés**:

**1.** orthogonalité: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\ell} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}$ est dans le plan du mouvement.

se déduit de $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\ell} = 0$

**2.** orbite: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r} = Ar\cos\theta = (\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{\ell})\cdot\boldsymbol{r} - \mu k r$.

de plus $\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{\ell}) = \boldsymbol{\ell}\cdot(\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\ell} = \ell^2$

et on obtient $Ar\cos\theta = \ell^2 - \mu k r$, d'où l'orbite

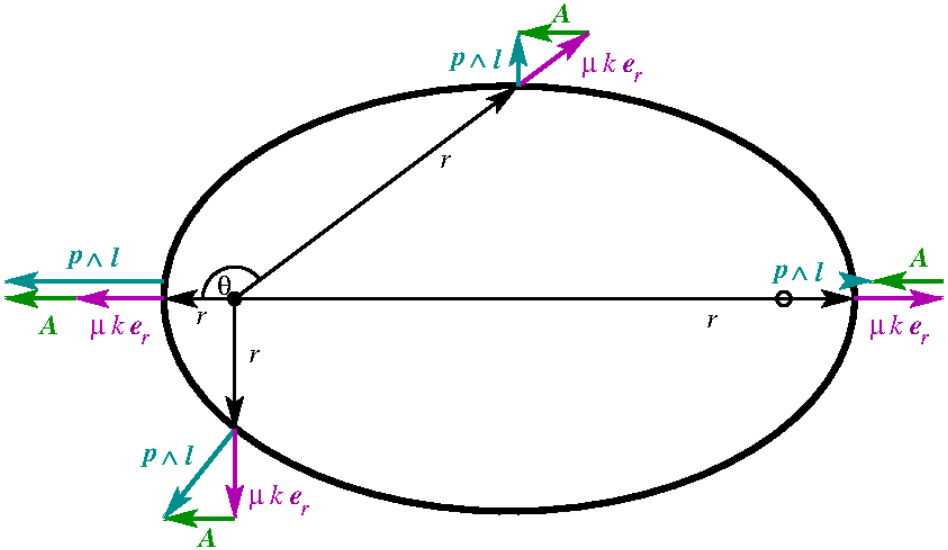
$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{\ell^2}\left(1 + \frac{A}{\mu k}\cos\theta\right)}$$

La conique retrouvée, sans résoudre une équadiff $\Rightarrow$ **integrabilité algébrique**

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{\ell^2}\left(1 + \frac{A}{\mu k}\cos\theta\right)}$$

☞ $A = |\boldsymbol{A}| = \mu k \varepsilon$ est relié à l'excentricité $\varepsilon$.

**3.** interprétation géométrique, pour le cas d'une ellipse, donc $k > 0$ $\qquad \boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$




* $\boldsymbol{A}$ dans le plan de l'orbite

* $\boldsymbol{A}$ orienté le long de la grande axe

donc direction de cette axe est fixée

* addition des vecteurs, selon

$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{A} + \mu k \frac{\boldsymbol{r}}{r} \perp \dot{\boldsymbol{r}}$

**4.** la conservation de $\boldsymbol{A}$ signale une nouvelle symétrie, de nature dynamique.

* reliée au fait que les orbites sont fermées

* si dans un système on trouve que $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \neq \boldsymbol{0}$, alors c'est une évidence pour que $f(r) \neq -\frac{k}{r^2}$

* reliée à l'invariance de $L$ sous changement de variables (infinitésimal)

$r_i \mapsto r_i' = r_i + \mu \sum_k \epsilon_k \left(v_i r_k - \frac{1}{2} r_i v_k - \frac{1}{2} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} \delta_{ik}\right)$

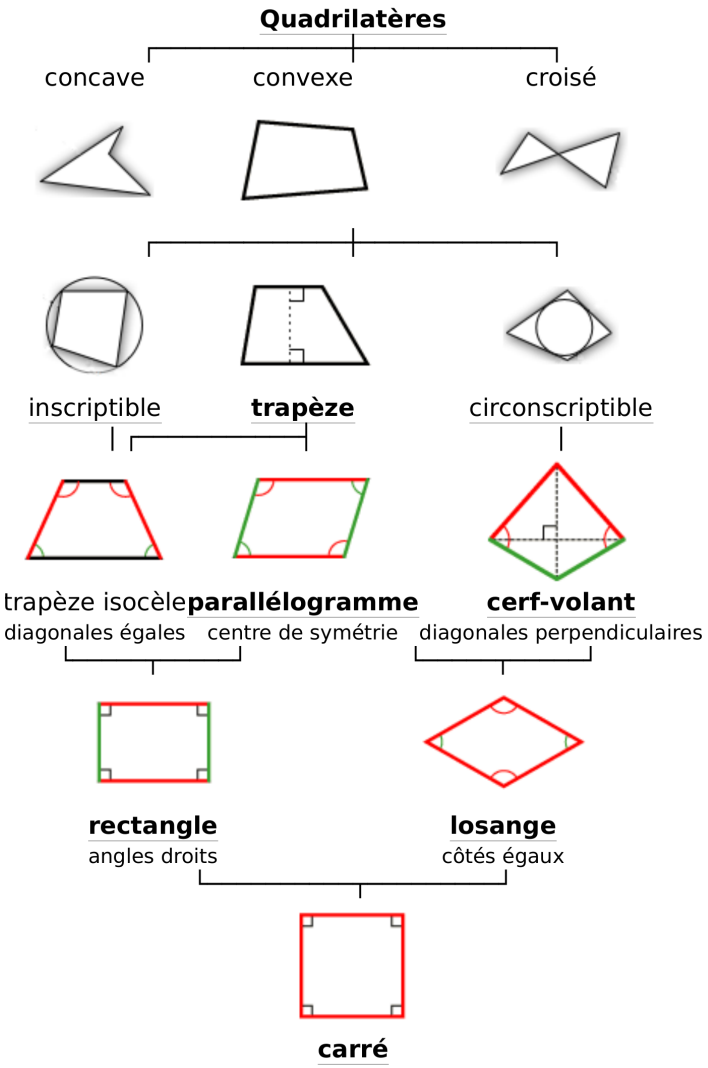
* seulement une composante de $\boldsymbol{A}$ est algébriquement indépendante des autres quantités

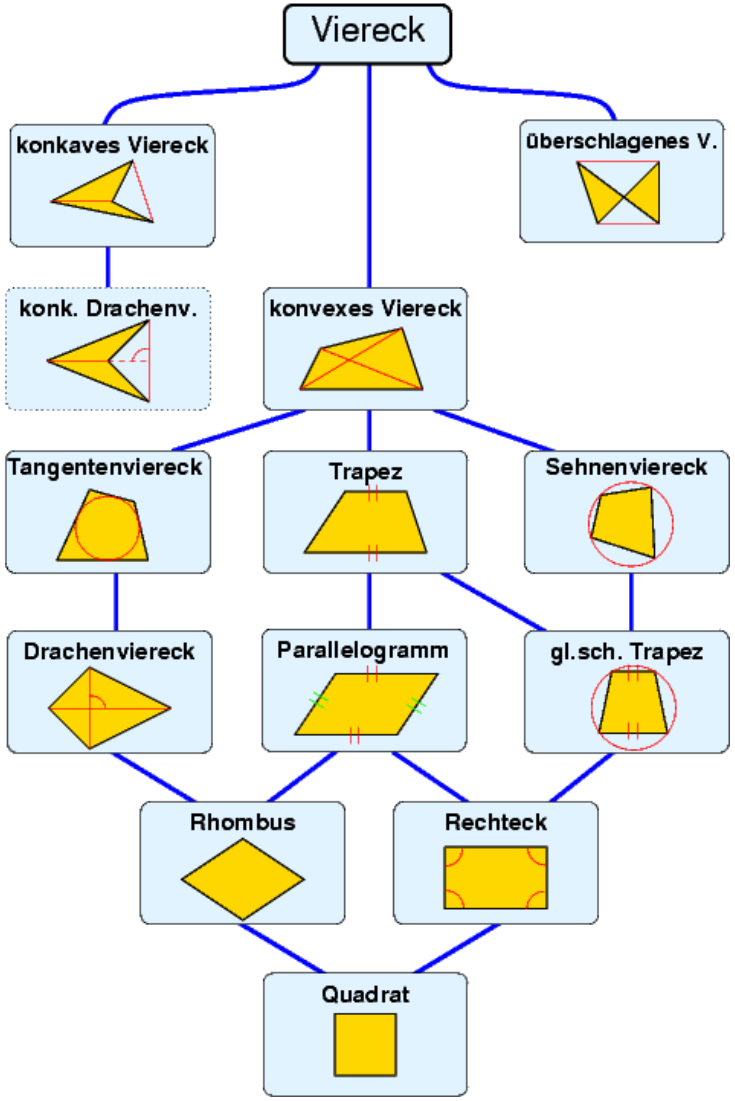
# un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

| | |
|---|---|
| Streuung, *f* | diffusion, *f* |
| Diffusion, *f* | diffusion, *f*, dispersion, *f* |
| Ziel, *n* | cible, *f* |
| Projektil, *n* | projectile, *m* |
| Streuquerschnitt, *m* | section efficace, *f* |
| Streuachse, it f | axe de diffusion, *f* |
| Stoßparameter, *m* | paramètre d'impact, *m* |
| Streuwinkel, *m* | angle de diffusion, *m* |
| genau dann, wenn | si et seulement si (ssi) |
| Laborsystem, *n* | repère du laboratoire, *m* |
| Schwerpunktsystem, *n* | repère du centre de masse, *m* |
| Raumwinkel, *m* | angle solide,*m* |
| geschlossene Bahn, *f* | orbite fermée, *f* |

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

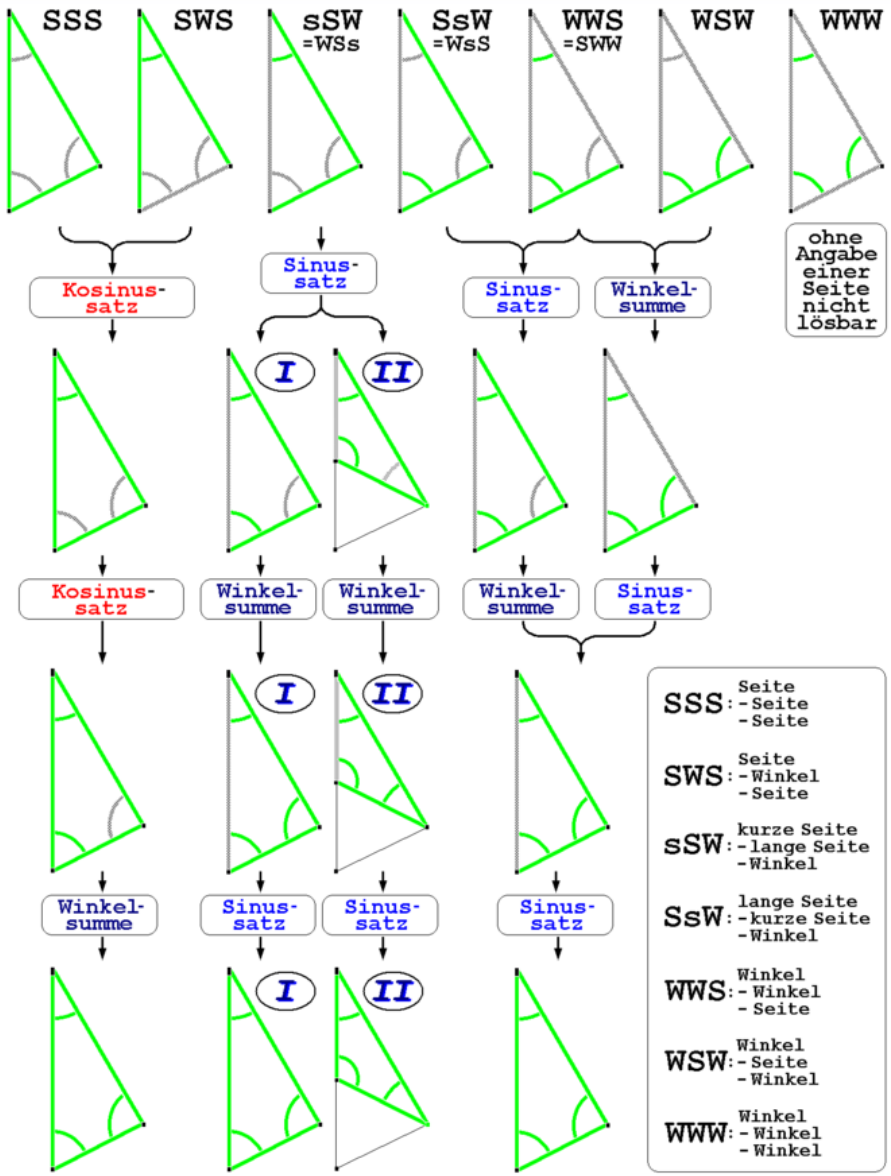
# Terminologie fr-all des quadrilatères/*Frz.-dt. Terminologie der Vierecke*




sources: `https://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrilatère`; `https://de.wikipedia.org/wiki/Viereck`

voici un schéma sur la route à suivre pour construire un triangle arbitraire




S: côte (**S**eite) donné
W: angle (**W**inkel) donné
s: côte inconnu

outils requis:
Kosinussatz: théorème du cosinus
Sinussatz: théorème du sinus
Winkelsumme: formule sur la somme des angles

source: https://de.wikipedia.org/wiki/Dreieck