Mécanique analytique: Exercices & Solutions

Malte Henkel

[a]Laboratoire de Physique de Chimie Théoriques (CNRS UMR 7019),
Université de Lorraine **Nancy**, France

[b]Centro de Física Téorica e Computacional, Universidade de Lisboa, Portugal

E-Post/courriel: `malte.henkel@univ-lorraine.fr`

sémestre d'hiver 2021/22, Université de Lorraine Nancy

Lecture complémentaire

M.L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 3e, Wiley (New York)

VI. Dotsenko *et al.*, *Méthodes mathématiques pour la physique*, Dunod (Paris 2018)

◦ Quelques formulaires mathématiques et/ou tableaux:

M. Abramowitz, I.A. Stegun *Handbook of mathematical functions*, New York (1960s)

on trouve une version électronique remise à jour sur NIST: https://dlmf.nist.gov/

I.S. Gradsteyn, I.M. Ryshik, *Table of integrals . . .*, 8e, London (2014)

A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev *Integrals and Series*, 5 vols. N.Y. (1992)

Quelques constantes pratiques.

Elles sont données en unités S.I. et aussi en unités cgs, encore utilisées en pratique de temps en temps

$1[\mathrm{erg}] = 10^{-7}[\mathrm{J}]$

vitesse lumière (vide): $c = 2.99 \cdot 10^{8}[\mathrm{m/s}] = 2.99 \cdot 10^{10}[\mathrm{cm/s}]$
constante gravitationnelle: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}[\mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}] = 6.67 \cdot 10^{-8}[\mathrm{cm}^3\ \mathrm{g}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}]$
constante de Boltzmann $k_{\mathrm{B}} = 1.23 \cdot 10^{-23}[\mathrm{J/K}] = 1.23 \cdot 10^{-16}[\mathrm{erg/K}]$
constante de Planck $h = 6.63 \cdot 10^{-34}[\mathrm{J\ s}] = 6.63 \cdot 10^{-27}[\mathrm{erg\ s}]$
constante Stefan-Boltzmann $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}[\mathrm{W\ m}^{-2}\ \mathrm{K}^{-4}] = 5.67 \cdot 10^{-5}[\mathrm{erg\ cm}^{-2}\ \mathrm{K}^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}]$
masse d'électron: $m_e = 0.911 \cdot 10^{-30}[\mathrm{kg}] = 0.511[\mathrm{MeV/c}^2]$
masse de proton: $m_p = 1.673 \cdot 10^{-27}[\mathrm{kg}] = 938.3[\mathrm{MeV/c}^2]$
masse de neutron: $m_n = 1.675 \cdot 10^{-27}[\mathrm{kg}] = 939.5[\mathrm{MeV/c}^2]$
$\odot$: masse du soleil $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}[\mathrm{kg}] = 1.99 \cdot 10^{33}[\mathrm{g}]$
rayon du soleil (équateur): $R_\odot = 6.96 \cdot 10^{8}[\mathrm{m}] = 6.96 \cdot 10^{10}[\mathrm{cm}]$
luminosité du soleil $L_\odot = 3.85 \cdot 10^{26}[\mathrm{W}] = 3.85 \cdot 10^{33}[\mathrm{erg/s}]$
$\oplus$: masse de la terre: $M_\oplus = 5.97 \cdot 10^{24}[\mathrm{kg}]$
rayon de la terre (équateur): $R_\oplus = 6380[\mathrm{km}]$
J: masse du Jupiter: $M_J = 1.90 \cdot 10^{27}[\mathrm{kg}] = 318 M_\oplus = 0.001 M_\odot$
rayon du Jupiter (équateur) $R_J = 6.99 \cdot 10^{4}[\mathrm{km}] = 11 R_\oplus = 0.1 R_\odot$
unité astronomique (rayon de l'oribte terrestre autour du soleil): $1[\mathrm{UA}] = 149 \cdot 10^{6}[\mathrm{km}] = 1.49 \cdot 10^{11}[\mathrm{m}]$
année: $1[\mathrm{y}] = 3.16 \cdot 10^{7}[\mathrm{s}]$
année lumière: $1[\mathrm{ly}] = 9.46 \cdot 10^{15}[\mathrm{m}] = 63000[\mathrm{UA}]$ distance de l'étoile la plus proche $\gtrsim 4[\mathrm{ly}]$
parsec $1[\mathrm{pc}] = 3.09 \cdot 10^{16}[\mathrm{m}] = 206000[\mathrm{UA}] = 3.26[\mathrm{ly}]$
électron volt $1[\mathrm{eV}] = 1.60 \cdot 10^{19}[\mathrm{J}] = 1.60 \cdot 10^{12}[\mathrm{erg}] \triangleq 10^{4}[\mathrm{K}]$

Sur les notations mathématiques

En France, on écrit d'habitude $a \times b$ pour le produit des quantités a et b.

N.B.: surtout si écrit à la main, ceci peut être difficile de distinguer de axb, mais les gens arrivent quand même à le faire. Des expressions comme $x + 3 \times b$ ou $2 \times x$ sont particulièrement 'intéressantes'.

En Allemagne, il est plus habituel d'écire $a \cdot b$ pour le produit des quantités a et b; ou même encore plus court $a\,b$.

N.B.: un allemand risque fort de lire axb comme $a \cdot x \cdot b$ – et ensuite de se demander que-ce que c'est 'x'. Ou bien de conclure que $x + 3 \times b \stackrel{?}{=} x\big(1 + 3b\big)$.

N.B.: dans ce cours, je n'utilise jamais $a \times b$ pour écire un produit.

Série 1

1. Trouvez une intégrale indéfinie des fonctions suivantes en donnant une **primitive**/*Stammfunktion*. Vérifiez votre résultat en y recalculant la dérivée.

$$a)\quad 4x^3-6x+9\ ,\quad b)\quad \cos(2x+5)\ ,\quad c)\quad \frac{1}{3x+2}\ ,\quad d)\quad \tan(x)\ ,\quad e)\quad \frac{2x}{1+x^2}\ ,$$

$$f)\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\quad g)\quad \frac{e^x}{1+e^x}\ ,\quad h)\quad \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\ ,\quad i)\quad \frac{1}{1+x^2}\ ,$$

$$j)\quad e^{x+3}\ ,\quad k)\quad x\cos x\ ,\quad l)\quad \ln(3x)\ ,\quad m)\quad \cos^2 x \tag{1}$$

Solution de l'exercice 1:

Il faut trouver les primitives des fonctions données (on dit aussi **intégrale indéfinie**).

Die Stammfunktion einer gegebenen Funktion ist zu finden (man sagt auch **unbestimmtes Integral***).*

Solution de l'exercice 1:

Il faut trouver les primitives des fonctions données (on dit aussi **intégrale indéfinie**).

Die Stammfunktion einer gegebenen Funktion ist zu finden (man sagt auch **unbestimmtes Integral***).*

a) $4x^3 - 6x + 9$

Solution de l'exercice 1:

Il faut trouver les primitives des fonctions données (on dit aussi **intégrale indéfinie**).
Die Stammfunktion einer gegebenen Funktion ist zu finden (man sagt auch **unbestimmtes Integral***).*

a) $4x^3 - 6x + 9$

$$\int \mathrm{d}x \left(4x^3 - 6x + 9\right) = 4\frac{1}{4}x^4 - 6\frac{1}{2}x^2 + 9x + C = x^4 - 3x^2 + 9x + C \qquad \text{(a)}$$

Avec les intégrales indéfinies, il est important d'indiquer toujours la constante C indéterminée !
Bei unbestimmten Integralen ist stets die Integrationskonstante C mit anzugeben !

Règle: $$\int \mathrm{d}x\, x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad , \quad \text{si } n \neq -1$$

Solution de l'exercice 1:

Il faut trouver les primitives des fonctions données (on dit aussi **intégrale indéfinie**).
Die Stammfunktion einer gegebenen Funktion ist zu finden (man sagt auch **unbestimmtes Integral***).*

a) $4x^3 - 6x + 9$

$$\int \mathrm{d}x \left(4x^3 - 6x + 9\right) = 4\frac{1}{4}x^4 - 6\frac{1}{2}x^2 + 9x + C = x^4 - 3x^2 + 9x + C \qquad \text{(a)}$$

Avec les intégrales indéfinies, il est important d'indiquer toujours la constante C indéterminée !
Bei unbestimmten Integralen ist stets die Integrationskonstante C mit anzugeben !

Règle: $$\int \mathrm{d}x\, x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad , \quad \text{si } n \neq -1$$

Afin de vérifier le résultat (a) , calculons la dérivée par rapport à x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4 - 3x^2 + 9x + C\right) = 4x^3 - 3 \cdot 2x + 9 = 4x^3 - 6x + 9$$

comme il le faut (et C a bien disparu).

⚠ vocabulaire fr/all: avoir disparu = *verschwunden sein*; être disparu = *verstorben sein*

b) $\cos\left(2x+5\right)$

b) $\cos(2x+5)$

$$\int \mathrm{d}x \ \cos(2x+5) = \frac{1}{2}\sin(2x+5) + C \tag{b}$$

et on écrit bien entendu la constante d'intégration

Règles: $\int \mathrm{d}x \ \cos x = \sin x + C$, $\int \mathrm{d}x \ \sin x = -\cos x + C$

b) $\cos(2x+5)$

$$\int \mathrm{d}x\ \cos(2x+5) = \frac{1}{2}\sin(2x+5) + C \tag{b}$$

et on écrit bien entendu la constante d'intégration

Règles: $\displaystyle\int \mathrm{d}x\ \cos x = \sin x + C$, $\displaystyle\int \mathrm{d}x\ \sin x = -\cos x + C$

Afin de vérifier le résultat (b) , calculons la dérivée par rapport à x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\sin(2x+5) + C\right] = \frac{1}{2}\cdot 2\cos(2x+5) = \cos(2x+5)$$

comme il le faut.

c) $\frac{1}{3x+2}$

c) $\frac{1}{3x+2}$

Ici, on fait appel à:

$$\text{Règle:} \quad \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{x} = \ln x + C$$

dans la littérature, on trouve souvent la notation $\log x$. Le **logarithme** 'naturel' $\ln x$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle $e^{\ln x} = \ln e^x = x$. J'évite la notation $\log x$, car il existe aussi des logarithmes plus généraux $\log_a x$ et de sa fonction réciproque a^x, tel que $a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$ si $a > 0$ et $a \neq 1$. On a $\ln x = \log_e x$, où $e = 2.71828\ldots$ est le **nombre d'Euler**. **N.B.:** $\ln e = 1$

c) $\frac{1}{3x+2}$

Ici, on fait appel à:

$$\text{Règle:} \quad \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{x} = \ln x + C$$

dans la littérature, on trouve souvent la notation $\log x$. Le **logarithme** 'naturel' $\ln x$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle $e^{\ln x} = \ln e^x = x$. J'évite la notation $\log x$, car il existe aussi des logarithmes plus généraux $\log_a x$ et de sa fonction réciproque a^x, tel que $a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$ si $a > 0$ et $a \neq 1$. On a $\ln x = \log_e x$, où $e = 2.71828\ldots$ est le **nombre d'Euler**. **N.B.:** $\ln e = 1$

Application de la règle donne

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+2} = \frac{1}{3} \ln\big(3x+2\big) + C \tag{c}$$

c) $\frac{1}{3x+2}$

Ici, on fait appel à:

$$\text{Règle:} \quad \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{x} = \ln x + C$$

dans la littérature, on trouve souvent la notation $\log x$. Le **logarithme** 'naturel' $\ln x$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle $e^{\ln x} = \ln e^x = x$. J'évite la notation $\log x$, car il existe aussi des logarithmes plus généraux $\log_a x$ et de sa fonction réciproque a^x, tel que $a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$ si $a > 0$ et $a \neq 1$. On a $\ln x = \log_e x$, où $e = 2.71828\ldots$ est le **nombre d'Euler**. **N.B.:** $\ln e = 1$

Application de la règle donne

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+2} = \frac{1}{3} \ln(3x+2) + C \tag{c}$$

Pour la vérification de (c), calculons la dérivée par rapport à x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1}{3} \ln(3x+2) + C \right] = \frac{1}{3} \cdot 3 \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{3x+2}$$

comme il le faut.

d) $\tan x$

d) $\tan x$

Rappel: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. De plus, on a pour des fonctions itérées $f(g)(x) = \big(f \circ g\big)(x) = f(g(x))$:

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

d) $\tan x$

Rappel: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. De plus, on a pour des fonctions itérées $f(g)(x) = \big(f \circ g\big)(x) = f(g(x))$:

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

Ici, on pose $u = u(x) = \cos x$. Alors $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x$. Il vient

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x\ \tan x &= \int \mathrm{d}x\, \frac{\sin x}{\cos x} = \int \mathrm{d}x\, \big(-u'(x)\big)\frac{1}{u(x)} = -\int \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{1}{u} \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln u + C \qquad = -\ln\cos(x) + C
\end{aligned}$$

N.B.: en toute rigueur, il fallait écrire $\int \mathrm{d}x \tan x = -\ln\big|\cos(x)\big| + C$

d) $\tan x$

Rappel: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. De plus, on a pour des fonctions itérées $f(g)(x) = \big(f \circ g\big)(x) = f(g(x))$:

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

Ici, on pose $u = u(x) = \cos x$. Alors $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x$. Il vient

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\ \tan x &= \int \mathrm{d}x\, \frac{\sin x}{\cos x} = \int \mathrm{d}x\, \big(-u'(x)\big)\frac{1}{u(x)} = -\int \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{1}{u} \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln u + C = -\ln\cos(x) + C\end{aligned}$$

N.B.: en toute rigueur, il fallait écrire $\int \mathrm{d}x \tan x = -\ln\big|\cos(x)\big| + C$

Pour la vérification de ce résultat, calculons sa dérivée par rapport à x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[-\ln\cos(x) + C\Big] = -\frac{1}{\cos x}\big(-\sin(x)\big) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

comme il le faut.

e) $\frac{2x}{1+x^2}$

e) $\frac{2x}{1+x^2}$

On utilise de nouveau

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

et on pose $u = u(x) = x^2$. Alors $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = 2x$. Il vient

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\, \frac{2x}{1+x^2} &= \int \mathrm{d}x\, u'(x)\frac{1}{1+u(x)} = \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+u} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\ &= \ln\left(1+u\right) + C \qquad = \ln\left(1+x^2\right) + C\end{aligned}$$

e) $\frac{2x}{1+x^2}$

On utilise de nouveau

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

et on pose $u = u(x) = x^2$. Alors $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = 2x$. Il vient

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\, \frac{2x}{1+x^2} &= \int \mathrm{d}x\, u'(x)\frac{1}{1+u(x)} = \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+u} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\ &= \ln(1+u) + C \qquad = \ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

Pour la vérification de cet résultat, calculons sa dérivée par rapport à x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln(1+x^2) + C\right] = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$$

ce qui reproduit la fonction d'origine.

f) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Encore une fois, nous voulons changer la variable, à l'aide de

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

Ici, un 'bon' choix est $x = x(u) = \sin u$. Alors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = x'(u) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos u$.

f) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Encore une fois, nous voulons changer la variable, à l'aide de

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

Ici, un 'bon' choix est $x = x(u) = \sin u$. Alors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = x'(u) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos u$. Il vient

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \mathrm{d}u\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \int \mathrm{d}u\, \frac{\cos u}{\cos u} = \int \mathrm{d}u = u + C = \arcsin x + C \qquad \text{(f)}$$

et on se rappelle que $\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \Rightarrow \cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}$. De plus $\arcsin(\sin x) = x$.
N.B.: on écrit souvent $\arcsin x = \sin^{-1} x$. Je l'évite, afin de ne pas confondre avec $\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin x}$.

N.B.': Ici, on peut aussi faire le changement de variable $x = x(v) = \cos v$.

f) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Encore une fois, nous voulons changer la variable, à l'aide de

$$\text{Règle:} \quad \int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

Ici, un 'bon' choix est $x = x(u) = \sin u$. Alors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = x'(u) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos u$. Il vient

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \mathrm{d}u\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \int \mathrm{d}u\, \frac{\cos u}{\cos u} = \int \mathrm{d}u = u + C = \arcsin x + C \qquad \text{(f)}$$

et on se rappelle que $\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \Rightarrow \cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}$. De plus $\arcsin(\sin x) = x$.
N.B.: on écrit souvent $\arcsin x = \sin^{-1} x$. Je l'évite, afin de ne pas confondre avec $\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin x}$.

N.B.': Ici, on peut aussi faire le changement de variable $x = x(v) = \cos v$.

Pour la vérification de (f), calculons sa dérivée par rapport à x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\arcsin x + C\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et on reproduit bien la fonction d'origine.

g) $\frac{e^x}{1+e^x}$

g) $\frac{e^x}{1+e^x}$

On utilise de nouveau

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

et on pose $u = u(x) = e^x$. Alors $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = e^x$. Il vient

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\, \frac{e^x}{1+e^x} &= \int \mathrm{d}x\, u'(x)\frac{1}{1+u(x)} = \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+u} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\ &= \ln\big(1+u\big) + C \qquad = \ln\big(1+e^x\big) + C\end{aligned}$$

g) $\frac{e^x}{1+e^x}$

On utilise de nouveau

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

et on pose $u = u(x) = e^x$. Alors $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = e^x$. Il vient

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\, \frac{e^x}{1+e^x} &= \int \mathrm{d}x\, u'(x)\frac{1}{1+u(x)} = \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+u} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\ &= \ln\left(1+u\right) + C \qquad = \ln\left(1+e^x\right) + C\end{aligned}$$

Pour la vérification de cet résultat, calculons sa dérivée par rapport à x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left(1+e^x\right) + C\right] = \frac{1}{1+e^x}\cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^x}$$

ce qui reproduit la fonction d'origine.

h) $\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

h) $\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

Encore une fois, nous voulons changer la variable, à l'aide de

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

Ici $x = x(u) = 2\sinh u$ (sinus hyperbolique $\sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$). Alors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = x'(u) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 2\cosh u$.

h) $\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

Encore une fois, nous voulons changer la variable, à l'aide de

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

Ici $x = x(u) = 2\sinh u$ (sinus hyperbolique $\sinh u = \frac{1}{2}\left(e^u - e^{-u}\right)$). Alors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = x'(u) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 2\cosh u$. (cosinus hyperbolique $\cosh u = \frac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right)$)

h) $\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

Encore une fois, nous voulons changer la variable, à l'aide de

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

Ici $x = x(u) = 2\sinh u$ (sinus hyperbolique $\sinh u = \frac{1}{2}\left(e^u - e^{-u}\right)$). Alors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = x'(u) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 2\cosh u$. (cosinus hyperbolique $\cosh u = \frac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right)$) Il vient

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}} = \int \mathrm{d}u\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 u}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}u\, \frac{2\cosh u}{\cosh u} = \int \mathrm{d}u = u + C = \operatorname{arsinh}\frac{x}{2} + C \tag{h}$$

et on se rappelle que $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \Rightarrow \cosh u = \sqrt{1+\sinh^2 u}$. De plus $\operatorname{arsinh}\left(\sinh x\right) = x$.
N.B.: on écrit aussi $\operatorname{arsinh} x = \sinh^{-1} x$. Je l'évite, afin de ne pas confondre avec $\sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sinh x}$.

h) $\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

Encore une fois, nous voulons changer la variable, à l'aide de

$$\text{Règle:} \quad \int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

Ici $x = x(u) = 2\sinh u$ (sinus hyperbolique $\sinh u = \frac{1}{2}\left(e^u - e^{-u}\right)$). Alors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = x'(u) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 2\cosh u$. (cosinus hyperbolique $\cosh u = \frac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right)$) Il vient

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}} = \int \mathrm{d}u\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 u}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}u\, \frac{2\cosh u}{\cosh u} = \int \mathrm{d}u = u + C = \operatorname{arsinh}\frac{x}{2} + C \tag{h}$$

et on se rappelle que $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \Rightarrow \cosh u = \sqrt{1+\sinh^2 u}$. De plus $\operatorname{arsinh}\left(\sinh x\right) = x$.
N.B.: on écrit aussi $\operatorname{arsinh} x = \sinh^{-1} x$. Je l'évite, afin de ne pas confondre avec $\sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sinh x}$.

Pour la vérification de (h), calculons sa dérivée par rapport à x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\operatorname{arsinh}\frac{x}{2} + C\right] = \frac{1}{\sqrt{1+(x/2)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$$

et on reproduit bien la fonction d'origine.

i) $\frac{1}{1+x^2}$

i) $\frac{1}{1+x^2}$

Nous changeons la variable, à l'aide de

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

i) $\frac{1}{1+x^2}$

Nous changeons la variable, à l'aide de

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

Le 'bon' choix (à première vue pas si évident) $x = x(u) = \tan u$.

i) $\frac{1}{1+x^2}$

Nous changeons la variable, à l'aide de

Règle: $$\int \mathrm{d}g\, f(g) = \int \mathrm{d}x\, f(g(x))g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

Le 'bon' choix (à première vue pas si évident) $x = x(u) = \tan u$.

Calculons $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = x'(u) = \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)' = \frac{\cos^2 u - \sin^2 u \cdot (-1)}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$. Il vient

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \int \mathrm{d}u\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{1}{1+\tan^2 u} = \int \mathrm{d}u\, \frac{1}{\cos^2 u}\frac{1}{1+\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}} \\ &= \int \mathrm{d}u\, \frac{1}{\cos^2 u + \sin^2 u} = \int \mathrm{d}u = u + C = \arctan x + C\end{aligned}$$

où bien entendu $\arctan(\tan x) = x$ – et j'évite la notation $\arctan x = \tan^{-1} x$.

Remarque:

ainsi on sait traiter un grand nombre d'intégrales, des types $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ etc.

Les formulaires en contiennent des listes.

j) e^{x+3}

j) e^{x+3}

Car $\int \mathrm{d}x\, e^x = e^x + C$, on a à l'aide d'une intégration directe

$$\int \mathrm{d}x\, e^{x+3} = e^3 \int \mathrm{d}x\, e^x = e^{x+3} + C \tag{j}$$

N.B.: car C est arbitraire, $e^3 C$ l'est aussi et est appelé C dans l'éq. (j).

Pour la vérification de (j), calculons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{x+3} + C\right] = e^{x+3}$$

comme attendu.

k) $x \cos x$

k) $x \cos x$

Pour ce genre d'intégrale, on utilise la formule de l'**intégration par partie**
Für diesen Typ von Integralen verwendet man **partielle Integration**

Règle: $$\int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

k) $x \cos x$

Pour ce genre d'intégrale, on utilise la formule de l'**intégration par partie**
Für diesen Typ von Integralen verwendet man **partielle Integration**

$$\text{Règle:} \quad \int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

N.B.: le sens de cette formule se revèle si on considère une intégration définie

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x) \; = [uv]_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = x$ et $v' = v'(x) = \cos x$.
Alors $u'(x) = 1$ et $v = v(x) = \sin x$ (une solution suffit).

k) $x \cos x$

Pour ce genre d'intégrale, on utilise la formule de l'**intégration par partie**
Für diesen Typ von Integralen verwendet man **partielle Integration**

$$\text{Règle:} \quad \int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

N.B.: le sens de cette formule se revèle si on considère une intégration définie

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x) \; = [uv]_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = x$ et $v' = v'(x) = \cos x$.
Alors $u'(x) = 1$ et $v = v(x) = \sin x$ (une solution suffit). Ainsi, on trouve

$$\int \mathrm{d}x\, x \cos x = x \sin x - \int \mathrm{d}x\, 1 \cdot \sin x$$

k) $x \cos x$

Pour ce genre d'intégrale, on utilise la formule de l'**intégration par partie**
Für diesen Typ von Integralen verwendet man **partielle Integration**

$$\text{Règle:} \quad \int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

N.B.: le sens de cette formule se revèle si on considère une intégration définie

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x) \; = [uv]_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = x$ et $v' = v'(x) = \cos x$.
Alors $u'(x) = 1$ et $v = v(x) = \sin x$ (une solution suffit). Ainsi, on trouve

$$\int \mathrm{d}x\, x \cos x = x \sin x - \int \mathrm{d}x\, 1 \cdot \sin x = x \sin x - \big(-\cos x\big) + C = x \sin x + \cos x + C \quad \text{(k)}$$

k) $x \cos x$

Pour ce genre d'intégrale, on utilise la formule de l'**intégration par partie**
Für diesen Typ von Integralen verwendet man **partielle Integration**

$$\text{Règle:} \quad \int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

N.B.: le sens de cette formule se revèle si on considère une intégration définie

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x) \; = [uv]_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = x$ et $v' = v'(x) = \cos x$.
Alors $u'(x) = 1$ et $v = v(x) = \sin x$ (une solution suffit). Ainsi, on trouve

$$\int \mathrm{d}x\, x \cos x = x \sin x - \int \mathrm{d}x\, 1 \cdot \sin x = x \sin x - \big(-\cos x\big) + C = x \sin x + \cos x + C \quad \text{(k)}$$

Faisons encore la vérification explicite de (k) par dérivation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[x \sin x + \cos x + C\Big] = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

et le contrôle marche bien.

I) $\ln 3x$

I) $\ln 3x$

On utilise de nouveau la formule de l'**intégration par partie**

Règle: $$\int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

I) $\ln 3x$

On utilise de nouveau la formule de l'**intégration par partie**

$$\text{Règle:} \quad \int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = \ln 3x$ et $v' = v'(x) = 1$.
Alors $u'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3x} = \frac{1}{x}$ et $v = v(x) = x$ (une solution suffit).

I) $\ln 3x$

On utilise de nouveau la formule de l'**intégration par partie**

$$\text{Règle:} \quad \int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = \ln 3x$ et $v' = v'(x) = 1$.
Alors $u'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3x} = \frac{1}{x}$ et $v = v(x) = x$ (une solution suffit). Ainsi, on trouve

$$\int \mathrm{d}x\ \ln 3x = \int \mathrm{d}x\ \ln\big(3x\big) \cdot 1 = \ln\big(3x\big) \cdot x - \int \mathrm{d}x\ \frac{1}{x} \cdot x = x \ln\big(3x\big) - x + C \qquad \text{(I)}$$

I) $\ln 3x$

On utilise de nouveau la formule de l'**intégration par partie**

$$\text{Règle:} \quad \int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = \ln 3x$ et $v' = v'(x) = 1$.
Alors $u'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3x} = \frac{1}{x}$ et $v = v(x) = x$ (une solution suffit). Ainsi, on trouve

$$\int \mathrm{d}x\ \ln 3x = \int \mathrm{d}x\ \ln\big(3x\big) \cdot 1 = \ln\big(3x\big) \cdot x - \int \mathrm{d}x\ \frac{1}{x} \cdot x = x \ln\big(3x\big) - x + C \qquad \text{(I)}$$

Encore une fois, la vérification explicite de (I) par dérivation est utile:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[x \ln\big(3x\big) - x + C\Big] = \ln\big(3x\big) + x \cdot 3 \cdot \frac{1}{3x} - 1 = \ln\big(3x\big) + 1 - 1 = \ln\big(3x\big)$$

et le contrôle marche bien.

Remarque:

la maîtrise de ces techniques vient avec de l'expérience, obtenue en mettant la main à la pâte ...

m) $\cos^2 x$

m) $\cos^2 x$

De nouveau, on utilise Règle: $\int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$

m) $\cos^2 x$

De nouveau, on utilise Règle: $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = \cos x$ et $v' = v'(x) = \cos x$.
Alors $u'(x) = -\sin x$ et $v = v(x) = \sin x$.

m) $\cos^2 x$

De nouveau, on utilise Règle: $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = \cos x$ et $v' = v'(x) = \cos x$.
Alors $u'(x) = -\sin x$ et $v = v(x) = \sin x$. Ainsi, on trouve pour l'intégrale

$$\mathcal{I} \quad := \quad \int \mathrm{d}x\, \cos^2 x \; = \; \int \mathrm{d}x\, \cos x \cdot \cos x$$

m) $\cos^2 x$

De nouveau, on utilise Règle: $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = \cos x$ et $v' = v'(x) = \cos x$.
Alors $u'(x) = -\sin x$ et $v = v(x) = \sin x$. Ainsi, on trouve pour l'intégrale

$$\mathcal{I} \quad := \quad \int \mathrm{d}x\, \cos^2 x \;=\; \int \mathrm{d}x\, \cos x \cdot \cos x \;=\; \cos x \cdot \sin x - \int \mathrm{d}x\, (-\sin x) \cdot \sin x$$

m) $\cos^2 x$

De nouveau, on utilise Règle: $\int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = \cos x$ et $v' = v'(x) = \cos x$.
Alors $u'(x) = -\sin x$ et $v = v(x) = \sin x$. Ainsi, on trouve pour l'intégrale

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \quad &:= \quad \int \mathrm{d}x\, \cos^2 x \;=\; \int \mathrm{d}x\, \cos x \cdot \cos x \;=\; \cos x \cdot \sin x - \int \mathrm{d}x\, (-\sin x) \cdot \sin x \\
&= \quad \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x\, \sin^2 x \;=\; \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x\, (1 - \cos^2 x) \;=\; \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x\, 1 - \mathcal{I} \\
&= \quad \sin x \cos x + x + 2C - \mathcal{I}
\end{aligned}$$

m) $\cos^2 x$

De nouveau, on utilise Règle: $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = \cos x$ et $v' = v'(x) = \cos x$.
Alors $u'(x) = -\sin x$ et $v = v(x) = \sin x$. Ainsi, on trouve pour l'intégrale

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \quad &:= \quad \int \mathrm{d}x\, \cos^2 x \;=\; \int \mathrm{d}x\, \cos x \cdot \cos x \;=\; \cos x \cdot \sin x - \int \mathrm{d}x\, (-\sin x) \cdot \sin x \\
&= \quad \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x\, \sin^2 x \;=\; \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x\, (1 - \cos^2 x) \;=\; \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x\, 1 - \mathcal{I} \\
&= \quad \sin x \cos x + x + 2C - \mathcal{I}
\end{aligned}$$

☞ Ici, on n'a pas de résultat direct pour $\mathcal{I}$ mais plutôt une équation.

m) $\cos^2 x$

De nouveau, on utilise Règle: $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = \cos x$ et $v' = v'(x) = \cos x$.
Alors $u'(x) = -\sin x$ et $v = v(x) = \sin x$. Ainsi, on trouve pour l'intégrale

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \quad &:= \quad \int \mathrm{d}x\ \cos^2 x \ = \int \mathrm{d}x\ \cos x \cdot \cos x \ = \ \cos x \cdot \sin x - \int \mathrm{d}x\ (-\sin x) \cdot \sin x \\
&= \quad \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x\ \sin^2 x \ = \ \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x\ (1 - \cos^2 x) \ = \ \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x\, 1 - \mathcal{I} \\
&= \quad \sin x \cos x + x + 2C - \mathcal{I}
\end{aligned}$$

☞ Ici, on n'a pas de résultat direct pour $\mathcal{I}$ mais plutôt une équation. En mettant $\mathcal{I}$ en évidence, on obtient

$$\mathcal{I} = \int \mathrm{d}x\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x) + C \tag{m}$$

m) $\cos^2 x$

De nouveau, on utilise Règle: $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = u(x)v(x)\Big| - \int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)$

Pour l'exemple en question, on choisit $u = u(x) = \cos x$ et $v' = v'(x) = \cos x$.
Alors $u'(x) = -\sin x$ et $v = v(x) = \sin x$. Ainsi, on trouve pour l'intégrale

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \quad &:= \quad \int \mathrm{d}x\, \cos^2 x \;=\; \int \mathrm{d}x\, \cos x \cdot \cos x \;=\; \cos x \cdot \sin x - \int \mathrm{d}x\, (-\sin x) \cdot \sin x \\
&= \quad \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x\, \sin^2 x \;=\; \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x\, (1 - \cos^2 x) \;=\; \sin x \cos x + \int \mathrm{d}x\, 1 - \mathcal{I} \\
&= \quad \sin x \cos x + x + 2C - \mathcal{I}
\end{aligned}$$

☞ Ici, on n'a pas de résultat direct pour $\mathcal{I}$ mais plutôt une équation. En mettant $\mathcal{I}$ en évidence, on obtient

$$\mathcal{I} = \int \mathrm{d}x\, \cos^2 x = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x) + C \tag{m}$$

Pour finir, voici la vérification explicite de (m) par dérivation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}(\sin x \cos x + x) + C\right] = \frac{1}{2}(\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x + 1) = \frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos^2 x) = \cos^2 x$$

Développement formel: démonstration de l'intégration par partie.

On part de la régle pour dériver un produit des fonctions $u = u(x)$ et $v = v(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(u(x)v(x)\big) = \big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

On peut re-arranger cette équation comme suit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(u(x)v(x)\big) - u'(x)v(x) = \big(u(x)v(x)\big)' - u'(x)v(x) = u(x)v'(x)$$

et finalement on peut l'intégrer sur l'intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) &= \int_a^b \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(u(x)v(x)\big) - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x) \\
&= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x) \\
&=: u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x)
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Fonctions trigonométriques et hyperboliques

elles sont définies pour toute variable complexe $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ (sauf aux pôles)

formule d'EULER $e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$

définitions:

$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}\right) = \cos\left(z + 2\pi\right)$

$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\right) = \sin\left(z + 2\pi\right)$

$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}} = \tan\left(z + \pi\right)$

$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}} = \cot\left(z + \pi\right)$

identités:

$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

fonctions inverses (arcus):

$\arccos\cos z = z$

$\arcsin\sin z = z$

$\arctan\tan z = z$

$\mathrm{arccot}\ \cot z = z$

Notations abrégées:

$\mathrm{tg}\, z = \tan z$, $\mathrm{ctg}\, z = \cot z$

exponentielle $e^{z} = \cosh z + \sinh z$

définitions:

$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) = \cos \mathrm{i}z$

$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) = \mathrm{i}\sin \mathrm{i}z$

$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} = \mathrm{i}\tan \mathrm{i}z$

$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}} = \frac{1}{\mathrm{i}}\cot \mathrm{i}z$

identités:

$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$

$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$

fonctions inverses (area):

$\mathrm{arcosh}\ \cosh z = z$

$\mathrm{arsinh}\ \sinh z = z$

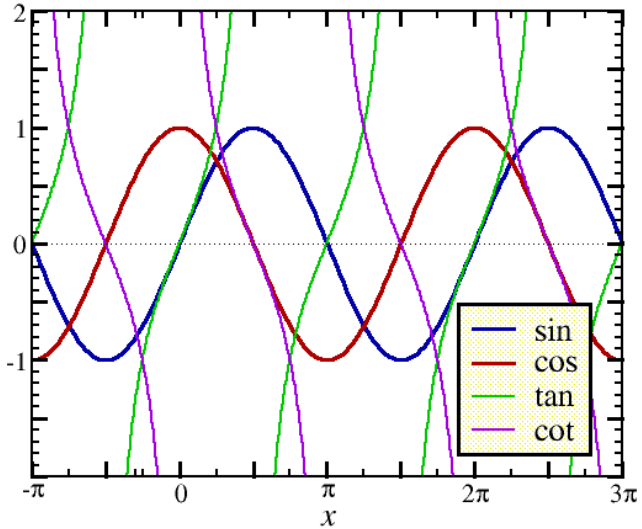
$\mathrm{artanh}\ \tanh z = z$

$\mathrm{arcoth}\ \coth z = z$

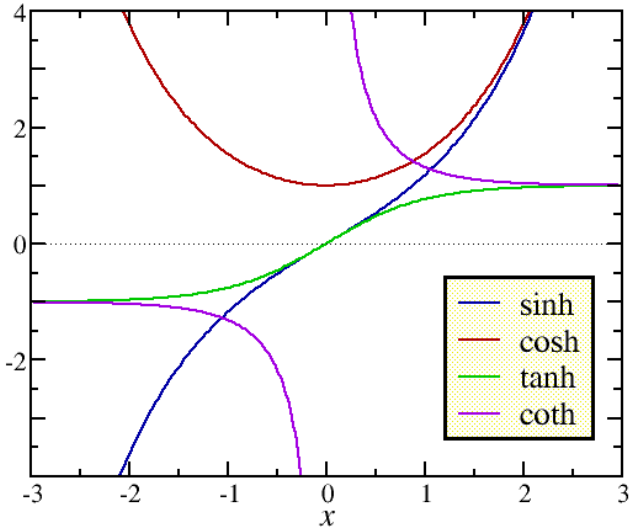
Notations abrégées:

$\mathrm{sh}\, z = \sinh z$, $\mathrm{ch}\, z = \cosh z$, $\mathrm{th}\, z = \tanh z$

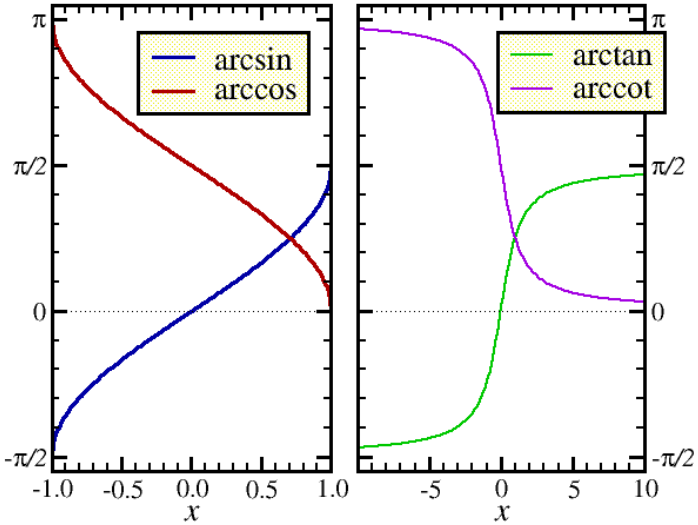
allure des fonctions trigonométriques



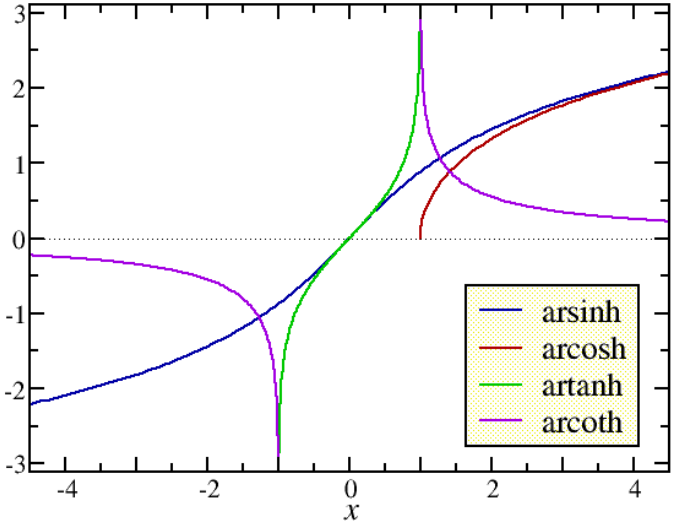
allure des fonctions hyperboliques



allure des fonctions trigonométriques inverses



allure des fonctions hyperboliques inverses



un peu de vocabulaire fr-all/*ein wenig dt-frz Vokabular*

Näherung, *f*	approximation, *f*
genähert	approché
rigoros; streng	rigoureux
mathematische Strenge, *f*	rigueur mathématique, *f*
Zerlegung, *f*	décomposition, *f*
zerlegen	décomposer
vertauschen	permuter
inverse Funktion, *f*; Umkehrfunktion, *f*	fonction réciproque, *f*
Kehrwert, *m*; reziproker Wert $1/x$, *m*	fonction inverse, *f* $(f(x) = 1/x)$
Integral, *n*	intégrale, *f*
integrieren	intégrer
partielle Integration, *f*	intégration par partie, *f*
Stammfunktion, *f*	fonction primitive, *f*
Ableitung, *f*	derivée, *f*
ableiten	dériver
partielle Ableitung, *f*	dérivée partielle, *f*
Steigung, *f*	pente, *f*
Herleitung, *f*; (Ableitung, *f*)	déduction, *f*

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

un peu plus de vocabulaire fr-all/*. . . mehr dt-frz Vokabular*

Beweis, *m*	démonstration, *f*
lineare Algebra, *f*	algèbre linéaire, *f*
Ansatz, *m*	ansatz, *m*
Lösung, *f*	solution, *f*
lösen (eine Gleichung, ein Rätsel)	résoudre (une équation, une énigme)
auflösen nach *G*	mettre *G* en évidence
Ergebnis, *n* ; Resultat, *n*	résultat, *m*
Gleichung, *f*	équation, *f*
Gleichungssystem, *n*	système d'équations, *m*
linear	linéaire
algebraische Gleichung, *f*	équation algébrique, *f*
Differentialgleichung, *f*	équation différentielle, *f*
Integralgleichung, *f*	équation intégrale, *f*
Variablenwechsel, *m*	changement de variable, *m*
Logarithmus, *m*	logarithme, *m*
Sinus, *m*; Kosinus, *m*	sinus, *m*; cosinus, *m*
Tangens, *m*; Kotangens, *m*	tangente, *f*; cotangente, *f*

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

2. Résolvez les équations différentielles suivantes pour la fonction $y = y(x)$:

$$a)\quad y' = \cos x \ ,\quad b)\ y'' = g = \text{cste.}\ ,\quad c)\ y' = -ay\ ,\quad d)\ xy' = y + 1\ ,$$
$$e)\quad xy' = y^2\ ,\quad f)\ y'\sin(x) = y\ln y\ ,\quad g)\ xy' - xy = y\ ,\quad h)\ y' = 5y - 3x\ ,$$
$$i)\quad x^2y' + 3xy - 1 = 0\ ,\quad j)\ 2xy' + y = 2x^{5/2}\ ,\quad k)\ y' = \frac{3y}{3y^{2/3} - x} \tag{2}$$

où g et a sont des constantes.

<u>Indications:</u> les cas a,b) s'intégrent directement. Les cas c-g) se résolvent à l'aide d'une **séparation des variables**/*Separation der Variablen*. Pour les cas h-k) il faut d'abord isoler une équadiff homogène et ensuite faire une **variation des constantes**/*Variation der Konstanten*. Dans k), il convient de rechercher d'abord la fonction $x = x(y)$ au lieu de $y = y(x)$.

Il restera dans vos solutions une constante d'intégration arbitraire. On peut la fixer en imposant une **valeur initiale**/*Anfangswert*, p.ex. du genre $y(0) = y_0$.

Solution de l'exercice 2:

Nous connaissons du lycée plusieurs types d'équations:

1. une équation peut fixer un nombre x:
   p.ex. $x^2 - 2 = 0$, avec solutions $x = \pm\sqrt{2}$.
2. une équation peut fixer une fonction $f(x)$:
   p.ex. $2f(x) - 3 = 1 + xf(x)$, avec solution $f(x) = \frac{4}{2-x}$.
3. ici, on étudie des équations entre une fonction $f(x)$ et ses dérivées $f'(x), f''(x), \ldots$.

☞ Celles-ci sont des **équations différentielles/Diffentialgleichungen**.
L'énoncé en donne déjà des multiples exemples.

Quelques caractéristiques des équations différentielles:

a. l'ordre maximale de la dérivée.

* L'équadiff $y'(x) = -ay(x)$ est une **équadiff du premier ordre**/*Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung* pour la fonction $y = y(x)$.
* L'équadiff $y''(x) + xy'(x) - 3y^2(x) = 0$ est une **équadiff du second ordre**/*DGL zweiter Ordnung* pour la fonction $y = y(x)$.

b. linéarité.

* L'équadiff $y'(x) = -ax^2y(x) + 3e^{-x^2}$ est une **équadiff linéaire**/*lineare DGL*.
* L'équadiff $y''(x) + xy'(x) - 3y^2(x) = 0$ est une **équadiff non linéaire**/*nichtlineare DGL*.

? Qu'en est-il avec les équadiffs de l'énoncé ?

Les exemples de l'énoncé traitent tous des équadiffs pour une fonction $y = y(x)$ d'une seule variable x. Une telle équation est une **équadiff ordinaire** (EDO)/*gewöhnliche DGL*.

En revanche, on peut aussi formuler des équadiffs pour des fonctions $f = f(x, y)$ de plusieurs variables $x, y, \ldots$, par exemple

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y) = 0$$

Une telle équation est une **équadiff partielle** (EDP)/*partielle DGL*.

☞ La physique traitée dans ce cours est limitée aux équadiffs ordinaires.

Pour une équadiff (EDO) d'ordre n, il faut faire n intégrations afin d'éliminer les dérivées. Ceci introduit n constantes d'intégration arbitraires. Ces constantes peuvent être fixées en imposant des conditions initiales sur $y(0)$, $y'(0)$, ... Une équadiff avec des conditions initiales constitue un **problème à valeurs initiales**/*Anfangswertproblem*.

Théorème: *Une équadiff d'ordre n et 'assez lisse' a n solutions indépendantes. Si l'on impose n conditions initiales, la solution est unique.*

On peut donc être convaincu que les équadiffs qui génèrent un problème à valeurs initiales ont des solutions uniques (locales) pour chaque ensemble de valeurs initiales. Rien n'est dit si ces solutions existent aussi 'globalement'. Le physicien s'intéresse surtout aux méthodes pour obtenir des expressions explicites des solutions.

a) $y'(x) = \cos x$

a) $y'(x) = \cos x$

Ce type d'équation s'intégre directement:

a) $y'(x) = \cos x$

Ce type d'équation s'intégre directement: méthode tricolore

$$y'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \int y'(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \sin x + C \tag{a}$$

Pour cette équation du premier ordre, une seule intégration suffit et on a une seule constante d'intégration C. Il y a donc une seule famille de solutions indépendantes, paramétrisées par la constante C.

Pour la fixer, on impose une condition initiale $y(x_0) = y_0$. Ainsi

$$y_0 = y(x_0) = \sin x_0 + C \quad \Rightarrow \quad C = y_0 - \sin x_0$$

et avec (a) la solution finale s'écrit

$$\boxed{y(x) = y_0 + \sin x - \sin x_0}$$

b) $y''(x) = g$ où g est une constante

b) $y''(x) = g$ où g est une constante

Pour cette équation du second ordre, il faut intégrer deux fois et on a deux constantes d'intégration C_1, C_2. Il y a donc deux familles de solutions indépendantes, paramétrisée par les constantes C_1, C_2.

b) $y''(x) = g$ où g est une constante

Pour cette équation du second ordre, il faut intégrer deux fois et on a deux constantes d'intégration C_1, C_2. Il y a donc deux familles de solutions indépendantes, paramétrisée par les constantes C_1, C_2.

Avec la méthode tricolore

$$y''(x) = g \quad \Rightarrow \quad \int y''(x)\,\mathrm{d}x = \int g\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y'(x) = gx + C_1$$

C'est un type d'équadiff déjà traité en a). On applique de nouveau la méthode tricolore

$$y'(x) = gx + C_1 \quad \Rightarrow \quad \int y'(x)\,\mathrm{d}x = \int (gx + C_1)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{g}{2}x^2 + C_1 x + C_2 \qquad \text{(b)}$$

N.B.: on voit que les constantes indéterminées des intégrations produisent les constantes C_1, C_2 qui paramétrisent les familles des solutions.

Si l'on impose les conditions initiales à $x_0 = 0$: $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$, on tire de la solution (b): $y_0 = C_2$ et $y_1 = C_1$. Avec (b), la solution finale s'écrit

$$\boxed{y(x) = \frac{g}{2}x^2 + y_1 x + y_0}$$

c) $y'(x) = -ay(x)$ où a est une constante

c) $y'(x) = -ay(x)$ où a est une constante

Pour cette équation du premier ordre, une seule intégration suffit. On a une seule constante d'intégration C et une seule famille de solutions, paramétrisée par la constante C.

c) $y'(x) = -ay(x)$ où a est une constante

Pour cette équation du premier ordre, une seule intégration suffit. On a une seule constante d'intégration C et une seule famille de solutions, paramétrisée par la constante C.

Ici, il n'est plus possible d'intégrer directement l'équadiff. En revanche, c'est un cas paradigmatique pour la **séparation de variables**. Pour le voir

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -ay(x) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{y}}_{\text{ne dépend que de } y} = \underbrace{-a\,\mathrm{d}x}_{\text{ne dépend que de } x}$$

c) $y'(x) = -ay(x)$ où a est une constante

Pour cette équation du premier ordre, une seule intégration suffit. On a une seule constante d'intégration C et une seule famille de solutions, paramétrisée par la constante C.

Ici, il n'est plus possible d'intégrer directement l'équadiff. En revanche, c'est un cas paradigmatique pour la **séparation de variables**. Pour le voir

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -ay(x) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{y}}_{\text{ne dépend que de } y} = \underbrace{-a\,\mathrm{d}x}_{\text{ne dépend que de } x}$$

Car les deux variables x et y sont rassemblées chacune de leur côté, on peut maintenant les intégrer séparemment

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int (-a)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln y + C^{(y)} = -ax + C^{(x)} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -ax + C$$

En principe, on a une constante d'intégration $C^{(y)}$, $C^{(x)}$ de chaque côté, mais la différence $C := C^{(x)} - C^{(y)}$ de deux constantes indéterminées reste une constante indéterminée. En prenant l'exponentiel on trouve

$$\Rightarrow \quad y(x) = e^{-ax+C} = e^{C}e^{-ax} = y_0 e^{-ax} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = y_0 e^{-ax}} \tag{c}$$

où l'on a admis la condition initiale $y(0) = y_0$ (et on a fixé $e^{C} = y_0$).

d) $xy'(x) = y(x) + 1$

d) $xy'(x) = y(x) + 1$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

d) $xy'(x) = y(x) + 1$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

Il s'agit d'un autre exemple d'une équadiff séparable. Pour le voir

$$x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = xy'(x) = y(x) + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

d) $xy'(x) = y(x) + 1$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

Il s'agit d'un autre exemple d'une équadiff séparable. Pour le voir

$$x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = xy'(x) = y(x) + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Car les variables x et y sont séparées, on peut les intégrer des deux côtés

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln(y+1) = \ln x + C \quad \Rightarrow \quad y(x) + 1 = e^{C+\ln x} = e^C x \qquad \text{(d)}$$

avec la même identification de la constante indéterminée C qu'auparavant.

Si l'on impose la condition initiale $y(x_0) = y_0$, on a de (d)

$$y_0 + 1 = e^C x_0 \quad \Rightarrow \quad e^C = \frac{y_0 + 1}{x_0}$$

et avec (d), la solution finale devient

$$\boxed{y(x) = -1 + (y_0 + 1)\frac{x}{x_0}}$$

e) $xy'(x) = y(x)^2$

e) $xy'(x) = y(x)^2$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre (non linéaire) et on a une seule famille de solutions.

e) $xy'(x) = y(x)^2$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre (non linéaire) et on a une seule famille de solutions.

Il s'agit d'un autre exemple d'une équadiff séparable. Pour le voir

$$x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = xy'(x) = y(x)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

e) $xy'(x) = y(x)^2$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre (non linéaire) et on a une seule famille de solutions.

Il s'agit d'un autre exemple d'une équadiff séparable. Pour le voir

$$x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = xy'(x) = y(x)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Car les variables x et y sont séparées, on peut les intégrer des deux côtés

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = \ln x - C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{C - \ln x} \tag{e}$$

avec une identification analogue de la constante indéterminée C qu'auparavant (choissant le signe de C pour simplifier la notation).

Si l'on impose la condition initiale $y(x_0) = y_0$, on a de (e)

$$y_0 = \frac{1}{C - \ln x_0} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{y_0} + \ln x_0$$

et avec (e), la solution finale devient

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + \ln \frac{x_0}{x}} = \frac{y_0}{1 + y_0 \ln \frac{x_0}{x}}}$$

f) $\sin(x)y'(x) = y(x)\ln y(x)$

f) $\sin(x)y'(x) = y(x)\ln y(x)$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

f) $\sin(x)y'(x) = y(x)\ln y(x)$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

Il s'agit d'un autre exemple d'une équadiff séparable. Pour le voir

$$\sin x \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \sin x\, y'(x) = y(x)\ln y(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

f) $\sin(x)y'(x) = y(x)\ln y(x)$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

Il s'agit d'un autre exemple d'une équadiff séparable. Pour le voir

$$\sin x \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \sin x\, y'(x) = y(x)\ln y(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

Car les variables x et y sont séparées, on peut les intégrer des deux côtés

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \tag{f}$$

La difficulté pratique est d'obtenir ces intégrales explicitement.

f) $\sin(x)y'(x) = y(x)\ln y(x)$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

Il s'agit d'un autre exemple d'une équadiff séparable. Pour le voir

$$\sin x \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \sin x\, y'(x) = y(x)\ln y(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

Car les variables x et y sont séparées, on peut les intégrer des deux côtés

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \tag{f}$$

La difficulté pratique est d'obtenir ces intégrales explicitement.

D'abord, on considère, avec la nouvelle variable $u = \ln y$ (alors $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u' = \frac{1}{y}y' = \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, donc $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}y}{y}$), le côté gauche de l'éq. (f):

$$I_1 := \int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y}\frac{1}{\ln y} = \int \mathrm{d}u\, \frac{1}{u} = \ln u + C^{(u)} = \ln\big(\ln y\big) + C^{(u)} \tag{f_1}$$

N.B.: idée derrière: faire disparaître l'élement qui semble être le plus encombrant

Ensuite, on considère le côté droit. On utilise les **théorèmes d'addition** de sinus et cosinus

$$\boxed{\sin\big(\alpha+\beta\big) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta \quad , \quad \cos\big(\alpha+\beta\big) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta}$$

et pour $\alpha = \beta = \frac{x}{2}$ il vient: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}$. On change pour la variable $v = \sin\frac{x}{2}$, donc $\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

$$I_2 := \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x}{\big(1-\sin^2\frac{x}{2}\big)\sin\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}v}{(1-v^2)v}$$

Ensuite, on considère le côté droit. On utilise les **théorèmes d'addition** de sinus et cosinus

$$\boxed{\sin\big(\alpha+\beta\big) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta \quad , \quad \cos\big(\alpha+\beta\big) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta}$$

et pour $\alpha = \beta = \frac{x}{2}$ il vient: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}$. On change pour la variable $v = \sin\frac{x}{2}$, donc $\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

$$I_2 := \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x}{\big(1-\sin^2\frac{x}{2}\big)\sin\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}v}{(1-v^2)v}$$

• Cette dernière intégrale peut se traiter à l'aide d'une **décomposition en fractions**/*Partialbruchzerlegung*: on fait l'<u>ansatz</u>

$$\frac{1}{(1-v^2)v} = \frac{A}{v} + \frac{B}{1-v} + \frac{C}{1+v} \qquad (*)$$

et on essaie de trouver des constantes A, B, C telles que (*) soit valable pour tout $v \in \mathbb{R}$.

Ensuite, on considère le côté droit. On utilise les **théorèmes d'addition** de sinus et cosinus

$$\boxed{\sin\big(\alpha+\beta\big) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta \quad , \quad \cos\big(\alpha+\beta\big) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta}$$

et pour $\alpha = \beta = \frac{x}{2}$ il vient: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}$. On change pour la variable $v = \sin\frac{x}{2}$, donc $\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

$$I_2 := \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x}{\big(1-\sin^2\frac{x}{2}\big)\sin\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}v}{(1-v^2)v}$$

• Cette dernière intégrale peut se traiter à l'aide d'une **décomposition en fractions**/*Partialbruchzerlegung*: on fait l'ansatz

$$\frac{1}{(1-v^2)v} = \frac{A}{v} + \frac{B}{1-v} + \frac{C}{1+v} \qquad (*)$$

et on essaie de trouver des constantes A, B, C telles que (*) soit valable pour tout $v \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-v^2)v} &= \frac{A(1-v^2)+Bv(1+v)+Cv(1-v)}{(1-v^2)v} \\ \Rightarrow \quad 1 &\overset{!}{=} A(1-v^2)+Bv(1+v)+Cv(1-v) = v^2\big(-A+B-C\big)+v\big(B+C\big)+A \end{aligned}$$

ce qui mène au système d'équations $1 = A$, $B + C = 0$, $-A + B - C = 0$; donc $C = -B$, $2B = A = 1$, et enfin $\boxed{B = -C = \frac{1}{2} \text{ et } A = 1}$.

- On a ainsi trouvé la décomposition

$$\frac{1}{(1-v^2)v} = \frac{1}{v} + \frac{1/2}{1-v} - \frac{1/2}{1+v} \qquad (**)$$

ce qui permet de terminer le calcul explicite de I_2: avec $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\mathrm{d}v}{(1-v^2)v} \overset{(**)}{=} \int \mathrm{d}v \left(\frac{1}{v} + \frac{1/2}{1-v} - \frac{1/2}{1+v}\right) = \ln v - \frac{1}{2}\ln(1-v) - \frac{1}{2}\ln(1+v) + C^{(v)} \\ &= \ln \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} + C^{(v)} = \ln \frac{\sin x/2}{\sqrt{1-\sin^2 x/2}} + C^{(v)} = \ln \frac{\sin x/2}{\cos x/2} + C^{(v)} = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) + C^{(v)} \end{aligned}$$

• On a ainsi trouvé la décomposition

$$\frac{1}{(1-v^2)v} = \frac{1}{v} + \frac{1/2}{1-v} - \frac{1/2}{1+v} \qquad (**)$$

ce qui permet de terminer le calcul explicite de I_2: avec $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\mathrm{d}v}{(1-v^2)v} \overset{(**)}{=} \int \mathrm{d}v \left(\frac{1}{v} + \frac{1/2}{1-v} - \frac{1/2}{1+v}\right) = \ln v - \frac{1}{2}\ln(1-v) - \frac{1}{2}\ln(1+v) + C^{(v)} \\ &= \ln \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} + C^{(v)} = \ln \frac{\sin x/2}{\sqrt{1-\sin^2 x/2}} + C^{(v)} = \ln \frac{\sin x/2}{\cos x/2} + C^{(v)} = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) + C^{(v)} \end{aligned}$$

L'équation (f) $I_1 = I_2$ devient donc

$$\ln \ln y + C^{(u)} = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) + C^{(v)} \quad \Rightarrow \quad \ln y = C \tan \frac{x}{2}$$

ce qui donne la solution générale sous la forme

$$y(x) = e^{C \tan \frac{x}{2}}$$

Avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$, on trouve $C = \ln y_0 \big/ \tan \frac{x_0}{2}$, de sorte que la solution finale s'écrit

$$\boxed{y(x) = \exp\left(\ln y_0 \cdot \frac{\tan x/2}{\tan x_0/2}\right)}$$

N.B.: sans doute, le choix $y(x) = e^{Y(w)}$, avec $w = \tan \frac{x}{2}$, de variables aurait simplifié le calcul ... si l'on avait su ...

g) $xy'(x) - xy(x) = y(x)$

g) $xy'(x) - xy(x) = y(x)$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

g) $xy'(x) - xy(x) = y(x)$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

Il s'agit d'un autre exemple d'une équadiff séparable. Pour le voir

$$x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - xy(x) = xy'(x) - xy(x) = y(x) \quad \Rightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = (x+1)y(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x\,\frac{x+1}{x}$$

g) $xy'(x) - xy(x) = y(x)$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

Il s'agit d'un autre exemple d'une équadiff séparable. Pour le voir

$$x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - xy(x) = xy'(x) - xy(x) = y(x) \quad \Rightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = (x+1)y(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x\,\frac{x+1}{x}$$

Car les variables x et y sont séparées, on peut les intégrer des deux côtés

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \mathrm{d}x\,\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad \ln y = x + \ln x + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{C+x+\ln x} = e^{C}x\,e^{x} \qquad \text{(g)}$$

avec la même identification de la constante indéterminée C qu'auparavant.

Si l'on impose la condition initiale $y(x_0) = y_0$, on a de (g)

$$y_0 = e^{C}x_0 e^{x_0} \quad \Rightarrow \quad e^{C} = \frac{y_0}{x_0}e^{-x_0}$$

et avec (g), la solution finale devient

$$\boxed{y(x) = y_0\frac{x}{x_0}e^{(x-x_0)}}$$

h) $xy'(x) = 5y(x) - 3x$

h) $xy'(x) = 5y(x) - 3x$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

h) $xy'(x) = 5y(x) - 3x$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Il s'agit d'une équadiff linéaire, mais **non** séparable.

h) $xy'(x) = 5y(x) - 3x$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Il s'agit d'une équadiff linéaire, mais **non** séparable.

$\Rightarrow$ Il convient de distinguer deux cas:

1. $y'(x) = a(x)y(x)$ est une **équadiff linéaire et homogène** du 1er ordre.
2. $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ est une **équadiff linéaire et inhomogène** du 1er ordre.

h) $xy'(x) = 5y(x) - 3x$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Il s'agit d'une équadiff linéaire, mais **non** séparable.

$\Rightarrow$ Il convient de distinguer deux cas:

1. $y'(x) = a(x)y(x)$ est une **équadiff linéaire et homogène** du 1er ordre.
2. $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ est une **équadiff linéaire et inhomogène** du 1er ordre.

La solution de telles équadiffs, linéaires et inhomogènes, progresse en **deux étapes**:

h) $xy'(x) = 5y(x) - 3x$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Il s'agit d'une équadiff linéaire, mais **non** séparable.

$\Rightarrow$ Il convient de distinguer deux cas:
1. $y'(x) = a(x)y(x)$ est une **équadiff linéaire et homogène** du 1er ordre.
2. $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ est une **équadiff linéaire et inhomogène** du 1er ordre.

La solution de telles équadiffs, linéaires et inhomogènes, progresse en **deux étapes**:

(I) D'abord, on ne considère que la partie homogène de l'équadiff (séparable !) $xy' = 5y$

$$x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = xy'(x) = 5y(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = 5\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Comme d'habitude, ceci s'intègre des deux côtés

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 5\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = 5\ln x + C \quad \Rightarrow \boxed{y(x) = y_0\, x^5} \qquad (h_0)$$

où y_0 est une constante (*a priori* liée aux conditions initiales)

(II) Afin de résoudre l'équadiff complète, on considère l'ansatz

$$\boxed{y(x) = y_0(x)\, x^5} \qquad (h_v)$$

Ceci reprend la solution (h_0) de l'équadiff homogène et remplace la constante d'intégration y_0 par une fonction $y_0 = y_0(x)$, encore à déterminer. Cet ansatz s'appelle **variation de la constante**.

(II) Afin de résoudre l'équadiff complète, on considère l'ansatz

$$\boxed{y(x) = y_0(x)\, x^5} \qquad (h_v)$$

Ceci reprend la solution (h_0) de l'équadiff homogène et remplace la constante d'intégration y_0 par une fonction $y_0 = y_0(x)$, encore à déterminer. Cet ansatz s'appelle **variation de la constante**.

On commence par le calcul de la dérivée, à partir de (h_v)

$$y'(x) = y_0'(x)\, x^5 + y_0(x)\, 5x^4$$

(II) Afin de résoudre l'équadiff complète, on considère l'ansatz

$$\boxed{y(x) = y_0(x)\,x^5} \qquad (h_v)$$

Ceci reprend la solution (h_0) de l'équadiff homogène et remplace la constante d'intégration y_0 par une fonction $y_0 = y_0(x)$, encore à déterminer. Cet ansatz s'appelle **variation de la constante**.

On commence par le calcul de la dérivée, à partir de (h_v)

$$y'(x) = y_0'(x)\,x^5 + y_0(x)\,5x^4$$

et on l'injecte dans l'équadiff $xy' = 5y - 3x$

$$xy'(x) = x\big(y_0'(x)\,x^5 + \underline{y_0(x)\,5x^4}\big) \overset{!}{=} \underline{5y_0(x)\,x^5} - 3x \;\Rightarrow\; x^6\,y_0'(x) = -3x \;\Rightarrow\; y_0'(x) = -3x^{-5}$$

(II) Afin de résoudre l'équadiff complète, on considère l'ansatz

$$\boxed{y(x) = y_0(x)\,x^5} \qquad (h_v)$$

Ceci reprend la solution (h_0) de l'équadiff homogène et remplace la constante d'intégration y_0 par une fonction $y_0 = y_0(x)$, encore à déterminer. Cet ansatz s'appelle **variation de la constante**.

On commence par le calcul de la dérivée, à partir de (h_v)

$$y'(x) = y_0'(x)\,x^5 + y_0(x)\,5x^4$$

et on l'injecte dans l'équadiff $xy' = 5y - 3x$

$$xy'(x) = x\big(y_0'(x)\,x^5 + \underline{y_0(x)\,5x^4}\big) \overset{!}{=} \underline{5y_0(x)\,x^5} - 3x \;\Rightarrow\; x^6\,y_0'(x) = -3x \;\Rightarrow\; y_0'(x) = -3x^{-5}$$

Cette équadiff pour $y_0(x)$ s'intègre directement, à la tricolore (ceci marche toujours !)

$$y_0(x) = \int \left(-\frac{3}{x^5}\right) \mathrm{d}x = \frac{-3}{-4}x^{-4} + y_{00} = \frac{3}{4}x^{-4} + y_{00}$$

avec une nouvelle constante d'intégration y_{00}.

(II) Afin de résoudre l'équadiff complète, on considère l'ansatz

$$\boxed{y(x) = y_0(x)\,x^5} \qquad (h_v)$$

Ceci reprend la solution (h_0) de l'équadiff homogène et remplace la constante d'intégration y_0 par une fonction $y_0 = y_0(x)$, encore à déterminer. Cet ansatz s'appelle **variation de la constante**.

On commence par le calcul de la dérivée, à partir de (h_v)

$$y'(x) = y_0'(x)\,x^5 + y_0(x)\,5x^4$$

et on l'injecte dans l'équadiff $xy' = 5y - 3x$

$$xy'(x) = x\big(y_0'(x)\,x^5 + \underline{y_0(x)\,5x^4}\big) \overset{!}{=} \underline{5y_0(x)\,x^5} - 3x \;\Rightarrow\; x^6\,y_0'(x) = -3x \;\Rightarrow\; y_0'(x) = -3x^{-5}$$

Cette équadiff pour $y_0(x)$ s'intègre directement, à la tricolore (ceci marche toujours !)

$$y_0(x) = \int \left(-\frac{3}{x^5}\right) \mathrm{d}x = \frac{-3}{-4}x^{-4} + y_{00} = \frac{3}{4}x^{-4} + y_{00}$$

avec une nouvelle constante d'intégration y_{00}. Avec l'ansatz (h_v), on trouve enfin la solution générale de l'équadiff

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{3}{4}x^{-4} + y_{00}\right)x^5 = \frac{3}{4}x + y_{00}\,x^5} \qquad (h)$$

Reprenons la solution générale de l'équadiff $xy' = 5y - 3x$

$$\boxed{y(x) = y_{00}\, x^5 + \frac{3}{4}x} \tag{h}$$

C'est bien la somme de deux termes:

1. la solution générale de l'équadiff homogène, ici $y_{00}\, x^5$

2. une solution particulière de l'équadiff complète, ici $\frac{3}{4}x$

Théorème: *La solution générale d'une équadiff linéaire inhomogène du 1er ordre est de la forme: somme de (i) la solution générale de l'equadiff homogène et (ii) d'une solution particulière.*

$$\boxed{y(x) = y_{\text{hom. gén.}}(x) + y_{\text{part.}}(x)}$$

on comprend donc le propos de la méthode de variation de la constante: c'est un moyen de se fabriquer une solution particulière explicite.

N.B.: si jamais on trouve une solution particulière par un autre moyen, p.ex. en la devinant, ça marche aussi . . .

i) $x^2y'(x) + 3xy(x) - 1 = 0$

i) $x^2y'(x) + 3xy(x) - 1 = 0$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

i) $x^2y'(x) + 3xy(x) - 1 = 0$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Il s'agit d'une équadiff linéaire et inhomogène, **non** séparable.

i) $x^2y'(x) + 3xy(x) - 1 = 0$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Il s'agit d'une équadiff linéaire et inhomogène, **non** séparable.

On la résout à l'aide de la méthode de 'variation de la constante'.

i) $x^2y'(x) + 3xy(x) - 1 = 0$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Il s'agit d'une équadiff linéaire et inhomogène, **non** séparable.

On la résout à l'aide de la méthode de 'variation de la constante'.

(I) On ne considère que la partie homogène de l'équadiff $x^2y' + 3xy = 0$

$$x^2\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + 3xy(x) = x^2y'(x) + 3xy(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -3\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Comme d'habitude, ceci s'intègre des deux côtés

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -3\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -3\ln x + C \quad \Rightarrow \boxed{y(x) = y_0\, x^{-3}} \qquad (i_0)$$

où y_0 est une constante (*a priori* liée aux conditions initiales)

(II) À l'aide de l'ansatz

$$\boxed{y(x) = y_0(x)\, x^{-3}} \qquad (i_v)$$

ce qu'on injecte dans l'équadiff $x^2 y' + 3xy + 1 = 0$, on trouve

$$x^2 y'(x) + 3xy(x) + 1 = x^2 \left(y_0'(x) x^{-3} \underline{-3y_0(x) x^{-4}} \right) \underline{+3y_0(x) x^{-2}} + 1 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x^{-1}\, y_0'(x) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0'(x) = -x$$

(II) À l'aide de l'ansatz

$$\boxed{y(x) = y_0(x)\, x^{-3}} \qquad (i_v)$$

ce qu'on injecte dans l'équadiff $x^2 y' + 3xy + 1 = 0$, on trouve

$$x^2 y'(x) + 3xy(x) + 1 = x^2 \left(y_0'(x) x^{-3} \underline{-3y_0(x) x^{-4}} \right) \underline{+3y_0(x) x^{-2}} + 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x^{-1}\, y_0'(x) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0'(x) = -x$$

Cette équadiff pour $y_0(x)$ s'intègre directement (ceci marche toujours !)

$$\Rightarrow \quad y_0(x) = -\frac{x^2}{2} + y_{00}$$

avec une nouvelle constante d'intégration y_{00}.

(II) À l'aide de l'ansatz

$$\boxed{y(x) = y_0(x)\, x^{-3}} \qquad (i_v)$$

ce qu'on injecte dans l'équadiff $x^2 y' + 3xy + 1 = 0$, on trouve

$$x^2 y'(x) + 3xy(x) + 1 = x^2 \left(y_0'(x) x^{-3} \underline{-3y_0(x) x^{-4}} \right) \underline{+3y_0(x) x^{-2}} + 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x^{-1}\, y_0'(x) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0'(x) = -x$$

Cette équadiff pour $y_0(x)$ s'intègre directement (ceci marche toujours !)

$$\Rightarrow \quad y_0(x) = -\frac{x^2}{2} + y_{00}$$

avec une nouvelle constante d'intégration y_{00}. Avec l'ansatz (i_v), on trouve enfin la solution générale de l'équadiff

$$\boxed{y(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + y_{00} \right) x^{-3} = y_{00}\, x^{-3} - \frac{1}{2}\frac{1}{x}} \qquad \text{(i)}$$

Ceci est bien la somme de la solution générale de l'équadiff homogène (ici $y_{00}\, x^{-3}$) et une solution particulière (ici $-\frac{1}{2x}$)

j) $2xy'(x) + y(x) = 2x^{5/2}$

j) $2xy'(x) + y(x) = 2x^{5/2}$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

j) $2xy'(x) + y(x) = 2x^{5/2}$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Il s'agit d'une équadiff linéaire et inhomogène, **non** séparable.

j) $2xy'(x) + y(x) = 2x^{5/2}$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Il s'agit d'une équadiff linéaire et inhomogène, **non** séparable.

On la résout à l'aide de la méthode de 'variation de la constante'.

j) $2xy'(x) + y(x) = 2x^{5/2}$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Il s'agit d'une équadiff linéaire et inhomogène, **non** séparable.

On la résout à l'aide de la méthode de 'variation de la constante'.

(I) On ne considère que la partie homogène de l'équadiff $2xy' + y = 0$

$$2x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + y(x) = 2xy'(x) + y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Comme d'habitude, ceci s'intègre des deux côtés

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\frac{1}{2}\ln x + C \quad \Rightarrow \boxed{y(x) = y_0\, x^{-1/2}} \qquad (j_0)$$

où y_0 est une constante (*a priori* liée aux conditions initiales)

(II) À l'aide de l'ansatz

$$\boxed{y(x) = y_0(x)\, x^{-1/2}} \qquad (j_v)$$

ce qu'on injecte dans l'équadiff $2xy' + y = 2x^{5/2}$, on trouve

$$2xy'(x) + y(x) = 2x\left(y_0'(x)x^{-1/2} \underline{-\frac{1}{2}y_0(x)x^{-3/2}}\right) \underline{+y_0(x)x^{-1/2}} \stackrel{!}{=} 2x^{5/2}$$

$$\Rightarrow \quad 2x^{1/2}\, y_0'(x) = 2x^{5/2} \quad \Rightarrow \quad y_0'(x) = x^2$$

(II) À l'aide de l'ansatz

$$\boxed{y(x) = y_0(x)\, x^{-1/2}} \qquad (j_v)$$

ce qu'on injecte dans l'équadiff $2xy' + y = 2x^{5/2}$, on trouve

$$2xy'(x) + y(x) = 2x\left(y_0'(x)x^{-1/2} \underline{-\frac{1}{2}y_0(x)x^{-3/2}}\right) \underline{+y_0(x)x^{-1/2}} \stackrel{!}{=} 2x^{5/2}$$

$$\Rightarrow \quad 2x^{1/2}\, y_0'(x) = 2x^{5/2} \quad \Rightarrow \quad y_0'(x) = x^2$$

Cette équadiff pour $y_0(x)$ s'intègre directement (ceci marche toujours !)

$$\Rightarrow \quad y_0(x) = \frac{x^3}{3} + y_{00}$$

avec une nouvelle constante d'intégration y_{00}.

(II) À l'aide de l'ansatz

$$\boxed{y(x) = y_0(x)\, x^{-1/2}} \tag{j_v}$$

ce qu'on injecte dans l'équadiff $2xy' + y = 2x^{5/2}$, on trouve

$$2xy'(x) + y(x) = 2x\left(y_0'(x)x^{-1/2} \underline{-\frac{1}{2}y_0(x)x^{-3/2}}\right) \underline{+y_0(x)x^{-1/2}} \stackrel{!}{=} 2x^{5/2}$$

$$\Rightarrow \quad 2x^{1/2}\, y_0'(x) = 2x^{5/2} \quad \Rightarrow \quad y_0'(x) = x^2$$

Cette équadiff pour $y_0(x)$ s'intègre directement (ceci marche toujours !)

$$\Rightarrow \quad y_0(x) = \frac{x^3}{3} + y_{00}$$

avec une nouvelle constante d'intégration y_{00}. Avec l'ansatz (j_v), on trouve enfin la solution générale de l'équadiff

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{x^3}{3} + y_{00}\right) x^{-1/2} = y_{00}\, x^{-1/2} + \frac{1}{3}x^{5/2}} \tag{j}$$

Ceci est bien la somme de la solution générale de l'équadiff homogène (ici $y_{00}\, x^{-1/2}$) et une solution particulière (ici $-\frac{1}{3}x^{5/2}$)

k) $y'(x) = \frac{3y(x)}{3y(x)^{2/3} - x}$

k) $y'(x) = \frac{3y(x)}{3y(x)^{2/3} - x}$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

k) $y'(x) = \frac{3y(x)}{3y(x)^{2/3} - x}$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Ce type d'équadiff non linéaire est différent des autres qu'on a vu. Il faut d'abord le ramener à une équadiff traitable par nos méthodes.

k) $y'(x) = \frac{3y(x)}{3y(x)^{2/3} - x}$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Ce type d'équadiff non linéaire est différent des autres qu'on a vu. Il faut d'abord le ramener à une équadiff traitable par nos méthodes.
Au lieu de chercher la fonction $y = y(x)$, on cherchera à la place sa fonction réciproque $x = x(y)$. On peut passer de l'une à autre en permutant les axes x et y dans un graphique.

k) $y'(x) = \frac{3y(x)}{3y(x)^{2/3} - x}$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Ce type d'équadiff non linéaire est différent des autres qu'on a vu. Il faut d'abord le ramener à une équadiff traitable par nos méthodes.

Au lieu de chercher la fonction $y = y(x)$, on cherchera à la place sa fonction réciproque $x = x(y)$. On peut passer de l'une à autre en permutant les axes x et y dans un graphique.

Théorème: *Entre les dérivées $y'(x)$ et $x'(y)$ on a la relation suivante*

$$\boxed{y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^{-1} = \frac{1}{x'(y)}}$$

On commence donc à déduire une équadiff pour $x = x(y)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = \frac{3y(x)}{3y(x)^{2/3} - x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x'(y) = \frac{3y^{2/3} - x(y)}{3y} \quad \Rightarrow \quad 3y\,x'(y) = 3y^{2/3} - x(y)$$

☞ On a obtenu une équadiff linéaire et inhomogène pour $x = x(y)$, **non** séparable.

k) $y'(x) = \frac{3y(x)}{3y(x)^{2/3} - x}$

Il faut intégrer une fois cette équadiff du premier ordre et on a une seule famille de solutions.

☞ Ce type d'équadiff non linéaire est différent des autres qu'on a vu. Il faut d'abord le ramener à une équadiff traitable par nos méthodes.
Au lieu de chercher la fonction $y = y(x)$, on cherchera à la place sa fonction réciproque $x = x(y)$. On peut passer de l'une à autre en permutant les axes x et y dans un graphique.
Théorème: *Entre les dérivées $y'(x)$ et $x'(y)$ on a la relation suivante*

$$\boxed{y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^{-1} = \frac{1}{x'(y)}}$$

On commence donc à déduire une équadiff pour $x = x(y)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = \frac{3y(x)}{3y(x)^{2/3} - x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x'(y) = \frac{3y^{2/3} - x(y)}{3y} \quad \Rightarrow \quad 3y\,x'(y) = 3y^{2/3} - x(y)$$

☞ On a obtenu une équadiff linéaire et inhomogène pour $x = x(y)$, **non** séparable.

On la résout à l'aide de la méthode de 'variation de la constante'.

⚠ les rôles des variables indépendantes et dépendantes, y et x, ont été échangés.

(I) On ne considère que la partie homogène de l'équadiff $3yx' = -x$

$$3y\frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y} = -x(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Comme d'habitude, ceci s'intègre des deux côtés

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int -\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}y}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln x = -\frac{1}{3}\ln y + C \quad \Rightarrow \boxed{x(y) = x_0\, y^{-1/3}} \qquad (k_0)$$

où x_0 est une constante (*a priori* liée aux conditions initiales)

(II) À l'aide de l'ansatz

$$\boxed{x(y) = x_0(y)\, y^{-1/3}} \qquad (k_v)$$

ce qu'on injecte dans l'équadiff $3yx' = -x + 3y^{2/3}$, on trouve

$$3yx'(y) = 3y\left(x_0'(y)y^{-1/3} \underline{-\frac{1}{3}x_0(y)y^{-4/3}}\right) \overset{!}{=} \underline{-x_0(y)y^{-1/3}} + 3y^{2/3} = -x(y) + 3y^{2/3}$$

$$\Rightarrow \quad 3y^{2/3}\, x_0'(y) = 3y^{2/3} \quad \Rightarrow \quad x_0'(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0(y) = y + x_{00}$$

avec une nouvelle constante d'intégration x_{00}.

(I) On ne considère que la partie homogène de l'équadiff $3yx' = -x$

$$3y\frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y} = -x(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Comme d'habitude, ceci s'intègre des deux côtés

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int -\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}y}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln x = -\frac{1}{3}\ln y + C \quad \Rightarrow \boxed{x(y) = x_0\, y^{-1/3}} \qquad (k_0)$$

où x_0 est une constante (*a priori* liée aux conditions initiales)

(II) À l'aide de l'ansatz

$$\boxed{x(y) = x_0(y)\, y^{-1/3}} \qquad (k_v)$$

ce qu'on injecte dans l'équadiff $3yx' = -x + 3y^{2/3}$, on trouve

$$3yx'(y) = 3y\left(x_0'(y)y^{-1/3} \underline{-\frac{1}{3}x_0(y)y^{-4/3}}\right) \overset{!}{=} \underline{-x_0(y)y^{-1/3}} + 3y^{2/3} = -x(y) + 3y^{2/3}$$

$$\Rightarrow \quad 3y^{2/3}\, x_0'(y) = 3y^{2/3} \quad \Rightarrow \quad x_0'(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0(y) = y + x_{00}$$

avec une nouvelle constante d'intégration x_{00}. Avec l'ansatz (k_v), on trouve enfin

$$\boxed{x(y) = (y + x_{00})\, y^{-1/3} = x_{00}\, y^{-1/3} + y^{2/3}} \qquad (k)$$

Ceci est bien la somme de la solution générale de l'équadiff homogène (ici $x_{00}\, y^{-1/3}$) et une solution particulière (ici $y^{2/3}$). Trouver $y = y(x)$ analytiquement à partir de (k) est difficile.

$$\boxed{x(y) = (y + x_{00})\, y^{-1/3} = x_{00}\, y^{-1/3} + y^{2/3}} \qquad \text{(k)}$$

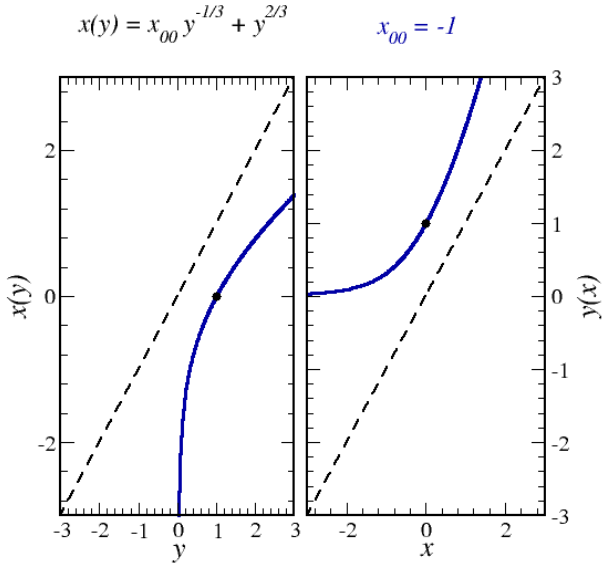
la forme qualitative de la solution dépend de la valeur du paramètre x_{00}

$\Rightarrow$ x_{00} agit comme **paramètre de contrôle** ☞ **bifurcations**

si condition initiale $\underline{x(1) = 0} \Rightarrow x_{00} = -1$

la fonction $x = x(y)$ a bien une fonction réciproque unique

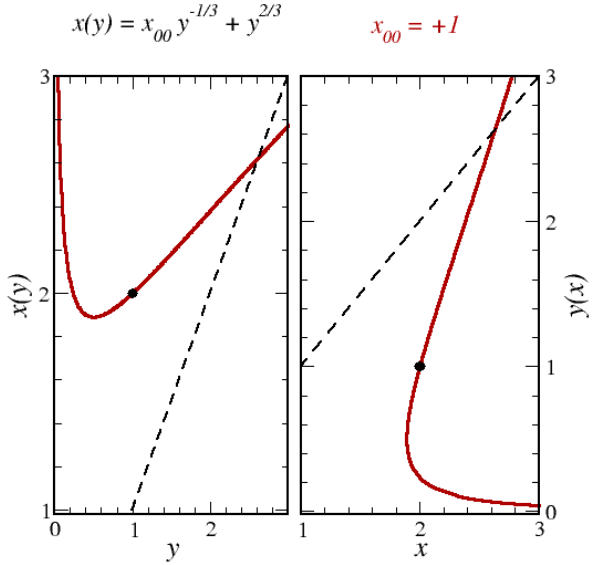
la ligne en tirets représente la fonction $x = y$



si condition initiale $\underline{x(1) = 2} \Rightarrow x_{00} = +1$

la fonction $x = x(y)$ n'est pas invertible

☞ des fonctions réciproques n'existent que si le domaine de définition de $x = x(y)$ est convenablement restreint



Comment résoudre pratiquement des équadiffs ?

1. demander à quelqu'un (p.ex. à un ami)

2. tirer la solution d'un livre — il y en a des excellents !

- E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, 2 vols. 9e éd., Teubner (Stuttgart 1977)
- A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev, *Handbook of Ordinary Differential Equations*, 3e éd., CRC Press (London 2018)

contiennent des longs tableaux avec solutions explicites des équadiffs, et résultats généraux

3. faire appel aux systèmes de calcul symbolique (`Mathematica`, `Maple`, ...)

⚠ **important**: maintenir un esprit éveillé et critique si une solution proposée peut réellement être correcte ! Il est toujours une bonne idée de vérifier explicitement si une solution proposée résout en vérité l'équadiff, et les conditions initiales, en question. Essayez de visualiser le résultat trouvé.

○ La maîtrise de quelques techniques élémentaires permet de vérifier un certain nombre de résultats soi-même.

○ Enfin, la représentation analytique d'une solution n'est pas toujours aussi utile qu'on peut espérer, et souvent on s'intéresse plutôt au comportement qualitatif des solutions.
⇒ **intérêt des méthodes numériques**

⚠ on se trompe beaucoup plus vite qu'on ne le croit !

un peu de vocabulaire fr-all/*etwas dt-frz Vokabular*

Anfangsbedingung, *f*	condition initiale, *f*
Randbedingung, *f*	condition de bord, *f*
Anfangswertproblem, *n*	problème à valeurs initiales, *m*
Trennung (Separation) der Variablen, *f*	séparation de variables, *f*
(nicht) separierbar	(non) séparable
Zweck, *m*	propos, *m*
raten	deviner
glatt	lisse
Partialbruchzerlegung, *f*	décomposition en fractions, *f*
Variation der Konstanten, *f*	variation de la constante, *f*
es klappt ! es funktioniert !	ça marche !
Kontrollparameter, *m*	paramètre de contrôle, *m*
Verzweigung, *f*	bifurcation, *f*
komplexe Zahl, *f*	nombre complexe, *m*
reelle Zahl, *f*	nombre réel, *m*
Formel, *f* (z.B. Euler'sche Formel)	formule, *f* (p.ex. formule d'Euler)
sich irren; sich täuschen	se tromper
täuschen; jmdn betrügen	tricher; tromper qq'un

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*

3. Souvent, on a aussi à faire à des équations du second ordre. Résolvez les équations suivantes:

$$\begin{aligned} &a) \quad y'' - 9y = 0 \ , \quad b) \ \ y'' + 2y' + 2y = 0 \\ &c) \quad y'' + 5y' + y = 0 \ , \quad d) \ \ y'' - 6y' + 9y = 0 \\ &e) \quad y'' + 2y' - 2y = 0 \ , \quad f) \ \ y'' + y' = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

où partout $y = y(x)$. Combien de constantes faut-il encore déterminer ?
<u>Indication:</u> un ansatz exponentiel de forme $y(x) = Ae^{\omega x}$ fera des miracles ...

Solution de l'exercice 3:

• Il s'agit des équadiffs du second ordre. Il faut effectuer deux intégrations, ce qui produit deux constantes d'intégration. Chaque équadiff a donc deux solutions indépendantes.

Solution de l'exercice 3:

• Il s'agit des équadiffs du second ordre. Il faut effectuer deux intégrations, ce qui produit deux constantes d'intégration. Chaque équadiff a donc deux solutions indépendantes.

• De plus, ces équadiffs sont linéaires et homogènes. Par conséquent, si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions indépendantes, la solution générale s'écrit $y_{\text{gén.}}(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$, où α_1, α_2 sont des constantes arbitraires.

Solution de l'exercice 3:

• Il s'agit des équadiffs du second ordre. Il faut effectuer deux intégrations, ce qui produit deux constantes d'intégration. Chaque équadiff a donc deux solutions indépendantes.

• De plus, ces équadiffs sont linéaires et homogènes. Par conséquent, si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions indépendantes, la solution générale s'écrit $y_{\text{gén.}}(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$, où α_1, α_2 sont des constantes arbitraires.

• Finalement, ce sont des équadiffs avec des coéfficients constants. Ceci permet de trouver les deux solutions indépendants de base à l'aide d'un **ansatz** simple:

$$y(x) = Ae^{\omega x} \tag{A}$$

Car ces équadiffs sont linéaires et homogènes, l'amplitude A constante reste indéterminée. En revanche, il faut trouver les valeurs admissibles de ω.

Solution de l'exercice 3:

• Il s'agit des équadiffs du second ordre. Il faut effectuer deux intégrations, ce qui produit deux constantes d'intégration. Chaque équadiff a donc deux solutions indépendantes.

• De plus, ces équadiffs sont linéaires et homogènes. Par conséquent, si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions indépendantes, la solution générale s'écrit $y_{\text{gén.}}(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$, où α_1, α_2 sont des constantes arbitraires.

• Finalement, ce sont des équadiffs avec des coéfficients constants. Ceci permet de trouver les deux solutions indépendants de base à l'aide d'un **ansatz** simple:

$$y(x) = Ae^{\omega x} \tag{A}$$

Car ces équadiffs sont linéaires et homogènes, l'amplitude A constante reste indéterminée. En revanche, il faut trouver les valeurs admissibles de ω.

a) $y''(x) - 9y(x) = 0$

Solution de l'exercice 3:

• Il s'agit des équadiffs du second ordre. Il faut effectuer deux intégrations, ce qui produit deux constantes d'intégration. Chaque équadiff a donc deux solutions indépendantes.

• De plus, ces équadiffs sont linéaires et homogènes. Par conséquent, si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions indépendantes, la solution générale s'écrit $y_{\text{gén.}}(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$, où α_1, α_2 sont des constantes arbitraires.

• Finalement, ce sont des équadiffs avec des coéfficients constants. Ceci permet de trouver les deux solutions indépendants de base à l'aide d'un **ansatz** simple:

$$y(x) = Ae^{\omega x} \tag{A}$$

Car ces équadiffs sont linéaires et homogènes, l'amplitude A constante reste indéterminée. En revanche, il faut trouver les valeurs admissibles de ω.

a) $y''(x) - 9y(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 Ae^{\omega x} - 9Ae^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm 3$$

on trouve donc bien deux solutions indépendantes, qui sont $y_1(x) = e^{+3x}$ et $y_2(x) = e^{-3x}$.

Solution de l'exercice 3:

• Il s'agit des équadiffs du second ordre. Il faut effectuer deux intégrations, ce qui produit deux constantes d'intégration. Chaque équadiff a donc deux solutions indépendantes.

• De plus, ces équadiffs sont linéaires et homogènes. Par conséquent, si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions indépendantes, la solution générale s'écrit $y_{\text{gén.}}(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$, où α_1, α_2 sont des constantes arbitraires.

• Finalement, ce sont des équadiffs avec des coéfficients constants. Ceci permet de trouver les deux solutions indépendants de base à l'aide d'un **ansatz** simple:

$$y(x) = Ae^{\omega x} \tag{A}$$

Car ces équadiffs sont linéaires et homogènes, l'amplitude A constante reste indéterminée. En revanche, il faut trouver les valeurs admissibles de ω.

a) $y''(x) - 9y(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 Ae^{\omega x} - 9Ae^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm 3$$

on trouve donc bien deux solutions indépendantes, qui sont $y_1(x) = e^{+3x}$ et $y_2(x) = e^{-3x}$. La solution générale s'écrit

$$\boxed{y(x) = \alpha_1\, e^{3x} + \alpha_2\, e^{-3x}}$$

b) $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$

b) $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 A e^{\omega x} + 2\omega A e^{\omega x} + 2A e^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 + 2\omega + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega+1)^2 - 1 + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (\omega+1)^2 - \sqrt{-1}^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \omega = -1 \pm \mathrm{i}$$

où $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$ est l'**unité imaginaire**.

[En physique, on a intérêt à travailler systématiquement avec des nombres complexes, ce qui permet souvent des présentations plus compactes et plus simples.

Définition: *Un* **nombre complexe** $z = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}$ *est une paire de nombres réels* $a, b \in \mathbb{R}$, *où formellement* $\mathrm{i}^2 = -1$.

Mathématiquement, toutes les règles de calcul 'habituelles' restent valables en $\mathbb{C}$. De plus,

formule d'Euler, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x}$

Toute équation quadratique $az^2 + bz + c = 0$ a exactement deux solutions complexes z_1, z_2.]

Les deux solutions indépendantes sont $y_1(x) = e^{(-1+\mathrm{i})x} = e^{-x}(\cos x + \mathrm{i} \sin x)$ et $y_2(x) = e^{(-1-\mathrm{i})x} = e^{-x}(\cos x - \mathrm{i} \sin x)$.

b) $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 A e^{\omega x} + 2\omega A e^{\omega x} + 2A e^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 + 2\omega + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega+1)^2 - 1 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\omega+1)^2 - \sqrt{-1}^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \omega = -1 \pm \mathrm{i}$$

où $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$ est l'**unité imaginaire**.

[En physique, on a intérêt à travailler systématiquement avec des nombres complexes, ce qui permet souvent des présentations plus compactes et plus simples.

Définition: *Un* **nombre complexe** $z = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}$ *est une paire de nombres réels* $a, b \in \mathbb{R}$, *où formellement* $\mathrm{i}^2 = -1$.

Mathématiquement, toutes les règles de calcul 'habituelles' restent valables en $\mathbb{C}$. De plus,

formule d'Euler, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x}$

Toute équation quadratique $az^2 + bz + c = 0$ a exactement deux solutions complexes z_1, z_2.]

Les deux solutions indépendantes sont $y_1(x) = e^{(-1+\mathrm{i})x} = e^{-x}(\cos x + \mathrm{i} \sin x)$ et $y_2(x) = e^{(-1-\mathrm{i})x} = e^{-x}(\cos x - \mathrm{i} \sin x)$. La solution générale s'écrit

$$\boxed{y(x) = \alpha_1\, e^{(-1+\mathrm{i})x} + \alpha_2\, e^{(-1-\mathrm{i})x} = e^{-x}\Big(A_1 \cos x + A_2 \sin x\Big)}$$

c) $y''(x) + 5y'(x) + y(x) = 0$

c) $y''(x) + 5y'(x) + y(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 A e^{\omega x} + 5\omega A e^{\omega x} + A e^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 + 5\omega + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\omega + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Les deux solutions indépendantes sont $y_1(x) = e^{(-5+\sqrt{21})x/2}$ et $y_2(x) = e^{(-5-\sqrt{21})x/2}$.

c) $y''(x) + 5y'(x) + y(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 A e^{\omega x} + 5\omega A e^{\omega x} + A e^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 + 5\omega + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\omega + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Les deux solutions indépendantes sont $y_1(x) = e^{(-5+\sqrt{21})x/2}$ et $y_2(x) = e^{(-5-\sqrt{21})x/2}$. La solution générale s'écrit

$$\boxed{y(x) = \alpha_1\, e^{(-5+\sqrt{21})x/2} + \alpha_2\, e^{(-5-\sqrt{21})x/2}}$$

d) $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$

d) $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 A e^{\omega x} + 6\omega A e^{\omega x} + 9 A e^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 + 6\omega + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega + 3)^2 - 9 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = -3 \quad \text{solution double}$$

On ne trouve ainsi qu'une seule solution indépendante $y_1(x) = e^{-3x}$.

d) $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 A e^{\omega x} + 6\omega A e^{\omega x} + 9 A e^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 + 6\omega + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega + 3)^2 - 9 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = -3 \quad \text{solution double}$$

On ne trouve ainsi qu'une seule solution indépendante $y_1(x) = e^{-3x}$.

Afin de trouver une seconde, on peut faire l'ansatz $y(x) = e^{-3x} g(x)$, avec $g = g(x)$ à déterminer.

d) $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 A e^{\omega x} + 6\omega A e^{\omega x} + 9 A e^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 + 6\omega + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega+3)^2 - 9 + 9 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \omega = -3 \quad \text{solution double}$$

On ne trouve ainsi qu'une seule solution indépendante $y_1(x) = e^{-3x}$.

Afin de trouver une seconde, on peut faire l'ansatz $y(x) = e^{-3x} g(x)$, avec $g = g(x)$ à déterminer. Car $y'(x) = e^{-3x}\left(-3g + g'\right)$ et $y''(x) = e^{-3x}\left(9g - 6g' + g''\right)$, on obtient en injectant dans l'équadiff

$$e^{-3x} g(x) \underbrace{\left(9 - 6 \cdot 3 + 9\right)}_{=0} + e^{-3x} g'(x) \underbrace{\left(-6 + 6\right)}_{=0} + e^{-3x} g''(x) \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad g''(x) = 0$$

ce qui implique $g(x) = ax + b$. La seconde solution indépendente est donc $y_2(x) = x\, e^{-3x}$.

La solution générale s'écrit

$$\boxed{y(x) = \alpha_1\, e^{-3x} + \alpha_2\, x\, e^{-3x}}$$

e) $y''(x) + 2y'(x) - 2y(x) = 0$

e) $y''(x) + 2y'(x) - 2y(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 A e^{\omega x} + 2\omega A e^{\omega x} - 2A e^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 + 2\omega - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega+1)^2 - 1 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\omega+1)^2 - \sqrt{3}^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \omega = -1 \pm \sqrt{3}$$

Les deux solutions indépendantes sont $y_1(x) = e^{(-1+\sqrt{3})x}$ et $y_2(x) = e^{(-1-\sqrt{3})x}$.

e) $y''(x) + 2y'(x) - 2y(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 A e^{\omega x} + 2\omega A e^{\omega x} - 2A e^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 + 2\omega - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega+1)^2 - 1 - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (\omega+1)^2 - \sqrt{3}^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \omega = -1 \pm \sqrt{3}$$

Les deux solutions indépendantes sont $y_1(x) = e^{(-1+\sqrt{3})x}$ et $y_2(x) = e^{(-1-\sqrt{3})x}$. La solution générale s'écrit

$$\boxed{y(x) = \alpha_1\, e^{(-1+\sqrt{3})x} + \alpha_2\, e^{(-1-\sqrt{3})x} = e^{-x}\left(A_1 \cosh\left(\sqrt{3}\,x\right) + A_2 \sinh\left(\sqrt{3}\,x\right)\right)}$$

à l'aide des fonctions hyperboliques $\cosh x$ et $\sinh x$.

f) $y''(x) + y'(x) = 0$

f) $y''(x) + y'(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 A e^{\omega x} + \omega A e^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 + \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = -1 \text{ ou } \omega = 0$$

Les deux solutions indépendantes sont $y_1(x) = e^{-x}$ et $y_2(x) = 1$.

f) $y''(x) + y'(x) = 0$

On injecte l'ansatz (A) et on trouve l'équation suivante (rappelons-nous que $e^{\omega x} \neq 0$)

$$\omega^2 A e^{\omega x} + \omega A e^{\omega x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 + \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = -1 \text{ ou } \omega = 0$$

Les deux solutions indépendantes sont $y_1(x) = e^{-x}$ et $y_2(x) = 1$. La solution générale s'écrit

$$\boxed{y(x) = \alpha_1 \, e^{-x} + \alpha_2}$$

4. Les atomes d'un un échantillon d'un matériau radioactif (connaissez-vous des exemples des substances radioactives ?) se désintègrent spontanément de sorte que le taux de décroissance est proportionnel au nombre total d'atomes encore présents. Établissez une équation différentielle pour le nombre $N(t)$ d'atomes à l'instant t et trouvez-en les solutions.

5. Il est bien connu que dans la société (admettons un nombre N d'individus constant) les informations véritables se transmettent toujours de bouche à l'oreille, *vulgo* des rumeurs, et bien entendu dans les coins sombres des couloirs. Soit $I(t)$ le nombre d'individus qui au temps t sont informés sur la dernière rumeur (mettez ici la dernière nouvelle hilariante/époustouflante/écœurante/édifiante de votre choix). Admettons que chacun des informés a par unité de temps k contacts avec tous les membres de la population qu'il utilise pour parler de la rumeur. Soit q la fraction des individus non-informés.

Déduisez une équation différentielle qui décrit $I(t)$ et obtenez ses solutions.

6. Une particule de masse m peut se déplacer le long d'une axe (horizontale). Elle est attachée à un ressort de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée à l'orgine. Faites un dessin du système. Utilisez la conservation de l'énergie totale E de ce système mécanique afin d'écrire une équation différentielle pour le mouvement $x(t)$ de la particule. Essayez d'en trouver les solutions.

Solution:

un peu de vocabulaire fr-all/*etwas dt-frz Vokabular*

Material, *n*	matériau, *m*
Materie, *f*	matière, *f*
Probe, *f*	échantillon, *m*
zerfallen	se désintégrer
proportional	proportionnel
abnehmen; zunehmen	décroître; croître
Zunahme, *f*; Abnahme, *f*	croissance, *f*; décroissance, *f*
Gerücht, *n*	rumeur, *f*
Mundpropaganda, *f* mündlich überliefert	de bouche à l'oreille
Teilchen, *n*	particule, *f*
Feder, *f*	ressort, *m*
Steifigkeit, *f*	raideur, *f*
Erhaltung, *f*	conservation, *f*
Erhaltungssatz, *m*	loi de conservation, *f*

le genre grammatical (*m*,*f*) des substantifs est indiqué/*das grammatikalische Geschlecht (m,f,n) der Substantive ist angegeben*