ÉLÉMENTS DE DYNAMIQUE LAGRANGIENNE ET HAMILTONIENNE

État actuel du polycopié

Chapitre	**1**	**INTRODUCTION AUX PROBLÈMES À *N* CORPS ……**	***1***
	2	**THÉORÈMES CLASSIQUES DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE ……**	***14***
	3	**LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE ……**	***32***
	4	**THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE EN COORDONNÉES GÉNÉRALISÉES ……**	***50***
	5	**PRINCIPE DE D'ALEMBERT ……**	***63***
	6	**PRINCIPE DE HAMILTON ……**	***83***
	7	**FORMALISME LAGRANGIEN ……**	***103***
	8	**DYNAMIQUE HAMILTONIENNE ……**	***114***
	8bis	**ESPACE DES PHASES – ESPACE DES ÉTATS ……**	***134***
	9	**TRANFORMATIONS CANONIQUES ……**	***148***
	10	**THÉORIE DE HAMILTON-JACOBI ……**	***164***
	11	**CROCHETS DE POISSON ……**	***183***
	12	**VARIABLES ANGLE-ACTION ……**	***195***
	bibliographie ……		***209***

T. Gourieux □ 2016

Université de Lorraine/Nancy

Chapitre 1

INTRODUCTION AUX PROBLÈMES À N CORPS

Après avoir introduit les conditions typiques d'un problème à N corps, on définit la notion de degrés de liberté d'un tel système en rapport avec les éventuelles liaisons que celui-ci peut se voir imposer. On discute ensuite des forces qui sont associées à ces liaisons et de la définition de ces forces qui est adoptée ici. On introduit enfin la notion de coordonnées généralisées et d'espace de(s) configuration(s) du système.

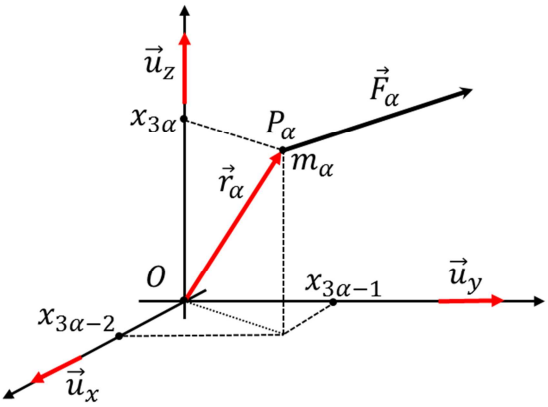
1. Problème à N corps. Introduction et notations. On considère une collection d'objets assimilable à un ensemble de N points matériels P_α, $\alpha = 1,2,\dots,N$, $N \geq 1$. Chaque point matériel P_α se meut sous l'effet d'un ensemble de forces aux origines diverses dont la résultante est dénommée $\vec{F}_\alpha$. Le problème à N corps consiste alors à déterminer la trajectoire suivie par chacun de ces points matériels au cours du temps, par rapport à un certain référentiel $\mathcal{R}\{O, xyz\}$ considéré comme fixe. Il est entendu dans ce problème que les positions et vitesses de chacun des points matériels qui constituent le système sont connues à une date t_0 souvent prise pour origine des temps.

Le choix du référentiel est arbitraire mais il est commode d'adopter *a priori* un référentiel galiléen. Chaque point

matériel P_α est repéré au sein de ce référentiel par un vecteur-position :

$$\vec{r}_\alpha := \overrightarrow{OP_\alpha} = x_{r=3\alpha-2}\,\vec{u}_x + x_{r=3\alpha-1}\,\vec{u}_y + x_{r=3\alpha}\,\vec{u}_z$$

de sorte que les x_r, $r = 1,2,\dots,3N$, forment l'ensemble de toutes les coordonnées cartésiennes des N points matériels du système. On a coutume d'appeler ce jeu de coordonnées *les paramètres (ou coordonnées) primaires du système.*



On écrira de même les vecteurs-vitesse et -accélération de chacun de ces points matériels :

$$\vec{v}_\alpha := \left.\frac{d\overrightarrow{OP_\alpha}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}_{r=3\alpha-2}\,\vec{u}_x + \dot{x}_{r=3\alpha-1}\,\vec{u}_y + \dot{x}_{r=3\alpha}\,\vec{u}_z$$

$$\vec{a}_\alpha := \left.\frac{d\vec{v}_\alpha}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \ddot{x}_{r=3\alpha-2}\,\vec{u}_x + \ddot{x}_{r=3\alpha-1}\,\vec{u}_y + \ddot{x}_{r=3\alpha}\,\vec{u}_z$$

Comme indiqué, ces quantités sont estimées par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}\{O, xyz\}$.

Les composantes cartésiennes des forces $\vec{F}_\alpha$, $\alpha = 1,2,\dots,N$, seront notées F_r , $r = 1,2,\dots,3N$, au sens où :

$$\vec{F}_\alpha = F_{r=3\alpha-2}\,\vec{u}_x + F_{r=3\alpha-1}\,\vec{u}_y + F_{r=3\alpha}\,\vec{u}_z$$

Enfin, chaque point matériel P_α possède une masse m_α que l'on conviendra de noter également : $m_{r=3\alpha-2} = m_{r=3\alpha-1} = m_{r=3\alpha}$, $\alpha = 1,2,\dots,N$, $r = 1,2,\dots,3N$, de façon à pouvoir lister ces masses à notre convenance, soit par l'indice grec α soit par l'indice latin r, en ayant en tête la signification différente de ces deux types d'indiciation.

Avec ces notations, le mouvement de chaque point matériel P_α est régi par la seconde loi de Newton qui s'écrit :

$$m_\alpha \, \vec{a}_\alpha \doteq \vec{F}_\alpha$$

En général, les forces $\vec{F}_\alpha$ sont des données du problème et peuvent dépendre de la position et de la vitesse de la particule α ainsi que des positions et des vitesses des autres particules du système, de même que du temps t, ainsi que d'autres paramètres comme par exemple une intensité caractéristique de champ électrique, une fréquence de vibration, la constante de gravitation, etc... Ce que l'on résume par :

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha\left(\vec{r}_\beta, \vec{v}_\beta, t, A_\mu\right)$$

où $\beta = 1,2,\dots,N$ et où $\mu = 1,2,\dots,u$, si u est le nombre de paramètres nécessaires pour caractériser complétement les origines de $\vec{F}_\alpha$.

Ainsi, déterminer la trajectoire $\vec{r}_\alpha(t)$ suivie par chacun des points matériels P_α sous l'effet de ces forces revient techniquement à résoudre un système de N équations différentielles vectorielles couplées, du second ordre, et généralement non linéaires. Ce système se décline

naturellement en un système de $3N$ équations différentielles scalaires du second ordre aux $3N$ inconnues x_r qui s'écrit, eu égard aux notations adoptées et en ignorant les paramètres A_μ $(r, s = 1,2, \dots ,3N)$:

$$m_r \, \ddot{x}_r \doteq F_r(x_s, \dot{x}_s, t)$$

2. Liaisons et degrés de liberté du système. Forces de liaison. Dans le problème à N corps tel qu'il vient d'être formulé, les inconnues sont les x_r qu'il s'agit de déterminer en fonction du temps. Leur nombre est $n_\ell = 3N$. Il n'est pas rare toutefois que le système étudié soit tel que des relations sont données à l'avance entre certaines coordonnées et/ou leurs dérivées temporelles, ou encore que certaines coordonnées associées à ce système soient déjà connues en fonction du temps. On dit alors que le système est soumis à des *liaisons* ou *assujettissements*.

Liaisons - L'existence de liaisons préalables a pour conséquence de diminuer le nombre réel d'inconnues à déterminer, parfois considérablement. Par exemple, si les N points matériels forment un objet solide indéformable qui évolue dans l'espace, seules 6 coordonnées parmi les $3N$ sont réellement nécessaires pour situer la position et l'orientation de cet objet solide dans l'espace, toutes les autres coordonnées pouvant s'exprimer en fonction de ces 6 variables indépendantes. On dit alors que le nombre de degrés de liberté du système est $n_\ell = 6$.

Définition : le nombre n_ℓ de *degrés de liberté d'un système* est défini comme le nombre minimum de variables indépendantes nécessaires à la *description complète* de ce système ; une description complète signifiant que le mouvement de chacun des points matériels composant le système peut être décrit à l'aide seulement de ces n_ℓ variables déterminées en fonction du temps.

Lorsqu'il n'existe aucune liaison donnée à l'avance, on dit que le système est *libre* ; le nombre de degrés de liberté d'un système libre est : $n_\ell = 3N$.

Une liaison impose donc une ou plusieurs relations entre les coordonnées (primaires ou tout autre jeu de variables que l'on aura choisi) et/ou leurs dérivées, le temps pouvant aussi intervenir explicitement dans ces relations. Elles s'expriment soit par des égalités soit par des inégalités qui doivent être respectées tout au long de l'intervalle de temps durant lequel on examine le mouvement du système. En se limitant aux cas où seules des égalités surviennent, on peut conclure que s'il existe K équations de liaison (une liaison pouvant donner lieu à plusieurs équations), alors le nombre de degrés de liberté du système à l'étude sera : $n_\ell = 3N - K$.

Une équation de liaison peut toujours s'écrire sous la forme ($r = 1, \dots, 3N$) :

$$f(x_r, \dot{x}_r, t) = 0$$

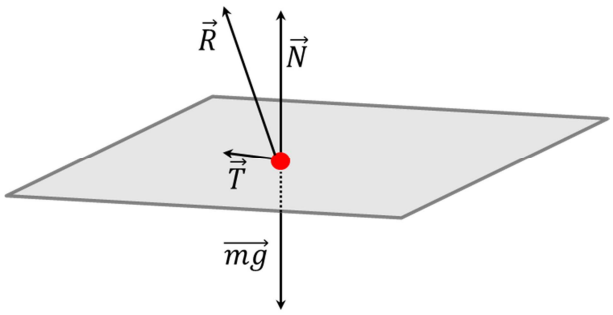
On dit de cette équation de liaison qu'elle est *bilatérale* (une inégalité du type $f(x_r, \dot{x}_r, t) \geq 0$ est qualifiée d'*unilatérale*). Si le temps t apparaît explicitement dans l'équation de liaison, elle est dite *rhéonome* ; sinon elle est dite *scléronome*. Si au moins un $\dot{x}_r$ y est présent, l'équation de liaison est dite *cinématique* ou encore *non-holonome*. Dans le cas contraire l'équation de liaison est dite *géométrique* ou bien *holonome*. Certaines équations de liaison *a priori* non-holonomes peuvent se ramener à des équations holonomes par simple intégration, ce qui induit une classification des liaisons plus subtile que celle qui est ébauchée ici.

Forces de liaison - Les forces qui concourent au maintien des liaisons, et qui sont bien sûr incluses dans les $\vec{F}_\alpha$, ne sont pas à proprement parler des données du problème : elles sont introduites dans le bilan des forces précisément pour rendre compte des liaisons imposées et font office d'inconnues auxiliaires. Ces forces sont donc le plus souvent mal connues et on les détermine en fait grâce aux équations de Newton assorties des relations de liaison auxquelles elles se réfèrent.

> ***Définition*** : on appelle *force(s) de liaison* associée(s) à une liaison donnée la ou les forces qui ne servent qu'à maintenir cette liaison tout au long du mouvement considéré.

Cette définition a pour conséquence que le travail réalisé par de telles forces est toujours nul pour des déplacements du système respectant la liaison en question. On y reviendra au chapitre 5.

Précision - Il faut signaler qu'avec cette définition, une force de liaison ne s'identifie pas à proprement parler avec ce que l'on a coutume d'appeler « force de réaction ». En effet, en se référant à l'exemple simple d'un point matériel en mouvement sur une surface plane, l'usage est souvent d'appeler force de réaction ($\vec{R}$ sur le dessin) un ensemble de deux forces : la première, perpendiculaire à la surface ($\vec{N}$ sur le dessin), et la seconde, tangentielle à la surface ($\vec{T}$ sur le dessin) et dirigée en sens contraire du mouvement, qui est une force de frottement solide induite par la liaison.



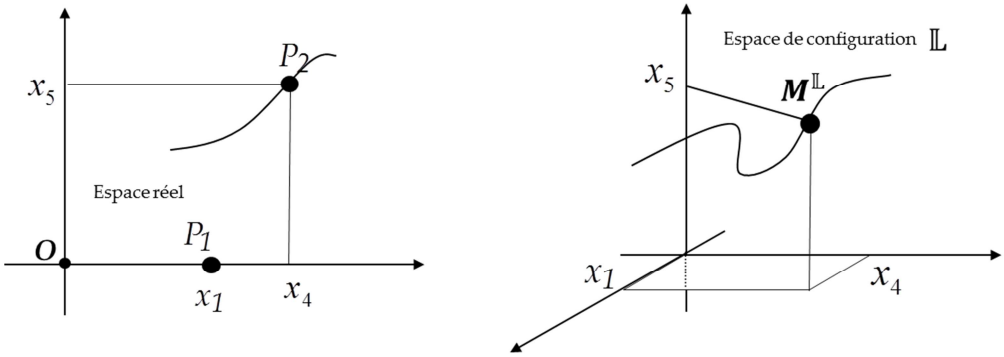
On a bien sûr : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$, et on parle de liaison parfaite si $\vec{T} = \vec{0}$ et de liaison passive si $\vec{T} \neq \vec{0}$. $\vec{R}$ se détermine alors à l'aide des équations de Newton et de l'équation de la liaison, complétées par les lois de Coulomb concernant le frottement solide où $|\vec{N}|$ et $|\vec{T}|$ sont reliées entre elles via un coefficient de frottement.
En fait, la définition précédente d'une force de liaison implique de ne l'identifier ici qu'à la seule force $\vec{N}$ et d'intégrer $\vec{T}$ dans les autres forces qui agissent sur le point matériel (les forces agissantes du chapitre 5).

La dynamique élaborée par D'Alembert, Lagrange, Hamilton, Jacobi, etc..., au cours des XVIIIème et XIXème siècles permet soit de s'affranchir des forces de liaison si l'on ne souhaite pas

les connaître et ne s'intéresser qu'aux mouvements possibles du système, soit de les prendre en compte si on a besoin de les connaître.

3. Espace des configurations du système. Coordonnées généralisées. On convient avec Lagrange (1788) de se représenter le mouvement des N points matériels non pas dans l'espace réel mais à l'aide du mouvement d'un seul point $M^{\mathbb{L}}$, appelé *point représentatif du système*, qui évolue dans un espace à n_ℓ dimensions appelé *espace* $\mathbb{L}$ *de(s) configuration(s) du système*.
La dimension de l'espace $\mathbb{L}$, égale au nombre n_ℓ de degrés de liberté du système, dépend donc des liaisons que le système peut se voir imposer lors de sa modélisation. Cependant, il peut arriver que l'on ne souhaite pas éliminer une coordonnée (primaire ou autre) concernée par une équation de liaison, soit en raison de la complexité mathématique que cela entraînerait, soit parce que cela n'est pas possible, soit par convenance. Il faut alors garder cette coordonnée dans le jeu de variables utilisé. Ce faisant, ce jeu de $n_\ell + 1$ variables n'est plus constitué de variables indépendantes et on le qualifie de *surabondant*. On peut lui associer de façon impropre un espace de configuration $\mathbb{L}'$ dont la dimension est alors supérieure au nombre de degrés de liberté. Le mouvement du point représentatif du système se réalise ainsi dans un sous-espace de $\mathbb{L}'$ déterminé par l'équation de liaison. C'est ce sous-espace qui constitue l'espace $\mathbb{L}$ des configurations du système proprement dit.

A titre d'exemple on peut considérer deux points matériels P_1et P_2 dont le premier est assujetti à se mouvoir le long de l'axe Ox et le second dans le plan xOy. Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées cartésiennes du point P_1 selon les axes du référentiel galiléen $\mathcal{R}\{O, xyz\}$ et (x_4, x_5, x_6) celles du point P_2. La liaison à laquelle P_1 est assujetti s'exprime par : $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$; tandis que celle que subit le point P_2 impose : $x_6 = 0$. Le nombre de degrés de liberté de ce système est donc $n_\ell = 3 \times 2 - 2 - 1 = 3$ et c'est la dimension de l'espace de configuration $\mathbb{L}$ qui lui est associé. Le point représentatif $M^{\mathbb{L}}$ pourra être affecté des coordonnées (x_1, x_4, x_5).



Le mouvement du point $M^{\mathbb{L}}$ le long d'une certaine trajectoire de l'espace $\mathbb{L}$ reflète ainsi les mouvements de chaque particule du système au cours du temps.

On aurait pu tout aussi bien choisir un espace de configuration impropre, $\mathbb{L}'$, de dimension 6 associé au jeu de variables surabondant $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ assimilé aux coordonnées d'un point représentatif du système dans cet espace. Les mouvements de ce point compatibles avec les liaisons imposées évoluent alors dans le sous-espace de $\mathbb{L}'$ déterminé

par les 3 équations de liaison précédentes, c'est-à-dire bien sûr dans l'espace $\mathbb{L}$.

Coordonnées généralisées - Jusqu'à présent, il n'a été discuté que des coordonnées primaires des points matériels pour les situer dans l'espace par rapport au référentiel galiléen utilisé. Mais les variables employées pour localiser ainsi chaque point du système peuvent être de natures très diverses bien que les plus connues correspondent à des nombres associés à des distances ou à des angles. En outre, si la fonction première de ces variables est bien de localiser chaque point matériel du système, le processus peut s'avérer très indirect car il est lié aux éventuels changements de variables que le problème envisagé incite à opérer et aussi à l'existence de certaines variables dynamiques qui ont la propriété de rester constantes tout au long du mouvement (comme par exemple l'énergie mécanique dans certains cas). Nous verrons que ces « constantes du mouvement », qui prennent le nom *d'intégrales premières*, peuvent aussi être choisies en tant que coordonnées.

> ***Définition*** : On donne le nom de *coordonnées généralisées* à un jeu de n variables quelconques utilisé pour décrire les mouvements du système envisagé. Elles sont désignées par la lettre indicée : q_i, $i = 1,2, \dots, n$.

Si le système à l'étude est libre, alors les q_i sont forcément au nombre de $3N$ qui est le nombre de degrés de liberté du

système : $i = 1,2, \dots, n = n_\ell = 3N$. Les q_i forment donc un jeu de variables indépendantes au même titre que les x_r qui peuvent d'ailleurs être pris pour les q_i.

Si le système admet K équations de liaison, alors on peut adopter l'une ou l'autre des deux attitudes suivantes : la première attitude consiste à prendre en compte les K équations de liaison lors du passage des x_r aux q_i. De la sorte, le nombre de coordonnées généralisées q_i est égal au nombre de degrés de liberté du système : $i = 1,2, \dots, n = n_\ell = 3N - K$ et forme un jeu de variables indépendantes, ce que ne sont pas les x_r, au nombre de $3N$. Un tel choix va permettre de s'affranchir des forces qui ne concourent qu'à maintenir les liaisons auxquelles est soumis le système. La dynamique de Lagrange fournira alors les équations du mouvement sans aucune information sur ces forces de liaison.
La seconde attitude est de convenir de ne prendre en compte, lors du passage des x_r aux q_i, qu'une partie seulement, disons K', des K équations de liaison. Dans ce cas, les q_i sont au nombre de $n = 3N - K'$; elles forment un jeu de variables surabondant et ne sont donc pas indépendantes entre elles. n n'est plus le nombre n_ℓ de degrés de liberté du système puisque : $n = 3N - K' = n_\ell + K - K'$. Avec cette seconde option, la dynamique de Lagrange fournira non seulement les équations du mouvement, mais également les valeurs des forces de liaison associées aux $K - K'$ équations de liaison non prises en compte.

Conventions sur les indices - Il y aura finalement trois types d'indices :

• Des indices grecs α, β qui courent de 1 à N et qui sont attachés à chacun des N points matériels constituant le système à l'étude.

• Des indices latins r, s qui courent de 1 à $3N$ servant essentiellement aux coordonnées et/ou composantes cartésiennes des quantités cinématiques et dynamiques attachées à chacun des points matériels.

• Des indices latins i, j, k qui courent de 1 à n et qui sont réservés aux coordonnées généralisées ainsi qu'à toute quantité cinématique ou dynamique qui leur sera attachée. Le plus souvent on a $n = n_\ell = 3N - K$, où K est le nombre d'équations de liaisons imposées au système ; l'ensemble des q_i forme alors un jeu de variables indépendantes. Mais on peut aussi avoir $n = 3N - K' = n_\ell + K - K'$ où K' est le nombre d'équations de liaisons prises en compte lors du passage des x_r aux q_i ; dans ce dernier cas, l'ensemble des q_i forme un jeu de variables surabondant.

Exercices

Exercice : en cosmologie classique, le problème à N corps consiste en l'étude du mouvement de N corps célestes assimilés à des points matériels que l'on suppose évoluer seuls dans l'univers et qui interagissent entre eux via la force de gravitation newtonienne. Ecrire ces forces ainsi que les équations du mouvement à l'aide des coordonnées primaires du système dans le cas du problème à 2 corps en utilisant les notations du cours. Faire de même pour le problème à 3 corps.

Exercice : on considère le problème classique du pendule plan où la masselotte accrochée à un fil rigide et sans masse est assimilée à un point matériel. Utiliser les coordonnées primaires du système et écrire l'équation de liaison à laquelle est soumise la masselotte. Combien y a-t-il de degrés de liberté dans ce problème ? Identifier les forces en présence et écrire les équations du mouvement.

Exercice : 2 points matériels situés dans un plan sont liés entre eux par une tige rigide sans masse. Ecrire l'équation de cette liaison et représenter les forces de liaison qui lui sont associées.

Exercice : N points matériels forment un corps solide rigide libre de se déplacer dans l'espace. Démontrer que ce système ne possède que 6 degrés de liberté. Indication : on pourra construire pas à pas le corps solide en tenant compte des liaisons auxquelles il est soumis.

Exercice : Reprendre le problème du pendule plan en adoptant le système de coordonnées polaires $q_1 = r$, $q_2 = \theta$. Résoudre les équations du mouvement lorsque q_2 est supposé constamment petit devant 1 et en déduire la valeur de la tension du fil.

Exercice : Reprendre le problème cosmologique à 2 corps en adoptant le système de coordonnées sphériques pour chacun des deux corps.

Chapitre 2
(Complément de cours)

THÉORÈMES CLASSIQUES DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE

Les définitions et théorèmes de ce chapitre ne dépendent pas du nombre de degrés de liberté du système. Tous les calculs sont réalisés au sein du référentiel galiléen $\mathcal{R}\{O, xyz\}$. On démarre avec la définition du centre de masse et la distinction entre forces extérieures et forces intérieures au système pour aboutir au théorème du mouvement du centre de masse. Appliqué à un système isolé du reste de l'univers, le théorème énonce l'existence d'une intégrale première vectorielle qui s'identifie à sa quantité de mouvement totale.
L'étude se poursuit avec le théorème du moment cinétique. Cette quantité vectorielle s'avère être également une intégrale première lorsque le système est isolé du reste de l'univers et sous la condition expresse que les forces intérieures soient centrales.
On aborde ensuite l'aspect énergétique du problème à N corps avec le théorème de l'énergie cinétique et son équivalent différentiel exprimé sous forme de puissance instantanée. Lorsque toutes les forces du problème dérivent d'une fonction scalaire appelée fonction de force, le théorème de l'énergie cinétique débouche sur le théorème de l'énergie mécanique qui s'avère être une intégrale première scalaire.

1. Centre de masse. Soit M la masse totale du système constitué de N points matériels :

$$M := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha$$

Alors on définit le point G, *centre de masse* du système, par la relation :

$$\overrightarrow{OG} := \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \, \overrightarrow{OP_\alpha}$$

On montre facilement que le point O dans cette définition peut être un point géométrique quelconque bien que l'on choisisse le plus souvent (comme ici) le point origine du référentiel utilisé. On notera que si l'on remplace O par G, on obtient une propriété qui peut être prise aussi comme définition de ce point particulier :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \, \overrightarrow{GP_\alpha} = \vec{0}$$

G est aussi appelé *barycentre des masses* ou encore *centre d'inertie* du système.

2. Forces extérieures et forces intérieures. Parmi les forces qui s'exercent sur chacun des points matériels du système, il y a lieu de distinguer entre les forces dont l'origine est extérieure au système et les forces qui prennent leur source au sein même du système, c'est-à-dire les forces que les points

matériels du système considéré exercent entre eux. On écrira ainsi : $\overrightarrow{F_\alpha} = \vec{F}_{\alpha,ext} + \vec{F}_{\alpha,int}$ où $\vec{F}_{\alpha,ext}$ représente la résultante de toutes les forces extérieures que subit le point matériel P_α, et $\vec{F}_{\alpha,int}$ la résultante de toutes les forces intérieures que subit ce même point. Naturellement, cette distinction dépend de la façon dont on a défini le système, son intérieur et son extérieur.

On note $\vec{F}_{ext}$ la résultante de toutes les forces extérieures au système et $\vec{F}_{int}$ la résultante de toutes les forces intérieures :

$$\vec{F}_{ext} := \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,ext} \qquad \vec{F}_{int} := \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,int}$$

Comme le système n'est constitué que de points matériels, les $\vec{F}_{\alpha,int}$ s'expriment comme des sommes discrètes :

$$\vec{F}_{\alpha,int} = \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\beta\to\alpha}$$

où $\vec{F}_{\beta\to\alpha}$ représente la force qu'exerce le β-ième point matériel du système sur le α-ième, avec la convention : $\vec{F}_{\alpha\to\alpha} := \vec{0} \quad \forall\, \alpha \in \{1, \dots, N\}$. On a donc :

$$\vec{F}_{int} := \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,int} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\beta\to\alpha} = \vec{0}$$

La double somme est nulle en effet car les forces de la physique newtonienne obéissent au *principe de l'action et de la réaction* : $\vec{F}_{\beta\to\alpha} + \vec{F}_{\alpha\to\beta} = \vec{0} \quad \forall\, \alpha, \beta \in \{1, \dots, N\}$.

4. Théorème du mouvement du centre de masse. Si on applique le principe fondamental de la dynamique à chacun des points matériels appartenant au système et que l'on somme l'ensemble des équations vectorielles ainsi obtenues, il vient :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \, \overrightarrow{a_\alpha} \doteq \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{F_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[\vec{F}_{\alpha,ext} + \vec{F}_{\alpha,int}\right]$$

Les masses m_α sont des données indépendantes du temps, de sorte que le membre de gauche de ce résultat se réécrit sous la forme (d'après **1**) :

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \, \overrightarrow{r_\alpha} = M \, \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2}$$

Quant au membre de droite, il contient d'une part la résultante, $\vec{F}_{ext}$, de toutes les forces extérieures au système, et d'autre part la résultante, $\vec{F}_{int}$, de toutes les forces intérieures, qui est nulle. Il en résulte le théorème suivant (Huygens, 1654) :

> ***Théorème*** : Le centre de masse d'un système de points matériels adopte le même mouvement que celui d'un point matériel fictif auquel serait affecté la masse totale du système et sur lequel serait appliquée la résultante de toutes les forces extérieures au système :
>
> $$M \, \vec{a}(G) \doteq \vec{F}_{ext}$$

5. Conservation de la quantité de mouvement totale du système. Intégrales premières. Si le système est isolé du reste de l'univers, c'est-à-dire si aucune force extérieure n'agit sur ce système, alors $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et le théorème précédent a pour conséquence que le centre de masse réalise un mouvement rectiligne uniforme. En définissant la *quantité de mouvement* totale du système :

$$\vec{P} := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \, \overrightarrow{v_\alpha} = M \, \vec{v}(G)$$

on conclut que la quantité de mouvement totale d'un système de points matériels en interaction les uns avec les autres et isolés du reste de l'univers, est une grandeur dont la valeur ne change pas au cours du temps. On dit alors de $\vec{P}$ qu'elle est une intégrale première du problème à N corps considéré.

> ***Définition*** : On appelle *intégrale première*, toute grandeur dynamique $G := G(q_i, \dot{q}_i, t)$ dont la valeur reste constante au cours du temps :
>
> $$G(q_i, \dot{q}_i, t) \textit{ intégrale première} \iff dG/dt \doteq 0 \quad \forall t$$

Avec l'intégrale première $\vec{P}$, on a résolu une partie du problème à N corps puisque le vecteur $\overrightarrow{OG}$ est maintenant connu en fonction du temps : $\overrightarrow{OG}(t) = \vec{P}\, t/M + \overrightarrow{OG}(t_0)$ où $\vec{P}$ et $\overrightarrow{OG}(t_0)$ sont fonctions des conditions initiales au temps t_0 qui sont données. Comme $\overrightarrow{OG}$ est une combinaison linéaire des $\overrightarrow{r_\alpha}$, ce résultat signifie que l'un de ces $\overrightarrow{r_\alpha}$ s'exprime en fonction de tous les autres et d'une fonction connue du temps : on a

ainsi gagné 3 degrés de liberté et il ne reste plus que $n_\ell - 3$ inconnues à déterminer.

6. Théorème du moment cinétique d'un système de points matériels. On définit le *moment cinétique* total du système de points matériels calculé par rapport à un point A quelconque :

$$\vec{\sigma}(A) := \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge m_\alpha \overrightarrow{v_\alpha}$$

où le symbole $\wedge$ représente l'opération « produit vectoriel ». Souvent, le point A est en fait l'origine O du référentiel choisi ; on note alors : $\vec{\sigma}(O) := \vec{\sigma}$.

Si on effectue le produit vectoriel par $\overrightarrow{AP_\alpha}$ de chaque équation de Newton écrite pour chacun des points matériels P_α et que l'on somme l'ensemble, on obtient :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge m_\alpha \overrightarrow{a_\alpha} \doteq \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha,ext} + \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha,int}$$

On modifie les termes de cette expression de la façon suivante : tout d'abord, le membre de gauche peut s'exprimer en fonction de la dérivée temporelle du moment cinétique total. En effet :

$$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{r_\alpha} - \overrightarrow{OA}\right] \wedge m_\alpha \overrightarrow{v_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge m_\alpha \overrightarrow{a_\alpha}$$

soit, en appelant $\vec{v}(A) = d\overrightarrow{OA}/dt$ la vitesse du point A (toujours par rapport au référentiel $\mathcal{R}$) :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge m_\alpha \overrightarrow{a_\alpha} = \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} + \vec{v}(A) \wedge \vec{P}$$

où $\vec{P}$ est la quantité de mouvement totale du système définie au **4**.

Ensuite, le premier terme du membre de droite n'est rien d'autre que le moment de toutes les forces extérieures au système calculé par rapport au point A :

$$\vec{M}_{ext}(A) := \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha,ext}$$

Enfin, en utilisant le principe de l'action et de la réaction, le second terme du membre de droite, qui est le moment de toutes les forces intérieures au système, se réécrit (d'après **3** et après un calcul vectoriel élémentaire) :

$$\vec{M}_{int}(A) := \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge \vec{F}_{\beta\to\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} \overrightarrow{P_\beta P_\alpha} \wedge \vec{F}_{\beta\to\alpha}$$

où l'on observe que l'expression obtenue est indépendante du choix du point A et donc du référentiel utilisé : $\vec{M}_{int}(A) = \vec{M}_{int}\ \forall\ A$.

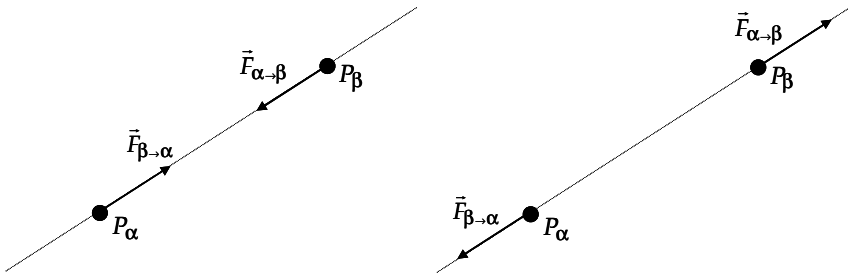
On obtient ainsi le ***théorème du moment cinétique*** pour un ensemble de points matériels :

$$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} \doteq \vec{M}_{ext}(A) + \vec{M}_{int} - \vec{v}(A) \wedge \vec{P}$$

quel que soit le point A utilisé. Cette forme très générale du théorème est peu exploitée : on lui adjoint souvent deux conditions supplémentaires. Premièrement, on fait le choix d'un point A fixe par rapport au référentiel galiléen, de sorte que $\vec{v}(A) = \vec{0}$, et le théorème s'énonce ainsi :

> La dérivée par rapport au temps du moment cinétique total d'un système de points matériels calculé par rapport à un point fixe quelconque est égale au moment résultant des forces extérieures et intérieures au système calculé par rapport à ce même point :
>
> $$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} \doteq \vec{M}_{ext}(A) + \vec{M}_{int}$$

Deuxièmement, on émet l'hypothèse forte que les forces intérieures existant entre chacun des points matériels du système sont de nature *centrale*, c'est-à-dire que ces forces sont dirigées le long des différentes droites qui joignent les différents points matériels entre eux.



Cette hypothèse, assortie du principe de l'action et de la réaction, ne laisse donc le choix qu'entre deux types

d'interactions possibles entre les points matériels : forces attractives et forces répulsives d'égales intensités. Alors $\vec{M}_{int} = \vec{0}$ et on énonce le théorème suivant, qui est celui utilisé le plus couramment :

> ***Théorème*** : La dérivée par rapport au temps du moment cinétique total d'un système de points matériels calculé par rapport à un point fixe quelconque est égale au moment résultant des forces extérieures au système calculé par rapport à ce même point, sous la condition expresse que les forces intérieures au système soient des forces centrales :
>
> $$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} \doteq \vec{M}_{ext}(A)$$

Enfin, il faut signaler que si l'on choisit le point G pour calculer les moments du système, les deux variantes du théorème général restent valables en dépit du fait que $\vec{v}(G)$ n'est pas nulle, car alors $\vec{v}(G) \wedge \vec{P} = \vec{0}$.

7. Conservation du moment cinétique total. Du théorème précédent restreint au cas des forces intérieures centrales, il découle immédiatement que lorsque le système de points matériels est isolé du reste de l'univers, alors le moment cinétique total de ce système calculé par rapport à un point fixe quelconque (ou par rapport au point G) est une intégrale première. Comme dans le **4**, on gagne ainsi 3 degrés de liberté et le problème à N corps est susceptible d'être ramené à un

problème à $n_\ell - 6$ inconnues. Il arrive toutefois que les 6 grandeurs conservées obtenues à l'aide des lois de conservation énoncées en **4** et **6** ne soient pas indépendantes.

8. Théorème de l'énergie cinétique. On définit l'*énergie cinétique* totale du système de points matériels :

$$T := \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2$$

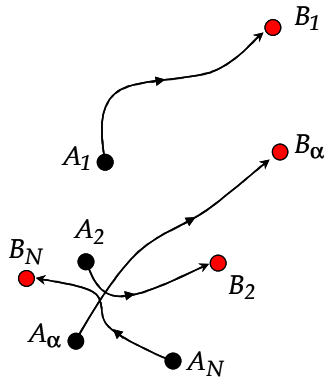
Pour des raisons historiques, la quantité $2T$ prend le nom de *force vive* du système.

Si on écrit à nouveau les équations du mouvement pour chacun des points matériels P_α, que l'on multiplie scalairement chacune d'entre elles par le déplacement élémentaire $d\overrightarrow{r_\alpha} = \overrightarrow{v_\alpha}\, dt$ effectué par chacun de ces points pendant la durée infinitésimale dt, que l'on somme l'ensemble de ces équations, et que l'on intègre sur une durée finie entre deux instants $t_\mathcal{A}$ et $t_\mathcal{B}$, on obtient le résultat suivant :

$$\int_{t_\mathcal{A}}^{t_\mathcal{B}} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{d\overrightarrow{v_\alpha}}{dt} \cdot \overrightarrow{v_\alpha}\; dt \doteq \int_{t_\mathcal{A}}^{t_\mathcal{B}} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,ext} \cdot \overrightarrow{v_\alpha}\; dt + \int_{t_\mathcal{A}}^{t_\mathcal{B}} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,int} \cdot \overrightarrow{v_\alpha}\; dt$$

où le membre de gauche s'intègre immédiatement pour fournir la différence d'énergie cinétique du système entre les deux instants $t_\mathcal{B}$ et $t_\mathcal{A}$.

Pour expliciter les deux termes du membre de droite, il faut préciser quelque peu le sens de l'intégration temporelle : entre les deux instants $t_{\mathcal{A}}$ et $t_{\mathcal{B}}$, chaque point matériel P_α se déplace depuis un point A_α au temps $t_{\mathcal{A}}$ vers un point B_α au temps $t_{\mathcal{B}}$, de sorte qu'entre ces deux instants le système se déplace depuis l'ensemble de points $\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ vers l'ensemble de points $\mathcal{B} := \{B_1, B_2, \dots, B_N\}$.



Moyennant ces conventions, le premier terme du membre de droite correspond au *travail* effectué par toutes les forces extérieures au système au cours de son déplacement de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ pendant la durée $t_{\mathcal{B}} - t_{\mathcal{A}}$:

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}^{ext} = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{A_\alpha}^{B_\alpha} \vec{F}_{\alpha,ext} \cdot d\overrightarrow{r_\alpha} = \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,ext} \cdot \overrightarrow{v_\alpha}\ dt$$

Le second terme du membre de droite quant à lui concerne le travail des forces intérieures au système au cours du même trajet :

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}^{int} = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{A_\alpha}^{B_\alpha} \vec{F}_{\alpha,int} \cdot d\overrightarrow{r_\alpha} = \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,int} \cdot \overrightarrow{v_\alpha}\ dt$$

Ni l'hypothèse des forces centrales, ni le principe de l'action et de la réaction n'entraînent ici de simplification évidente de cette dernière expression (sauf lorsque le système s'avère

former un corps solide rigide). On est ainsi conduit au théorème de l'énergie cinétique :

> ***Théorème*** : Au cours du déplacement d'un système de points matériels pendant une certaine durée finie, le travail effectué par l'ensemble des forces qui opèrent sur le système, tant extérieures qu'intérieures, est égal à la différence d'énergie cinétique du système occasionnée pendant cette même durée :
>
> $$T(\mathcal{B}) - T(\mathcal{A}) \doteq W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}^{ext} + W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}^{int}$$

9. Puissance développée par les forces. Le théorème de l'énergie cinétique est souvent utilisé par les mécanicien(ne)s sous sa forme différentielle et prend le nom de théorème de la puissance cinétique. On définit la *puissance instantanée* développée par une force $\vec{F}$ agissant sur un point matériel dont la vitesse est $\vec{v}$ par le produit scalaire : $\vec{F}.\vec{v}$. Suivant cette définition, la puissance totale développée par l'ensemble des forces opérant sur le système de points matériels s'écrira :

$$\mathcal{P} := \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{F_\alpha} \cdot \overrightarrow{v_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,ext} \cdot \overrightarrow{v_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,int} \cdot \overrightarrow{v_\alpha}$$

$$= \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$$

De la sorte, la forme différentielle du théorème de l'énergie cinétique s'énonce ainsi : la puissance développée par l'ensemble des forces, tant extérieures qu'intérieures, qui opèrent sur un système de points matériels est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ce système :

$$dT/dt \doteq \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$$

10. Fonction de force. Dans de nombreux cas usuels, on admet que toutes les forces du problème sont issues du gradient d'une fonction scalaire $\mathcal{U}$, appelée *fonction de force*, qui ne dépend que des coordonnées de position des points matériels. On a ainsi : $\overrightarrow{F_\alpha} = +\vec{\nabla}_\alpha \mathcal{U}$, la notation $\vec{\nabla}_\alpha$ signifiant que le gradient est pris par rapport aux coordonnées du αième point matériel. On symbolise le fait que la fonction de force dépende de ces coordonnées (quelles qu'elles soient) en écrivant : $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \dots, \overrightarrow{r_N})$. De même, on peut symboliser $\vec{\nabla}_\alpha$ par la notation : $\vec{\nabla}_\alpha := \partial/\partial\overrightarrow{r_\alpha}$, qui apparaît comme plus appropriée sous de nombreux aspects mais qui comporte certains dangers et doit donc être maniée avec précaution. On retiendra que si des coordonnées cartésiennes sont employées dans le problème, cette notation ne pose aucune difficulté de principe. Pour les autres systèmes de coordonnées, il faut faire intervenir le tenseur métrique associé. Toutefois, tant que le calcul permet de maintenir des notations vectorielles, les résultats obtenus resteront valables

pour tout système de coordonnées ; par exemple : $\partial/\partial\vec{r}\,(\vec{r}^2) = 2\,\vec{r}$.

11. Energie potentielle et théorème de l'énergie mécanique. Ces conventions mises en place, admettons que l'ensemble des forces du problème à N corps considéré puisse s'écrire sous la forme du gradient d'une fonction scalaire $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \dots, \overrightarrow{r_N})$. On a dans ce cas :

$$\overrightarrow{F_\alpha} = +\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{r_\alpha}} = \vec{F}_{\alpha,ext} + \vec{F}_{\alpha,int} = \frac{\partial \mathcal{U}_{ext}}{\partial \overrightarrow{r_\alpha}} + \frac{\partial \mathcal{U}_{int}}{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}$$

avec $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{ext} + \mathcal{U}_{int}$. La différentielle de la fonction $\mathcal{U}$ s'écrit alors :

$$d\mathcal{U} = \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{F_\alpha} \cdot d\overrightarrow{r_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{F}_{\alpha,ext} + \vec{F}_{\alpha,int}\right) \cdot d\overrightarrow{r_\alpha}$$

si bien qu'en intégrant cette quantité sur l'ensemble des chemins $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ définis au **9**, le résultat obtenu s'identifie au travail de toutes les forces opérant sur le système lors de son déplacement global. Ce travail ne dépend donc plus des chemins suivis, mais seulement de la différence entre les valeurs de la fonction de force aux points d'arrivée et de départ :

$$\mathcal{U}(\mathcal{B}) - \mathcal{U}(\mathcal{A}) = W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}^{ext} + W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}^{int}$$

Par suite, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $T(\mathcal{B}) - \mathcal{U}(\mathcal{B}) \doteq T(\mathcal{A}) - \mathcal{U}(\mathcal{A})$. Comme le choix des positions initiales ($\mathcal{A}$) et des positions finales ($\mathcal{B}$) du système est

arbitraire, il faut conclure que la quantité $T - \mathcal{U}$ est conservée tout le long des trajectoires effectuées par l'ensemble de ces points matériels.

On a coutume d'appeler *énergie potentielle* la fonction scalaire $V = -\mathcal{U}$. Avec cette terminologie, on énonce le théorème de l'énergie mécanique :

> ***Théorème*** : Lorsque toutes les forces du problème à N corps dérivent d'une fonction énergie potentielle $V = V(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \dots, \overrightarrow{r_N})$, i.e. $\overrightarrow{F_\alpha} = -\partial V / \partial \overrightarrow{r_\alpha}$, alors l'énergie mécanique du système, définie comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de ce système, est une intégrale première :
>
> $$E = T - \mathcal{U} = T + V \doteq Cte$$

12. Intégrales premières pour le problème à *N* corps. En vertu des résultats annoncés aux **5**, **7** et **11**, on peut énoncer le théorème suivant : dans un problème à N corps isolés du reste de l'univers, où les forces intérieures sont centrales et dérivent d'une fonction énergie potentielle, il existe 7 intégrales premières dont l'interprétation physique est : premièrement, la quantité de mouvement totale du système, qui fournit 3 de ces constantes ; deuxièmement, le moment cinétique total du système qui en fournit 3 autres ; et enfin, l'énergie mécanique totale du système.

Le théorème ne dit pas si ces intégrales premières sont indépendantes ou non, ou s'il en existe d'autres.

13. Exercice : Le problème à 2 corps. On considère le problème dit de Kepler, c'est-à-dire le cas de 2 corps célestes assimilés à des points matériels isolés du reste de l'univers et en interaction gravitationnelle. On adopte les mêmes notations que celles du cours (en particulier : $M = m_1 + m_2$) et on appelle G la constante universelle de la gravitation. Résoudre le problème de Kepler en s'inspirant des suggestions et des questions suivantes.

Interpréter (géométriquement) le changement de variables :

$$\begin{cases} \vec{R} = \dfrac{m_1}{M}\,\vec{r}_1 + \dfrac{m_2}{M}\,\vec{r}_2 \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{cases}$$

Ecrire les équations (vectorielles) de Newton relatives à chacun des deux corps et en déduire les équations (vectorielles) pour les nouvelles variables $\vec{r}$ et $\vec{R}$. On appellera $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ la masse réduite du système.

Comment évolue la variable $\vec{R}$ avec le temps ? Quel théorème retrouve-t-on ?

Calculer le moment cinétique du système à l'aide du nouveau jeu de variables et appliquer le théorème correspondant au problème à 2 corps.

Montrer qu'en prenant comme nouveau référentiel galiléen le référentiel du centre de masse du système, on réduit le

problème à 2 corps à un problème à un seul corps fictif repéré depuis le centre de masse avec la variable $\vec{r}$, de masse réduite μ, en mouvement sous l'effet d'une force centrale.

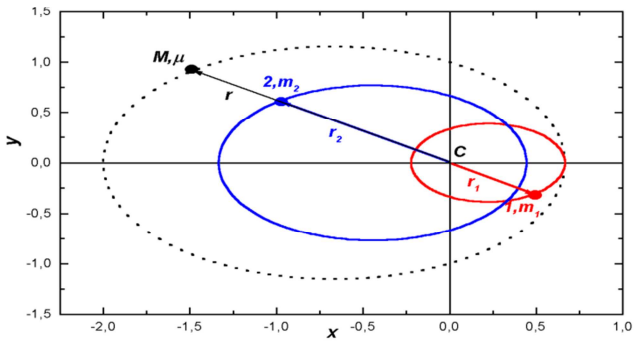
Appliquer le théorème du moment cinétique au corps fictif et en déduire que son mouvement se réalise dans un plan perpendiculaire à ce moment cinétique. En passant en coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan, en déduire la loi des aires : $r^2\dot{\theta} = \ell/\mu$ où ℓ est le module du moment cinétique du corps fictif.

Ecrire l'énergie mécanique E du problème à deux corps et montrer qu'elle se réduit au problème du corps fictif précédent dans le référentiel du centre de masse. Utiliser la loi des aires et appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour ce problème. En utilisant la notion d'énergie potentielle effective, $V_{eff}(r)$, discuter qualitativement des mouvements possibles du point matériel fictif en fonction des valeurs de E à l'aide du graphe de V_{eff} en fonction de r. Distinguer les deux cas $\ell = 0$ et $\ell \neq 0$. Quel type de mouvement doit-on observer lorsque $\ell = 0$?

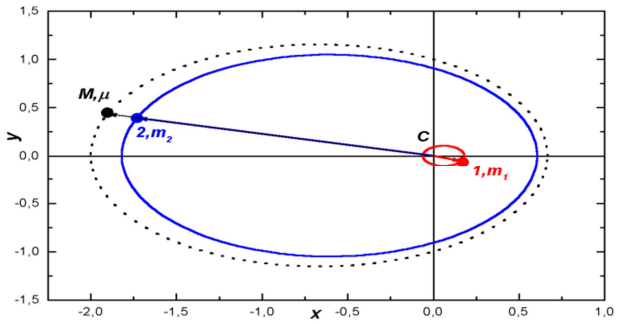
On suppose dorénavant que $\ell \neq 0$. En utilisant encore le théorème de l'énergie mécanique, écrire l'équation différentielle pour la variable $r(t)$ et en déduire l'équation différentielle de la trajectoire $r(\theta)$ grâce à la loi des aires. Résoudre cette équation en intégrant directement ou en regardant dans les tables d'intégrales indéfinies. En conclure que le mouvement est soit hyperbolique $(E > 0)$, soit

parabolique ($E = 0$), soit elliptique ($V_0 < E < 0$, où V_0 est la valeur minimale de V_{eff}), soit circulaire ($E = V_0$).

On retiendra de cet exemple historique comment la connaissance des intégrales premières a permis de résoudre le problème.



Trajectoires obtenues pour le cas elliptique et $m_1/m_2 = 2$. Les deux points matériels tournent en sens contraire l'un par rapport à l'autre. La trajectoire en pointillés est la trajectoire du point fictif.



Trajectoires obtenues pour le cas elliptique avec cette fois $m_1/m_2 = 10$. Plus ce rapport augmente, plus la trajectoire du point matériel 2 (le moins massif) se confond avec la trajectoire du mouvement relatif entre les deux points matériels, tandis que le point matériel 1 (le plus massif) tend à rester immobile au point C, centre de masse du système. C'est ce qui se passe pour le cas des planètes autour du soleil.

Chapitre 3

LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

Après avoir rendu compte de quelques résultats mathématiques relatifs au passage des coordonnées primaires aux coordonnées généralisées, on établit dans ce chapitre les équations de Lagrange. Celles dites de première espèce apparaissent comme les plus générales car elles ne nécessitent aucune hypothèse sur la nature des forces en présence. Les équations de Lagrange de seconde espèce surviennent lorsque les forces envisagées sont issues d'une fonction scalaire. Ces dernières équations se construisent à partir d'une seule fonction, appelée lagrangien, grâce à laquelle on peut décrire toute la dynamique du problème.

1. Des coordonnées primaires aux coordonnées généralisées. Pour passer des coordonnées primaires, x_r, du système de N points matériels à ses coordonnées généralisées, q_i, il est nécessaire d'établir $3N$ relations fonctionnelles qui les relient entre elles. Le paramètre temps peut aussi intervenir de façon explicite (si on change de référentiel par exemple). On écrit donc ces relations sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 = f_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ x_2 = f_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{3N} = f_{3N}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{cases}$$

Comme il doit être équivalent de travailler avec les q_i ou avec les x_r, on réclame que les fonctions f_r doivent être des fonctions suffisamment régulières de leurs arguments pour qu'il soit possible d'inverser ces relations de façon à obtenir les q_i en fonction des x_r sans ambiguïté.
On résume les relations ci-dessus (en omettant abusivement les f_r) sous la forme :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, t)$$

2. Quelques résultats mathématiques. A partir de la relation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, t)$ il s'ensuit immédiatement quelques propriétés qui sont résumée ici.

Différentielles et dérivées - Chaque x_r est une fonction des n variables q_i et, éventuellement, du temps t ; on a donc :

$$dx_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_r}{\partial q_i}\, dq_i + \frac{\partial x_r}{\partial t}\, dt \qquad \forall\, r = 1,2,\dots,3N$$

ou encore :

$$\dot{x}_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_r}{\partial q_i}\, \dot{q}_i + \frac{\partial x_r}{\partial t} \qquad \forall\, r = 1,2,\dots,3N$$

Dans cette dernière expression on voit intervenir les dérivées par rapport au temps des coordonnées généralisées :

> ***Définition*** : On donne le nom de *vitesses généralisées* aux quantités $\dot{q}_i := dq_i/dt\,, i = 1,\dots,n.$

Notations vectorielles et matricielles – Dans le but d'élaborer des calculs plus synthétiques au fur et à mesure de la suite du cours, on définit les notations suivantes : au vecteur $\boldsymbol{u}$ d'un espace vectoriel de dimension d, on associe une matrice $(d \times 1)$ (*id est* : à d lignes et 1 colonne) qui le représente :

$$\boldsymbol{u} \rightleftharpoons u := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$$

où les u_k sont les composantes de $\boldsymbol{u}$ dans une base orthonormée $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_d)$.

On définit aussi la *matrice transposée* $(1 \times d)$ de la matrice u par : $u^T := (u_1\ u_2 \cdots\ u_d)$, la notation ^{T} désignant l'opération de transposition. De la sorte, le *produit scalaire* entre deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ se calcule comme un produit matriciel et se note :

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u^T v = v^T u = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i$$

On procède ainsi pour toutes les grandeurs associées aux x_r qui appartiennent à un espace vectoriel de dimension $3N$; par exemple : $\boldsymbol{x}$, $\dot{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{F}$, dont les matrices transposées qui les représentent sont $x^T := (x_1\ x_2\ \dots\ x_{3N})$, $\dot{x}^T := (\dot{x}_1\ \dot{x}_2\ \dots\ \dot{x}_{3N})$, $F^T := (F_1\ F_2\ \dots\ F_{3N})$ respectivement.
On procède de même pour toutes les grandeurs associées aux q_i qui appartiennent à un espace vectoriel de dimension n ;

par exemple : $\boldsymbol{q}$ et $\dot{\boldsymbol{q}}$ ont pour matrices transposées associées : $q^T := (q_1\ q_2\ \dots\ q_n)$ et $\dot{q}^T := (\dot{q}_1\ \dot{q}_2\ \dots\ \dot{q}_n)$ respectivement.

On définit aussi la matrice rectangulaire $(3N \times n)$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}} := \left(\frac{\partial x_r}{\partial q_j}\right)_{rj} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

qui englobe toutes les dérivées partielles des x_r par rapport aux q_j et qui jette un pont entre les deux espaces vectoriels puisqu'alors on peut écrire, compte tenu du résultat précédent :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}}\,\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}$$

La notation $(\partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{q}}$ signifie que la matrice $\partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{q}$ s'applique sur le vecteur $\dot{\boldsymbol{q}}$ et que le calcul s'opère de façon matricielle à l'aide de $\dot{q}$. A titre d'exercice, on pourra démontrer la formule matricielle ci-dessus.
Naturellement, toute autre matrice de ce type sera définie selon le même procédé ; par exemple : $\partial \boldsymbol{q}/\partial \boldsymbol{q}$, qui n'est rien d'autre que la matrice identité de l'espace à n dimensions.

Enfin, si une fonction scalaire f dépend des q_i, on se permettra dorénavant d'écrire : $f = f(q_1, q_2, \dots, q_n) = f(\boldsymbol{q})$, et de définir son gradient :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} \partial f/\partial q_1 \\ \partial f/\partial q_2 \\ \vdots \\ \partial f/\partial q_n \end{pmatrix} \quad ; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \rightleftharpoons \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, \cdots, \qquad \frac{\partial f}{\partial q_n}\right)$$

Théorème de Schwarz - On rappelle que pour une fonction $f(\boldsymbol{u})$ des n variables u_i, l'ordre dans lequel s'effectue une dérivation partielle d'ordre p importe peu pourvu que toutes les dérivées partielles existent jusqu'à cet ordre et soient continues envers chacune des variables, ce qui sera toujours présupposé. On aura donc par exemple :

$$\frac{\partial^2 x_r}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 x_r}{\partial q_j \partial q_i}$$

Lemme 1 - Si, à partir de l'expression de $\dot{x}_r$ écrite en fonction des $\dot{q}_i$, on calcule les quantités $\partial \dot{x}_r / \partial \dot{q}_j$ pour tout r et pour tout j, alors on déduit immédiatement le résultat suivant :

$$\frac{\partial \dot{x}_r}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_r}{\partial q_j} \qquad \overset{\text{càd}}{\Longleftrightarrow} \qquad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}}$$

Lemme 2 - Comme les quantités $\partial x_r / \partial q_j$ sont des fonctions des q_i et, éventuellement, du temps, on a pour tout r et pour tout j :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_r}{\partial q_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x_r}{\partial q_j}\right) \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_r}{\partial q_j}\right)$$

Après avoir utilisé le théorème de Schwarz puis « factorisé » la dérivation par rapport à q_j, on reconnaît dans le membre de

droite de l'expression ci-dessus la quantité $\dot{x}_r$; d'où un second lemme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_r}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \dot{x}_r}{\partial q_j} \qquad \overset{\text{càd}}{\Longleftrightarrow} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}}\right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}{\partial \boldsymbol{q}}$$

On démontre de même que ce lemme est valable pour la variable t :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_r}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{x}_r}{\partial t} \qquad \overset{\text{càd}}{\Longleftrightarrow} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}{\partial t}$$

Règle de dérivation en chaîne - On rappelle la formule de dérivation partielle par rapport à un q_i pour une fonction $f(\boldsymbol{x}, t)$ avec $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \sum_{r=1}^{3N} \frac{\partial x_r}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial x_r} \qquad \overset{\text{càd}}{\Longleftrightarrow} \qquad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$$

De même, pour une fonction $g(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$ avec $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, t)$, et donc $\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$:

$$\frac{\partial g}{\partial q_i} = \sum_{r=1}^{3N}\left(\frac{\partial x_r}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial x_r} + \frac{\partial \dot{x}_r}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_r}\right) \overset{\text{càd}}{\Longleftrightarrow} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{q}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \frac{\partial g}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}$$

En utilisant le fait que $\boldsymbol{x}$ ne dépend pas de $\dot{\boldsymbol{q}}$ ainsi que le lemme 1, on déduit aussi :

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{r=1}^{3N}\left(\frac{\partial x_r}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial g}{\partial x_r} + \frac{\partial \dot{x}_r}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_r}\right) = \sum_{r=1}^{3N}\frac{\partial x_r}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_r}$$

Soit :

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \frac{\partial g}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}$$

3. Equations de Lagrange de première espèce. Forces généralisées. L'énergie cinétique du système s'écrit :

$$T := \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3N} m_r \, \dot{x}_r^2$$

Egalité de Lagrange et forces généralisées - A partir de cette expression de T on peut calculer les quantités $\partial T / \partial \dot{q}_i$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{r=1}^{3N} m_r \, \dot{x}_r \frac{\partial \dot{x}_r}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{r=1}^{3N} m_r \, \dot{x}_r \frac{\partial x_r}{\partial q_i}$$

où le lemme 1 a été utilisé pour obtenir la dernière égalité. On en déduit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{r=1}^{3N} m_r \, \ddot{x}_r \frac{\partial x_r}{\partial q_i} + \sum_{r=1}^{3N} m_r \, \dot{x}_r \frac{\partial \dot{x}_r}{\partial q_i}$$

où le lemme 2 a été utilisé dans la seconde somme qui s'identifie finalement à $\partial T / \partial q_i$. On a donc l'égalité suivante due à Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{r=1}^{3N} m_r \, \ddot{x}_r \frac{\partial x_r}{\partial q_i}$$

Si, dans la somme du second membre de ce résultat, on utilise la seconde loi de Newton, $m_r \, \ddot{x}_r \doteq F_r \;\; \forall \, r$, alors cette somme

apparaît comme une quantité indicée par i qui émane des forces existantes dans le problème à N corps considéré ainsi que du jeu de variables q_i choisi. Comme les forces sont vues comme des données du problème et que le passage $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{q}$ est donné lui aussi, il s'ensuit que cette quantité apparaît comme une donnée du problème également.

> ***Définition*** : On donne le nom de *forces généralisées* aux quantités :
>
> $$\mathcal{F}_i := \sum_{r=1}^{3N} F_r \, \frac{\partial x_r}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} \quad \overset{\text{càd}}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{\mathcal{F}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \boldsymbol{F}$$

Chaque $\mathcal{F}_i$ est ainsi relative à un q_i. Cette association, aux apparences formelles dans le cadre de la définition ci-dessus, prend un sens très physique dès lors que l'on se préoccupe d'estimer le travail des forces $\vec{F}_\alpha$ pour des déplacements élémentaires dq_i car ce sont précisément ces forces généralisées qui vont intervenir (voir le chapitre suivant).

Equations de Lagrange de première espèce - Ayant ainsi défini les forces généralisées du problème, on tire de l'égalité de Lagrange, valable pour tout i, le système d'équations :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \doteq \mathcal{F}_i \quad \overset{\text{càd}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}} \doteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$$

qui constituent *les équations de Lagrange de première espèce*. Elles sont au nombre de n et permettent de résoudre le problème à N corps au même titre que les équations de Newton lorsque le système est libre.

Lorsque le système n'est pas libre, l'équivalence des deux points de vue demande à être précisée. En effet, les équations de Newton, toujours au nombre de $3N$, permettent, accompagnées des équations de liaison, de déterminer tout à la fois les q_i (via les x_r) en fonction du temps ainsi que les forces de liaisons en fonction des q_i et des $\dot{q}_i$ (et éventuellement du temps) grâce à des jeux de substitutions et de combinaisons linéaires entre l'ensemble de ces équations. Les équations de Lagrange quant à elles - telles qu'elles viennent d'être établies - ne sont pas en nombre suffisant pour réaliser une telle opération puisqu'il manque encore $K = 3N - n$ équations si K est le nombre d'équations de liaisons prises en compte lors du passage $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{q}$. On peut même douter de pouvoir obtenir les q_i en fonction du temps si dans les n équations de Lagrange il subsiste encore des forces de liaison inconnues. En fait, ces forces donnent une contribution nulle aux forces généralisées $\mathcal{F}_i$, de sorte qu'elles n'apparaissent pas dans les équations qui viennent d'être établies. Cette propriété s'énonce clairement lorsque l'on établit ces mêmes équations de Lagrange à l'aide du principe des travaux virtuels (voir le chapitre 5). En outre, on peut montrer que pour obtenir les forces de liaison associées aux K équations de liaison, il suffit de construire un jeu de paramètres q_i surabondant qui ne prend pas en compte ces assujettissements ; on obtient alors $3N$ équations de Lagrange où apparaissent cette fois les forces de liaison dans les forces généralisées. Associées aux K conditions de liaison, ces

équations fournissent alors les $3N$ q_i en fonction du temps ainsi que les forces de liaison inconnues. En ce sens, les équations de Lagrange sont bien équivalentes aux équations de Newton.

Les équations de Lagrange sont supérieures aux équations de Newton à bien des égards. Outre l'élimination des forces de liaison si on le souhaite, elles possèdent également un caractère *omnibus* : c'est-à-dire qu'elles adoptent une forme identique quelles que soient les coordonnées généralisées utilisées pour résoudre le problème envisagé, ce qui n'est pas le cas des équations de Newton.
Avec les équations de Lagrange, on n'a plus à calculer les accélérations des points matériels mais seulement l'énergie cinétique du système dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ exprimée en fonction des variables q_i et des vitesses généralisées $\dot{q}_i$ qui leur sont associées. Enfin, lors d'un changement de référentiel exprimé au travers des relations $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, t)$, on n'a pas à faire appel aux forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis dans le bilan des actions agissant sur le système : celles-ci sont implicitement prises en compte lors du passage aux coordonnées généralisées car ce que l'on calcule toujours, c'est l'énergie cinétique du système dans le référentiel galiléen.

4. Equations de Lagrange de seconde espèce. Lagrangien. Dans les cas les plus usuels, les forces du problème considéré - une fois éliminées les éventuelles forces de liaison - dérivent

toutes d'une fonction de force $\mathcal{U}$ qui ne dépend que des positions des N points matériels et, éventuellement, du temps : $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\overrightarrow{r_1}, \dots, \overrightarrow{r_N}, t)$ avec :

$$\overrightarrow{F_\alpha} = +\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}$$

La dépendance explicite de $\mathcal{U}$ en fonction du temps est associée à la possibilité que les sources qui donnent lieu à l'existence de $\mathcal{U}$ soient mobiles.

Il est facile de montrer que si les $\overrightarrow{F_\alpha}$ s'identifient au gradient de la fonction scalaire $\mathcal{U}$, alors il en est de même pour les forces généralisées $\mathcal{F}_i$ après avoir effectué le changement de variables $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, t)$. En effet, en remplaçant les $\overrightarrow{F_\alpha}$ par leurs expressions en fonction de $\mathcal{U}$ dans la définition des $\mathcal{F}_i$, on reconnaît immédiatement la règle de dérivation en chaîne qui permet d'écrire :

$$\mathcal{F}_i := \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{r_\alpha}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} \quad \overset{\text{càd}}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{q}}$$

où $\mathcal{U}$ est vue maintenant comme une fonction des q_i et du temps : $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\boldsymbol{q}, t)$.

On peut ensuite injecter cette écriture des $\mathcal{F}_i$ dans les équations de Lagrange originelles. En remarquant que $\partial \mathcal{U} / \partial \dot{q}_i$ est toujours nul, on obtient alors les équations de Lagrange dites de seconde espèce :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \doteq 0 \quad \overset{\text{càd}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \doteq \boldsymbol{0}$$

où l'on a défini le *lagrangien* du système : $L := T + \mathcal{U}$.
Cette fonction, qui dépend des q_i, des $\dot{q}_i$ et, éventuellement, du temps :

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) := T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \mathcal{U}(\boldsymbol{q}, t)$$

contient toute la dynamique du problème : se donner un lagrangien, c'est se donner un problème à N corps dont la dynamique sera obtenue en résolvant les équations de Lagrange associées à ce lagrangien.

En fait, comme au 2-**11**, on a coutume de travailler non pas avec la fonction de force $\mathcal{U}$ mais avec l'énergie potentielle du système $V := -\mathcal{U}$. On a donc :

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) := T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - V(\boldsymbol{q}, t)$$

5. Fonction de force dépendante des vitesses. Il se peut que les forces du problème dépendent également des vitesses des points matériels. Dans ce cas, la question se pose de savoir s'il est possible de définir une fonction de force qui leur est associée. Pour ce faire, supposons qu'une telle fonction de force existe et qu'elle dépende des vitesses des points matériels en question :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\overrightarrow{r_1}, \dots, \overrightarrow{r_N}, \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_N}, t) = \mathcal{U}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$$

et construisons un lagrangien tel que :

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) := T(\dot{\boldsymbol{x}}) + \mathcal{U}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$$

Les équations de Lagrange qui lui sont associées sont alors pour tout r :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_r}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{x}_r}\right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_r} \doteq 0$$

Soit, au vu de l'écriture de T :

$$m_r \ddot{x}_r \doteq \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{x}_r}\right) \quad \overset{\text{càd}}{\Longleftrightarrow} \quad m_\alpha \ddot{\overrightarrow{r_\alpha}} \doteq \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{r_\alpha}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{v_\alpha}}\right)$$

On reconnaît-là les équations de Newton d'un problème à N corps pour lequel les forces s'écriraient :

$$\vec{F}_\alpha := \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{r_\alpha}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{v_\alpha}}\right)$$

Les forces magnétiques sont précisément de ce type avec, lorsque le problème à N corps se réduit à celui d'une seule particule de charge Q dont la position est $\vec{r}$ et la vitesse $\vec{v}$: $\mathcal{U} = -\,Q\,\vec{A}(\vec{r}).\vec{v}$, où $\vec{A}$ est le potentiel vecteur associé au champ magnétique.

On peut démontrer que si les $\vec{F}_\alpha$ dérivent d'une fonction de force de la façon indiquée, alors cette écriture s'étend aux forces généralisées :

$$\vec{F}_\alpha := \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{r_\alpha}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{v_\alpha}}\right) \Leftrightarrow F_r := \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{x}_r}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}_i = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_i}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)$$

De la sorte, les équations de Lagrange de seconde espèce sont encore valables pour des forces dépendantes des vitesses des points matériels pourvu que ces forces dérivent d'une fonction de force scalaire $\mathcal{U}$ selon la règle présentée ci-dessus. On a alors :

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) := T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \mathcal{U}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

Il est important de noter que l'énergie potentielle V associée à ces forces n'est plus égale à $-\mathcal{U}$ comme précédemment. Au 4-**6** on démontre la relation :

$$V = -\mathcal{U} + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_i} \iff V = -\mathcal{U} + \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}$$

Par ailleurs, il a été dit au 1-**1** que les forces de la physique newtonienne ne sont censées dépendre tout au plus que des positions et vitesses des points matériels (et, éventuellement, du temps). Si bien que l'écriture :

$$\vec{F}_\alpha := \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{r_\alpha}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{v_\alpha}}\right)$$

impose à $\mathcal{U}$ d'être une fonction linéaire des vitesses sans quoi les $\vec{F}_\alpha$ dépendraient des accélérations. Cette condition limite sérieusement les possibilités de pouvoir écrire un lagrangien pour des forces dépendantes des vitesses d'une façon quelconque. Pour les forces de frottement fluide en $-k\vec{v}$ par exemple, on montre facilement qu'une telle fonction n'existe pas. Cela est compréhensible car si elle existait, l'énergie du

système serait conservée comme on va le voir au chapitre 4, ce qui n'est bien sûr pas possible en présence de forces dissipatives.

6. Généralisation des équations de Lagrange de seconde espèce. Les équations de Lagrange de première espèce :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}} \doteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$$

ne nécessitent pas l'existence d'une fonction de force ; elles sont donc très générales et bien adaptées aux cas où l'intérêt se porte sur les forces de liaisons mises en jeu dans le problème ; on sait en effet qu'il est plutôt rare que ces forces puissent s'exprimer à partir d'une fonction scalaire. De plus, au vu de la démonstration qui les sous-tend (revoir **3**), ces équations sont également valables pour tout autre type de forces, y compris pour des forces qui dépendraient des accélérations, voire au-delà, si l'envie nous prenait de passer outre cette « censure » de la physique newtonienne.

En procédant dans le même esprit, il est loisible de généraliser les équations de Lagrange de seconde espèce à des cas réputés impossibles. Une première généralisation consiste à transgresser l'interdit des forces dépendantes des accélérations. On opère alors comme dans le **5** en construisant un lagrangien

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) := T(\dot{\boldsymbol{x}}) + \mathcal{U}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$$

sans émettre de restriction sur la forme de la fonction scalaire $\mathcal{U}$. Les équations de Lagrange que l'on obtient s'identifient alors à des équations de Newton dont les forces s'écrivent :

$$\vec{F}_\alpha := \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{r_\alpha}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{v_\alpha}}\right)$$

Et on étend ainsi le paradigme newtonien à des forces dépendantes des accélérations.
Une seconde généralisation plus brutale consiste à postuler un lagrangien $L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$ sans que celui-ci prennent forcément la forme $T + \mathcal{U}$: après tout, ce qui importe c'est que les équations de Lagrange de seconde espèce,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} \doteq \mathbf{0}$$

s'identifient bien aux équations de Newton du problème à N corps considéré. De cette manière, le jeu consiste à trouver un lagrangien de forme absolument quelconque qui satisfasse à cette condition. L'exemple qui suit pour les forces de frottement fluide montre la philosophie adoptée.

On considère le cas unidimensionnel ($\boldsymbol{x} = x_1 = x$) d'une seule particule dont la dynamique est régie par le lagrangien non standard :

$$L(x, \dot{x}, t) := e^{2\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right)$$

L'équation de Lagrange qui lui est associée se met sous la forme :

$$e^{2\gamma t}\left(m\,\ddot{x}+\frac{dV}{dx}+2m\gamma\dot{x}\right)\doteq 0$$

Lorsque $\gamma \geq 0$, il se trouve que cette équation est équivalente à l'équation de Newton écrite pour une particule en mouvement sous l'action d'une énergie potentielle $V(x)$ et soumise à une force de frottement fluide $f=-2m\gamma\dot{x}$. La dynamique de cette particule peut donc être explorée à l'aide de ce lagrangien non standard.

Il est aussi instructif d'essayer d'écrire ce lagrangien sous la forme $T+\mathcal{U}$, ce qui est toujours possible. La fonction $\mathcal{U}$ s'écrit alors :

$$\mathcal{U}=e^{2\gamma t}(T-V)-T$$

Et la force qui lui est associée est :

$$\begin{aligned}F_x &:= \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\dot{x}}\right)\\ &= -\frac{dV}{dx}e^{2\gamma t}-2\gamma\,m\,\dot{x}\,e^{2\gamma t}-m\,\ddot{x}\,(e^{2\gamma t}-1)\end{aligned}$$

L'équation de Newton $m\,\ddot{x}\doteq F_x$ se combine de façon un peu étrange pour aboutir à... l'équation de Newton du problème considéré... On peut naturellement discuter de l'épistémologie déroutante du procédé, mais il reste que le lagrangien non standard évoqué ci-dessus régit bien la dynamique de notre particule soumise à une force de frottement fluide.

Si on s'attache à rechercher un lagrangien, c'est que l'existence d'une telle fonction dynamique permet l'accès aux méthodes d'analyse de la mécanique analytique.

En résumé - Dans le cadre de la physique newtonienne standard, les équations de Lagrange de première espèce sont sans restrictions sur la nature des forces mises en jeu autres que leur seule dépendance en fonction des positions et des vitesses (ainsi que du temps) des points matériels.

Lorsque les forces envisagées ne dépendent que des positions (et du temps) des points matériels et sont issues du gradient d'une fonction scalaire $\mathcal{U} = -V$, alors il existe un lagrangien $L = T - V$ qui régit la dynamique du système au travers des équations de Lagrange de seconde espèce.

Lorsque les forces envisagées dépendent également des vitesses des points matériels, il arrive qu'il existe aussi une fonction scalaire $\mathcal{U}$ dont sont issues ces forces et qu'il existe encore un lagrangien $L = T + \mathcal{U}$ décrivant la dynamique du système. L'énergie potentielle V associée à ces forces est alors $V = -\mathcal{U} + \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \partial\mathcal{U}/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$.

Dans d'autres cas, il peut exister des fonctions de forces non standard donnant lieu à des lagrangiens non standard qui permettent de décrire la dynamique du problème à l'aide encore des équations de Lagrange de seconde espèce.

Chapitre 4
(Complément de cours)

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE EN COORDONNÉES GÉNÉRALISÉES

Les grandeurs énergétiques introduites au chapitre 2 (énergie cinétique et travail) sont étudiées ici plus en profondeur à l'aide des coordonnées généralisées. Le théorème de l'énergie cinétique y est décliné sous différentes formes en fonction de la nature des forces du problème.
Lorsque ces forces sont issues d'une fonction de force, le théorème de l'énergie cinétique se démontre à partir du lagrangien du problème ; ce qui permet de définir l'énergie mécanique du système à l'aide de cette fonction.

1. Expression de l'énergie cinétique en coordonnées généralisées. L'énergie cinétique du système s'écrit :

$$T := \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{3N} m_r\, \dot{x}_r^2$$

En remplaçant dans cette expression l'écriture des $\dot{\boldsymbol{x}}$ en fonction des $\boldsymbol{q}$, des $\dot{\boldsymbol{q}}$ et, éventuellement, du temps, on obtient, après un calcul élémentaire, le résultat suivant :

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

avec :

$$\begin{cases} T_2 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \left[\sum_{r=1}^{3N} m_r \frac{\partial x_r}{\partial q_i} \frac{\partial x_r}{\partial q_j} \right] \dot{q}_i \dot{q}_j := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \\ T_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{r=1}^{3N} m_r \frac{\partial x_r}{\partial q_i} \frac{\partial x_r}{\partial t} \right] \dot{q}_i := \sum_{i=1}^{n} b_i\, \dot{q}_i \\ T_0 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{r=1}^{3N} m_r \left(\frac{\partial x_r}{\partial t} \right)^2 := c \end{cases}$$

T_2 est donc une forme bilinéaire en les $\dot{\boldsymbol{q}}$, tandis que T_1 est linéaire et T_0 un terme indépendant des $\dot{\boldsymbol{q}}$. Les coefficients a_{ij}, b_i et c sont des fonctions des $\boldsymbol{q}$ et de t ainsi que des masses : ils sont connus dès lors que le passage $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{q}$ est connu, c'est-à-dire dès lors que l'on s'est donné les relations $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, t)$.

Remarque : Si t est absent de la transformation lors du passage $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{q}$, l'énergie cinétique du système se réduit alors à la forme bilinéaire T_2. En fait si t avait été intégré aux q_i dès le départ, T apparaîtrait toujours comme une forme bilinéaire en $(\dot{\boldsymbol{q}}, \dot{t} = 1)$.

T_2, T_1 et T_0 s'écrivent aussi sous forme matricielle :

$$\begin{cases} T_2 = \dfrac{1}{2}\, \dot{\boldsymbol{q}}^T \left[\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}} \right)^T \widehat{\mathcal{M}}\, \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}} \right] \dot{\boldsymbol{q}} \\ T_1 = \left[\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} \right)^T \widehat{\mathcal{M}}\, \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}} \right] \dot{\boldsymbol{q}} \\ T_0 = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} \right)^T \widehat{\mathcal{M}}\, \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} \end{cases}$$

où $\widehat{\mathcal{M}}$ est la matrice carrée $(3N \times 3N)$ associée aux masses présentes au sein du système :

$$\widehat{\mathcal{M}} := \begin{pmatrix} m_{r=1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{r=2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{r=3N} \end{pmatrix}$$

Comme $\widehat{\mathcal{M}}$ est diagonale, on a : $\widehat{\mathcal{M}} = \widehat{\mathcal{M}}^T$.

En se concentrant sur l'écriture matricielle de T_2, on voit que les coefficients a_{ij} constituent les éléments d'une matrice carrée $(n \times n)$ qui vit dans l'espace de configuration du système. Cette matrice, $\hat{\mathcal{G}}$, est directement liée à la métrique de cet espace (voir plus loin). $\hat{\mathcal{G}} := (\partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{q})^T \widehat{\mathcal{M}} \ \partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{q}$.

2. Identité d'Euler. On dit d'une fonction f des n variables u_i qu'elle est une *fonction homogène* de degré d si, pour tout nombre réel λ on a la propriété :

$$\begin{aligned} f(\lambda \boldsymbol{u}) &= f(\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n) = \lambda^d \, f(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= \lambda^d \, f(\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

On dispose alors du lemme suivant :

> ***Identité d'Euler*** : une fonction homogène de degré d, différentiable en les n variables u_i, satisfait l'égalité :
>
> $$\sum_{i=1}^{n} u_i \, \frac{\partial f}{\partial u_i} = d \, f$$

Réciproquement, si f vérifie l'identité d'Euler, alors elle est homogène de degré d.

Considérons maintenant les expressions T_2 et T_1 de l'énergie cinétique comme des fonctions des $\dot{\boldsymbol{q}}$; alors il est facile de montrer que $T_2(\lambda\,\dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda^2 T_2(\dot{\boldsymbol{q}})$ et que $T_1(\lambda\,\dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda\, T_1(\dot{\boldsymbol{q}})$. Ce qui montre que T_2 et T_1 sont respectivement des fonctions homogènes de degré 2 et 1 en les $\dot{\boldsymbol{q}}$. Il en résulte les égalités :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} = 2\, T_2 \\[2ex] \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} = \; T_1 \end{cases}$$

3. Travail des forces en coordonnées généralisées. Le travail réalisé par les forces en présence au cours d'un déplacement fini du système entre deux états $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pris entre les deux instants $t_{\mathcal{A}}$ et $t_{\mathcal{B}}$ s'écrit, avec les même conventions qu'au 2.7 :

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{A_\alpha}^{B_\alpha} \vec{F}_\alpha \cdot d\overrightarrow{r_\alpha} = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot d\overrightarrow{r_\alpha}$$

En insérant l'expression des $d\overrightarrow{r_\alpha}$ en fonction des dq_i et de dt, cette expression prend la forme :

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} \right) dq_i + \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t}\, dt$$

On reconnaît dans les quantités entre parenthèses les forces généralisées du problème définies au 3.**3**, ce qui permet d'écrire :

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i\, dq_i + \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t}\, dt$$

Lorsque le temps n'intervient pas dans la transformation $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{q}$, la seconde intégrale n'existe pas et le travail élémentaire écrit en coordonnées généralisées prend la forme d'un produit scalaire $\boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot d\boldsymbol{q}$. Cela justifie physiquement l'appellation « forces généralisées ».

4. Théorème de l'énergie cinétique.

Autre écriture de $W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$ - On améliore encore l'écriture de $W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$ si, dans la seconde intégrale du résultat ci-dessus, on utilise la seconde loi de Newton pour remplacer les $\vec{F}_\alpha$ par $m_\alpha \ddot{\overrightarrow{r_\alpha}}$. Alors, en intégrant par parties on obtient d'abord :

$$\int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t} dt \doteq \sum_{\alpha=1}^{N} \left\{ \left[m_\alpha \dot{\overrightarrow{r_\alpha}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t} \right]_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} - \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} m_\alpha \dot{\overrightarrow{r_\alpha}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t} \right) dt \right\}$$

On vérifie ensuite que le terme tout intégré dans cette formule s'identifie finalement à la quantité $T_1 + 2T_0$ après y avoir

remplacé les $\dot{\overrightarrow{r_\alpha}}$ en fonction des $\dot{\boldsymbol{q}}$. Par ailleurs, après avoir fait usage du lemme 2 du 3.**2**, on montre facilement que l'intégrande du second membre n'est en fait rien d'autre que $\partial T/\partial t$. On arrive ainsi à l'expression suivante pour $W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$:

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} \doteq \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot d\boldsymbol{q} \;+\; [T_1 + 2T_0]_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} - \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \frac{\partial T}{\partial t}\, dt$$

Théorème de l'énergie cinétique - Avec cette ré-écriture de $W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$, le théorème de l'énergie cinétique qui avait été énoncé au 2.**7** sous la forme :

$$T(\mathcal{B}) - T(\mathcal{A}) \doteq W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$$

devient maintenant (puisque $T = T_2 + T_1 + T_0$) :

$$\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot d\boldsymbol{q} \;\doteq\; [T_2 - T_0]_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} + \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \frac{\partial T}{\partial t}\, dt$$

Cette expression très générale du théorème se décline sous différentes formes plus ou moins connues selon que les forces mises en jeu dérivent ou non d'une fonction de force et/ou que le passage aux coordonnées généralisées implique ou non le temps dans la transformation.

5. Cas où le passage $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{q}$ n'implique pas le temps. C'est le cas le plus usuel. D'après **3**, le travail réalisé par toutes les forces du problème s'écrit :

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot d\boldsymbol{q}$$

L'énergie cinétique du système s'écrit quant à elle $T = T_2$ et ne dépend pas explicitement du temps. Le théorème de l'énergie cinétique prend donc la forme simplifiée :

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot d\boldsymbol{q} \;\doteq\; [T_2]_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} = T(\mathcal{B}) - T(\mathcal{A})$$

Il reste encore à décliner cette formulation du théorème en fonction de la nature des forces en présence. Si ces forces ne dérivent pas d'une fonction de force, l'expression ci-dessus est aboutie. Si par contre les forces envisagées dérivent d'une fonction de force, on peut poursuivre le calcul. Dans ce qui suit, on envisage plusieurs cas :

Les forces $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{\alpha}}$ dérivent d'une fonction de force $\boldsymbol{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{U}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{r_N}})$ - Dans ce cas, on se rappelle que les forces généralisées $\mathcal{F}_i$ dérivent également de la fonction de force $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{F}_i := \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{r_\alpha}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i}$$

Le travail s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} &= \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot d\boldsymbol{q} \;=\; \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot d\boldsymbol{q} \;=\; \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} d\mathcal{U} \\ &= \mathcal{U}(\mathcal{B}) - \mathcal{U}(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

Ce qui montre que la fonction de force $\mathcal{U}$ est bien, au signe près, la fonction énergie potentielle du problème : $V = -\mathcal{U}$.

Avec ce résultat attendu, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit ici :

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot d\boldsymbol{q} \ = V(\mathcal{A}) - V(\mathcal{B}) \doteq T(\mathcal{B}) - T(\mathcal{A})$$

On retrouve bien sûr le théorème de l'énergie mécanique déjà énoncé au 2 **10** : $E = T + V = T - \mathcal{U} = Cte.$

Les forces $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{\alpha}}$ sont issues d'une fonction de force $\boldsymbol{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{U}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{r_N}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}}, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v_N}})$ - Dans ce cas, on a :

$$\vec{F}_\alpha := \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{r_\alpha}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overrightarrow{v_\alpha}}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{\mathcal{F}} := \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned}
W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} &= \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)\right] \cdot d\boldsymbol{q} \\
&= \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot d\boldsymbol{q} \ - \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \, dt \\
&= \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot d\boldsymbol{q} \ - \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}\right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} + \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} \, dt \\
&= \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot d\boldsymbol{q} \ + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot d\dot{\boldsymbol{q}}\right) - \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}\right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Et on reconnaît dans l'intégrale restant à effectuer la différentielle de $\mathcal{U}$; d'où ce résultat :

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = \left[\mathcal{U} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}\right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

On voit ici que ce n'est plus $-\mathcal{U}$ qui joue le rôle d'une énergie potentielle mais la quantité :

$$V = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - \mathcal{U}$$

Compte tenu de cette propriété, le théorème de l'énergie cinétique prend donc à nouveau la forme :

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = V(\mathcal{A}) - V(\mathcal{B}) \doteq T(\mathcal{B}) - T(\mathcal{A})$$

mais avec une définition de V différente. L'énergie mécanique du système, constante tout au long du mouvement, s'écrit ici :

$$E = T + V = T - \mathcal{U} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = Cte$$

La fonction de force est $\boldsymbol{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{U}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{r_N}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}}, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v_N}}, \boldsymbol{t})$ - Si le temps intervient explicitement dans l'expression de $\mathcal{U}$, c'est que les sources qui lui donnent naissance sont mobiles. Un calcul complétement similaire au précédent donne cette fois :

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = \left[\mathcal{U} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} - \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \, dt$$

Et le théorème de l'énergie cinétique s'énonce ainsi :

$$\left[T - \mathcal{U} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \doteq - \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \, dt$$

Il exprime que l'énergie mécanique du système varie tout au long du mouvement et que cette variation est due à l'apport énergétique occasionné par les sources mobiles.

6. Cas où le passage $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{q}$ implique le temps. Ici l'énergie cinétique du système est $T = T_2 + T_1 + T_0$ et le travail réalisé par toutes les forces du problème est (revoir **4**) :

$$W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} \doteq \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot d\boldsymbol{q} \ + \ [T_1 + 2T_0]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} - \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \frac{\partial T}{\partial t}\, dt$$

On regarde directement le cas général de l'existence d'une fonction de force $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\overrightarrow{r_1}, \dots, \overrightarrow{r_N}, \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_N}, t)$. D'après **5**, on a alors :

$$\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot d\boldsymbol{q} \ = \left[\mathcal{U} - \ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} - \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}\, dt$$

Le théorème de l'énergie cinétique, $W_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} \doteq T(\mathcal{B}) - T(\mathcal{A})$, prend donc la forme :

$$\left[T_2 - T_0 - \mathcal{U} + \ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \doteq - \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \frac{\partial}{\partial t} (T + \mathcal{U})\, dt$$

C'est la forme la plus complète du théorème lorsque les forces sont issues d'une fonction de force ; elle englobe tous les cas précédents et on retrouve un théorème que Paul Painlevé avait démontré : si la quantité $T + \mathcal{U}$ s'avère ne pas dépendre explicitement du temps, alors la quantité énergétique $T_2 - T_0 - \mathcal{U} + (\partial \mathcal{U}/\partial \dot{\boldsymbol{q}}) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$ est une intégrale première du mouvement.

7. Théorème de l'énergie cinétique en dynamique lagrangienne. Le théorème de l'énergie cinétique a été établi au chapitre 2 grâce aux équations de Newton et au calcul du

travail réalisé par les forces en présence. Supposons maintenant qu'il existe un lagrangien $L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ (éventuellement non standard) qui décrive la dynamique du système à l'étude. Alors la dérivée totale de ce lagrangien par rapport à la variable indépendante t est :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\doteq \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

où l'on a utilisé les équations de Lagrange pour écrire la seconde ligne. On a donc le théorème suivant :

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - L\right) \doteq -\frac{\partial L}{\partial t}$$

qui exprime qu'une certaine grandeur énergétique varie dans le temps comme $\partial L / \partial t$ et devient une intégrale première lorsque L ne dépend pas explicitement du temps.

Lorsque les forces du problème sont issues d'une fonction de force $\mathcal{U}$, on sait que le lagrangien s'exprime sous la forme :

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) := T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \mathcal{U}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

Il s'ensuit que :

$$\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - L \doteq \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial (T_2 + T_1 + T_0)}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} + \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - (T_2 + T_1 + T_0) - \mathcal{U}$$

$$= T_2 - T_0 - \mathcal{U} + \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}$$

Ce qui montre (d'après **6**) que le théorème qui vient d'être établi n'est rien d'autre que le théorème de l'énergie cinétique pour des forces issues d'une fonction de force.

Soit alors la fonction dynamique : $E(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) := \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \partial L / \partial \dot{\boldsymbol{q}} - L$, on aboutit à la définition suivante :

> ***Définition*** : Les systèmes décrits par un lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps sont appelés *systèmes conservatifs*. Pour ces systèmes, la fonction dynamique $E(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) := \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \partial L / \partial \dot{\boldsymbol{q}} - L$ est une intégrale première (qui s'identifie le plus souvent à l'énergie mécanique du problème).

La fonction dynamique $E(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ ne s'identifie à l'énergie mécanique du système (énergie cinétique + énergie potentielle) que lorsque l'énergie cinétique du problème prend la forme $T = T_2$, c'est-à-dire lorsque le temps n'intervient pas explicitement lors du passage $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{q}$.
Pour des lagrangiens non standards, $E(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ ne représente pas non plus l'énergie mécanique : le lagrangien non standard utilisé au 3.**6** pour la particule avec frottement fluide donne par exemple :

$$\dot{x}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = e^{2\gamma t} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \right) = e^{2\gamma t} (T + V)$$

Pour ce type de lagrangien, il vaut mieux écrire l'énergie mécanique du système en estimant directement son énergie cinétique et le travail des forces mises en jeux. Il reste que le théorème établit ci-dessus est toujours valable.

Chapitre 5

PRINCIPE DE D'ALEMBERT

Après avoir dégagé la notion de déplacement et de travail virtuels, on établit le principe de D'Alembert. Puis on s'intéresse au traitement des forces de liaison en utilisant le fait que de telles forces réalisent un travail (virtuel ou réel) nul lors d'un déplacement (virtuel ou réel) compatible avec les liaisons imposées. Cela permet d'énoncer une variante du principe de D'Alembert dans laquelle seules les forces agissantes (*id est* : toutes les forces autres que les forces de liaison) interviennent.
Ecrit en coordonnées généralisées, le principe de D'Alembert débouche sur les équations de Lagrange et leur fournit une interprétation physique. On décline ensuite les diverses façons d'écrire ces équations selon que l'on prend en compte ou non les équations de liaison lors du passage aux coordonnées généralisées. En particulier, on introduit la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

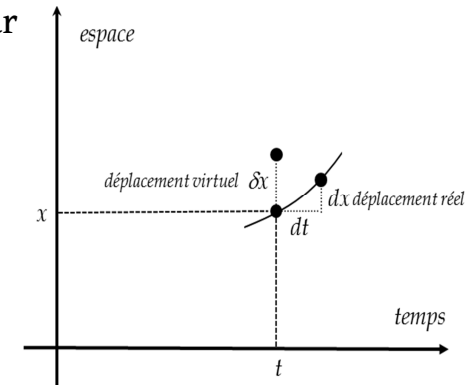
1. Déplacements, vitesses et travail réels ou virtuels. Lorsqu'un point matériel du problème à N corps se déplace sous l'effet de la force résultante $\vec{F}_\alpha$ il suit une certaine courbe au cours du temps déterminée par le second principe de la dynamique ou par les équations de Lagrange du problème. Ainsi, pendant la durée infinitésimale dt ce point matériel effectue un déplacement infinitésimal $d\vec{r}_\alpha$ qui sera qualifié de

déplacement réel ; en particulier on a : $d\vec{r}_\alpha = \vec{v}_\alpha(t)\, dt$ où $\vec{v}_\alpha(t)$ est le *vecteur-vitesse réel* du point matériel. Il est clair qu'au cours de ce déplacement infinitésimal, le *travail réel* élémentaire, dw_α, réalisé par $\vec{F}_\alpha$ s'écrit :

$$dw_\alpha := \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{r}_\alpha = \vec{F}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha(t)\, dt$$

Ce sont ces déplacements, vitesses et travail qui ont été utilisés dans les chapitres précédents.

On peut aussi envisager un déplacement infinitésimal *virtuel* de chaque point matériel P_α ; c'est-à-dire un déplacement infinitésimal qui n'est pas prescrit par les équations de la dynamique mais qui est tout à notre convenance. Un tel déplacement élémentaire sera noté $\delta\vec{r}_\alpha$ pour le distinguer du déplacement réel $d\vec{r}_\alpha$ imposé par les équations du mouvement.



On peut concevoir un certain type de déplacement virtuel infinitésimal en s'imaginant qu'à un instant t fixé on ait pris une photographie du système, puis que sur cette photographie on déplace chaque point matériel de la quantité $\delta\vec{r}_\alpha$ (voir figure). Ce genre de déplacement virtuel s'opère donc à t fixé, ce que l'on traduit par $\delta t = 0$; car on peut aussi envisager d'autres types de déplacements virtuels qui se réalisent sur une durée infinitésimale virtuelle δt non nulle mais qui ne correspond pas à la durée réelle dt.

Au cours d'un déplacement virtuel infinitésimal du système, la résultante des forces, $\vec{F}_\alpha$, réalise un certain *travail virtuel* élémentaire, δw_α, qui s'écrit :

$$\delta w_\alpha := \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha$$

C'est sur cette notion de déplacement et de travail virtuels que repose le principe de D'Alembert à partir duquel vont découler les équations de Lagrange de première espèce. Pour ce faire, il n'est pas nécessaire d'envisager d'autres déplacements virtuels que ceux que l'on peut opérer à t fixé (i.e. $\delta t = 0$). Par la suite, on se limitera donc à ce type de déplacement que l'on qualifie de *déplacement virtuel synchrone* (le cas $\delta t \neq 0$ prenant le nom de *déplacement virtuel asynchrone*).

2. Principe de D'Alembert. On considère, à un instant t fixé, un ensemble de déplacements virtuels synchrones $\delta \vec{r}_\alpha$ arbitraires (*id est* : indépendants les uns des autres). En utilisant les coordonnées primaires du système à N corps, ces déplacements s'écrivent :

$$\delta \vec{r}_\alpha = \delta x_{r=3\alpha-2}\, \vec{u}_x + \delta x_{r=3\alpha-1}\, \vec{u}_y + \delta x_{r=3\alpha}\, \vec{u}_z$$

où les δx_r sont donc tous arbitraires.

Le travail virtuel élémentaire effectué par l'ensemble des forces $\vec{F}_\alpha$ sous l'effet de ces déplacements virtuels est défini par :

$$\delta w := \sum_{\alpha=1}^{N} \delta w_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{r=1}^{3N} F_r \, \delta x_r$$

On convient aussi des définitions suivantes : on appelle *quantité d'accélération*, $\vec{s}_\alpha$, du point matériel P_α le produit de sa masse par son accélération : $\vec{s}_\alpha = m_\alpha \, \vec{a}_\alpha$. La quantité d'accélération du système, $\vec{S}$, sera la somme de toutes les quantités d'accélération de chacun des points matériels qui le constituent :

$$\vec{S} := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \, \vec{a}_\alpha = \sum_{r=1}^{3N} m_r \, \ddot{x}_r$$

Et on appelle *travail virtuel élémentaire des quantités d'accélération* du système la grandeur élémentaire :

$$\delta \mathfrak{a} := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \, \vec{a}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{r=1}^{3N} m_r \, \ddot{x}_r \, \delta x_r$$

Comme à l'instant t choisi, chaque quantité d'accélération $m_\alpha \, \vec{a}_\alpha$ prend la valeur indiquée par l'équation de Newton, $m_\alpha \, \vec{a}_\alpha \doteq \vec{F}_\alpha$, on peut écrire :

$$\delta \mathfrak{a} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \, \vec{a}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha \doteq \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \delta w$$

Ce résultat s'énonce sous la forme d'un théorème :

> ***Théorème (Principe de D'Alembert)*** : Lors de déplacements virtuels arbitraires opérés sur un

système quelconque de N points matériels, le travail virtuel élémentaire des quantités d'accélération du système est égal, à chaque instant, au travail virtuel de toutes les forces mises en jeu pour décrire le mouvement du système : $\delta\mathfrak{a} \doteq \delta w$.

On envisage maintenant la réciproque de ce théorème aux apparences simplistes. Si, à chaque instant, on a : $\delta\mathfrak{a} \doteq \delta w$, alors on peut écrire :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{F}_\alpha - m_\alpha\, \vec{a}_\alpha\right) \cdot \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{r=1}^{3N} (F_r - m_r\, \ddot{x}_r)\, \delta x_r \doteq 0$$

Et puisque les déplacements virtuels synchrones $\delta\vec{r}_\alpha$ (ou δx_r) envisagés sont arbitraires, il faut nécessairement que chaque terme en facteur des $\delta\vec{r}_\alpha$ (ou des δx_r) dans la somme soit nul ; c'est-à-dire que pour tout α (ou pour tout r), il faut :

$$\vec{F}_\alpha \doteq m_\alpha\, \vec{a}_\alpha \quad (F_r \doteq m_r\, \ddot{x}_r)$$

De la sorte, le théorème précédent est équivalent à la seconde loi de Newton. Adopté en lieu et place de cette seconde loi, le théorème prend le nom de *principe de D'Alembert* ou encore *principe des travaux virtuels*.

Tel qu'il vient d'être énoncé, le principe de D'Alembert fait appel à des déplacements virtuels du système arbitraires. Mais il peut se décliner dans une variante aux conséquences fort pratiques en exploitant toute la latitude que l'on a dans le

choix d'un jeu de déplacements virtuels satisfaisant à certaines conditions ; en particulier celles de respecter les liaisons imposées au système. Dans ce cas en effet, le travail virtuel des forces de liaison est nul comme on le justifie au **3** et on peut alors ne pas tenir compte de ces forces dans le bilan des forces $\vec{F}_\alpha$.

3. Travail virtuel des forces de liaison. On considère d'abord le cas d'un seul point matériel : une liaison que l'on peut imposer à ce système consiste souvent à restreindre ses mouvements le long d'une courbe ou au sein d'une surface particulière. Selon la définition du chapitre 1, la force qui concourt au maintien de cette liaison ne doit servir qu'à empêcher le point matériel de quitter la courbe ou la surface correspondante. Ainsi, si on envisage un déplacement virtuel du point matériel qui le fasse quitter cette surface, il est clair que le travail virtuel élémentaire réalisé par la force de liaison sera non nul. A l'inverse, si on envisage un déplacement virtuel élémentaire pour lequel le point matériel continue d'évoluer sur cette surface, alors le travail virtuel élémentaire réalisé par la force de liaison sera forcément nul, sans quoi on devrait conclure que cette force influe aussi sur le mouvement du point matériel au sein même de la surface imposée, ce qui contredit la définition d'une force de liaison. *On dit d'un tel déplacement qu'il respecte la liaison imposée ou encore qu'il est compatible avec cette liaison.*

Il est facile de voir que le raisonnement précédent reste valable dans un point de vue plus général ; par conséquent : *le travail virtuel élémentaire effectué par des forces de liaison est toujours nul pour des déplacements (virtuels ou réels) du système compatibles avec la liaison à laquelle sont associées ces forces.*

4. Principe de D'Alembert et liaisons. Le principe de D'Alembert énoncé au **2** s'applique à tout système de N points matériels, qu'il y ait des liaisons imposées ou non. S'il existe des liaisons, alors on peut décomposer les forces $\vec{F}_\alpha$ en deux classes : les forces associées aux diverses liaisons vis-à-vis desquelles le point P_α est impliqué, $\vec{F}_{\alpha,L}$, et toutes les autres forces, que l'on peut qualifier d'*agissantes* et qui sont vues comme des données du problème, $\vec{F}_{\alpha,A}$. La seconde loi de Newton s'écrit donc :

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_{\alpha,L} + \vec{F}_{\alpha,A} \doteq m_\alpha \, \vec{a}_\alpha$$

On envisage maintenant un jeu de déplacements virtuels $\delta\vec{r}_\alpha$ compatible avec toutes les liaisons imposées au système. Le travail virtuel élémentaire développé par toutes les forces de liaison est alors nul et on aboutit donc au résultat suivant :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{F}_{\alpha,A} - m_\alpha \, \vec{a}_\alpha\right) \cdot \delta\vec{r}_\alpha \doteq 0$$

Il serait faux ici de conclure que chaque terme en facteur des $\delta\vec{r}_\alpha$ s'annule puisque ces $\delta\vec{r}_\alpha$ ne forment pas un système de déplacements virtuels indépendants. Du point de vue pratique, il serait nécessaire maintenant d'écrire

explicitement les équations de liaisons et de regarder comment ces équations rendent les $\delta\vec{r}_\alpha$ dépendants les uns des autres pour ne conserver que la fraction d'entre eux susceptible de former un tel jeu de déplacements indépendants. Alors, et seulement alors, on pourra annuler chaque terme de la somme en facteur de chacun de ces déplacements indépendants. Cela peut être une tâche ardue, mais en échange les forces de liaison auront complétement disparu des équations qui vont survenir.

En résumé, on peut donc énoncer une variante du principe de D'Alembert sous la forme suivante :

> ***Principe de D'Alembert (variante)*** : Lors de déplacements virtuels compatibles avec toutes les liaisons imposées à un système de N points matériels, le travail virtuel élémentaire des quantités d'accélération de ce système est égal, à chaque instant, au travail virtuel élémentaire des seules forces agissantes : $\delta\mathfrak{a} \doteq \delta w_A$

5. Le principe de D'Alembert en coordonnées généralisées.
Le passage des coordonnées primaires x_r aux coordonnées généralisées q_i se résume par la relation : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, t)$. Un déplacement virtuel synchrone δx_r peut donc s'exprimer en fonction de déplacements virtuels synchrones δq_i réalisés sur les q_i :

$$\delta x_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_r}{\partial q_i}\, \delta q_i \qquad\qquad \forall\, r = 1,2,\dots,3N$$

Il faut noter que la contribution : $\delta t\,.\,\partial x_r/\partial t$ à cette formule différentielle est nulle puisque $\delta t = 0$.

Ce faisant, le travail virtuel élémentaire effectué par l'ensemble des forces $\vec{F}_\alpha$ sous l'effet des déplacements virtuels δq_i s'écrit :

$$\delta w := \sum_{r=1}^{3N} F_r\, \delta x_r = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{3N} F_r\, \frac{\partial x_r}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i\, \delta q_i$$

Après avoir reconnu les forces généralisées $\mathcal{F}_i$.
Quant au travail virtuel élémentaire des quantités d'accélération du système, on montre sans peine qu'il devient :

$$\delta \mathfrak{a} := \sum_{r=1}^{3N} m_r\, \ddot{x}_r\, \delta x_r = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

après s'être souvenu de l'égalité de Lagrange obtenue au 3.**3**.

Ce résultat permet une interprétation physique du terme entre parenthèses dans l'expression ci-dessus. On remarque d'abord que les quantités $-\,m_r\, \ddot{x}_r$ peuvent être vues comme des forces d'inerties venant compenser à chaque instant les forces F_r auxquelles est soumis le système, de façon à ce que la loi de la dynamique écrite sous la forme : $F_r - m_r\, \ddot{x}_r \doteq 0$, soit vérifiée. Dans ce cadre, les quantités $d/dt\ (\partial T/\partial \dot{q}_i) - \partial T/\partial q_i$ - chacune relative à la variable q_i - sont alors des *forces*

inertielles généralisées associées aux forces d'inertie $-\, m_r\, \ddot{x}_r$ (au même titre que les $\mathcal{F}_i$ vis-à-vis des F_r).

En coordonnées généralisées, l'application du principe de D'Alembert (sous l'un ou l'autre de ses énoncés) conduit donc à l'expression :

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\mathcal{F}_i - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i \doteq 0$$

A ce stade, il faut discuter du nombre de variables q_i mises en jeu dans le problème et des éventuelles liaisons auxquelles le système est soumis avant de conclure.

Cas sans liaisons – S'il n'y a pas de liaisons imposées, le nombre de variables q_i est égal au nombre de degrés de liberté du système : $n = n_\ell = 3N$, qui est aussi le nombre de variables x_r. En envisageant des déplacements virtuels arbitraires pour les q_i, il s'ensuit que chaque terme en facteur des δq_i doit s'annuler et, par application du principe de D'Alembert, on déduit les équations de Lagrange de première espèce pour tout i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \doteq \mathcal{F}_i$$

avec cette fois une interprétation physique très claire de ces équations : chaque force généralisée $\mathcal{F}_i$ est compensée à chaque instant par la force inertielle généralisée qui lui correspond : $d/dt\ (\partial T/\partial \dot{q}_i) - \partial T/\partial q_i$.

On remarquera qu'il y a ici autant d'équations de Lagrange que d'équations de Newton ($F_r \doteq m_r\, \ddot{x}_r$).

Cas avec liaisons : première attitude – Si le système est soumis à des liaisons, alors la première attitude consiste à prendre en compte toutes les équations de liaison lors du passage des coordonnées primaires x_r aux coordonnées généralisées q_i (voir 1.**3**). Si K est le nombre de ces équations, alors le nombre de coordonnées q_i est égal au nombre de degrés de liberté du système : $n = n_\ell = 3N - K$, et forment un jeu de variables indépendantes, ce que ne forment pas les x_r au nombre (surabondant) de $3N$. Ainsi, des déplacements virtuels arbitraires sur les q_i n'empêchent pas les équations de liaison d'être vérifiées (ce qui n'est pas vrai pour les x_r) : le principe de D'Alembert permet cette fois encore d'établir les équations de Lagrange pour tout i :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \doteq \mathcal{F}_i$$

Mais il faut remarquer que ces équations sont seulement au nombre de $n = 3N - K$, tandis que les équations de Newton sont toujours au nombre de $3N$. L'explication de cet apparent mystère tient dans le fait que les forces de liaison, qui jouent le rôle de variables auxiliaires dans les équations de Newton afin de prendre en compte les liaisons existantes, n'apparaissent pas dans les équations de Lagrange qui viennent d'être établies. En effet, les forces généralisées sont définies comme (revoir 3.**3**) :

$$\mathcal{F}_i := \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,L} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,A} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i}$$

Mais puisque les déplacements virtuels $\delta\vec{r}_\alpha$ envisagés ici respectent les liaisons, le travail virtuel élémentaire des forces qui leur sont associées est forcément nul, ce qui impose :

$$\delta w_L := \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,L} \cdot \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,L} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \, \delta q_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,L} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0$$

Comme les δq_i sont arbitraires, chaque terme de cette somme sur i doit s'annuler ; il en résulte que les forces généralisées s'écrivent en fonction des forces agissantes seulement :

$$\mathcal{F}_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,A} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i}$$

Les $n = 3N - K$ équations de Lagrange ne contiennent donc pas les forces de liaisons, et leur résolution va bien permettre de déterminer l'ensemble des q_i en fonction du temps (et donc les x_r). On n'aura toutefois aucune information sur la valeur des forces de liaison par cette méthode.

Cas avec liaisons : seconde attitude – Dans la seconde attitude, on ne prend en compte que K' équations de liaison lors du passage aux q_i parmi les K existantes. Le jeu de variables q_i est alors surabondant puisqu'il est au nombre de $n = 3N -$

$K' = n_\ell + K - K'$; de même que les x_r toujours au nombre de $3N$. Comme précédemment, on peut bien envisager un jeu de déplacements virtuels arbitraire des q_i et obtenir maintenant $n = 3N - K'$ équations de Lagrange de première espèce. Mais ces équations sont en nombre insuffisant... En effet, si des déplacements virtuels arbitraires de l'ensemble des q_i entraînent bien un travail virtuel élémentaire nul pour les forces de liaison associées aux K' équations prises en compte, il reste que celui réalisé par les forces associées aux $K - K'$ équations de liaison restantes ne l'est pas. Ces forces inconnues subsistent donc dans l'écriture des forces généralisées $\mathcal{F}_i$ et le nombre de quantités inconnues à déterminer s'avère ainsi supérieur au nombre d'équations de Lagrange à notre disposition... Toutefois, il reste encore les $K - K'$ équations de liaison non prises en compte qu'il convient d'exploiter. Ces équations complètent les équations de Lagrange et permettent de déterminer les q_i en fonction du temps ainsi que les forces de liaison qui figurent dans les $\mathcal{F}_i$.

6. Multiplicateurs de Lagrange. Dans les systèmes mécaniques complexes, il arrive que l'on ne sache pas deviner l'orientation (et encore moins la valeur) des forces de liaison, orientation qui s'obtient souvent en imposant à ces forces de réaliser un travail nul pour des déplacements respectant la liaison à laquelle elles sont associées. Lagrange a inventé une méthode qui permet en partie de se passer de cet art. L'intérêt de la méthode des multiplicateurs de Lagrange est qu'elle

s'étend à tout problème pour lequel une (ou plusieurs) condition auxiliaire doit être vérifiée.
Il existe deux façons de traiter la méthode des multiplicateurs. La première, historique et encore souvent utilisée, est de traiter les multiplicateurs qui vont être introduits comme des paramètres arbitraires pour lesquels on fera un choix particulier. La seconde prend le parti de considérer les multiplicateurs comme des nouvelles variables indépendantes que l'on introduit dans le problème. Dans ce dernier cas, les équations de liaison découlent directement de la variation virtuelle de ces multiplicateurs.

Les multiplicateurs en tant que paramètres ajustables - Soit un jeu de variables q_i obtenu après avoir pris en compte toutes les équations de liaison imposées dans le problème sauf une, que l'on écrit : $f(\boldsymbol{q}, t) = 0$. Ce jeu de variables est donc surabondant : $n = n_\ell + 1$. L'idée de Lagrange est d'employer le principe de D'Alembert sous sa variante énoncée au **4**, c'est-à-dire d'envisager des déplacements virtuels δq_i qui respectent toutes les liaisons du problème y compris la dernière. Le principe ($\delta \mathfrak{a} \doteq \delta w_A$) énonce alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\mathcal{F}_i - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i \doteq 0$$

où ne figurent que les forces agissantes dans les $\mathcal{F}_i$. Mais on ne peut pas annuler ici chaque terme en facteur des δq_i puisque ces derniers sont liés entre eux *via* la liaison $f(\boldsymbol{q}, t) = 0$ qui leur impose :

$$\delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\, \delta q_i = 0$$

Toutefois, au lieu de rendre nulles séparément les deux sommes qui viennent d'être écrites, on peut tout aussi bien rendre nulle toute combinaison linéaire de ces deux sommes ; ce qui se traduit par :

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\lambda\, \frac{\partial f}{\partial q_i} + \mathcal{F}_i - \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\right] \delta q_i \doteq 0$$

où λ est un paramètre quelconque, appelé *multiplicateur*, qui peut dépendre du temps. Ce paramètre est tout à notre convenance.

On ne peut toujours pas annuler chaque terme en facteur des δq_i dans la somme qui vient d'être écrite, mais on peut cette fois choisir λ de telle sorte qu'il annule par exemple le $n$ième terme de cette somme ; on a ainsi :

$$\lambda\, \frac{\partial f}{\partial q_n} + \mathcal{F}_n - \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_n}\right) = 0$$

et il ne reste plus qu'à annuler une somme de $n - 1 = n_\ell$ termes :

$$\sum_{i=1}^{n-1=n_\ell} \left[\lambda\, \frac{\partial f}{\partial q_i} + \mathcal{F}_i - \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\right] \delta q_i \doteq 0$$

Mais alors, on peut bien considérer que les n_ℓ déplacements virtuels δq_i qui subsistent dans cette somme sont arbitraires (ils respectent donc toutes les liaisons du système sauf une) et

que le respect de la dernière équation de liaison est assuré par la valeur de δq_n qui s'exprime en fonction de tous les autres δq_i au travers de l'équation $\delta f = 0$. Moyennant cette observation, il est donc licite d'annuler chaque terme de la somme qui précède :

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial q_i} + \mathcal{F}_i - \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \doteq 0, \qquad i = 1, \dots, n-1$$

de sorte qu'au final, tout se passe comme si on annulait directement les n termes de la somme initiale, la présence du multiplicateur λ assurant la cohérence de la procédure :

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial q_i} + \mathcal{F}_i - \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \doteq 0, \qquad i = 1, \dots, n$$

Ces équations sont appelées équations de Lagrange avec multiplicateur(s). Le nombre d'équations obtenues est n pour un nombre d'inconnues $n + 1$: les q_i et le multiplicateur λ. Mais il reste à notre disposition l'équation de liaison $f(\boldsymbol{q}, t) = 0$ qui vient compléter le problème.

On traite de la même façon le cas de plusieurs équations de liaison qui n'auraient pas été prises en compte lors du passage aux q_i en introduisant autant de multiplicateurs que d'équations. La méthode fonctionne également pour le cas de liaisons cinématiques linéaires en $\dot{\boldsymbol{q}}$.

Les multiplicateurs en tant que nouvelles variables indépendantes – Dans cette seconde façon de voir, on considère toujours le jeu de variables q_i obtenu après avoir

pris en compte toutes les liaisons sauf la liaison $f(\boldsymbol{q}, t) = 0$. Mais, on fait maintenant comme si cette liaison n'était pas donnée à l'avance. En compensation, on introduit un multiplicateur λ que l'on considère cette fois comme une nouvelle variable indépendante susceptible de subir des déplacements virtuels au même titre que les q_i. On écrit ensuite la première variante du principe de D'Alembert modifiée de la façon suivante :

$$\delta w - \delta \mathfrak{a} + \delta\big(\lambda\, f(\boldsymbol{q}, t)\big) \doteq 0$$

qui implique :

$$\left[\lambda\, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\mathcal{F}} - \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}}\right)\right] \cdot \delta \boldsymbol{q} + f(\boldsymbol{q}, t)\, \delta\lambda \doteq 0$$

Ici, les n déplacements virtuels δq_i sont tous choisis arbitraires et, puisque la liaison n'existe pas encore, les forces généralisées $\mathcal{F}_i$ ne contiennent - comme pour la première façon de faire - que les forces agissantes du problème. La variation $\delta\lambda$ envisagée est arbitraire également. On peut donc rendre nuls tous les facteurs figurant devant les variations de la somme précédente, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda\, \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\mathcal{F}} - \left(\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}}\right) \doteq \boldsymbol{0} \\ f(\boldsymbol{q}, t) \doteq 0 \end{cases}$$

On obtient bien les mêmes équations que précédemment mais avec un raisonnement plus synthétique au prix d'une modification du principe de D'Alembert.

Interprétation des multiplicateurs – On interprète aisément le multiplicateur introduit dans les deux façons de faire quand on pense à ce que seraient les équations de Lagrange si, sans introduire de multiplicateur, on avait envisagé des déplacements virtuels arbitraires pour tous les q_i. Le principe de D'Alembert ($\delta\mathfrak{a} \doteq \delta w$) donne dans ce cas, pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \doteq \mathcal{F}_i'$$

où dans les forces généralisées $\mathcal{F}_i'$ figurent cette fois, en plus des forces agissantes, les forces de liaison associées à l'équation de liaison non prise en compte. En notant ces forces de liaison $\vec{R}_\alpha$, on a ainsi :

$$\mathcal{F}_i' = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{R}_\alpha \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,A} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{R}_\alpha \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} + \mathcal{F}_i$$

où les $\mathcal{F}_i$ sont les forces généralisées pour les équations de Lagrange avec multiplicateur précédentes. En comparant ces équations avec les équations de Lagrange qui viennent d'être écrites, on conclut immédiatement pour tout i :

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{R}_\alpha \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} := \mathcal{F}_i^{liaison}$$

Le multiplicateur de Lagrange est donc en lien plus ou moins direct avec les forces de liaison associées à l'équation de liaison non prise en compte lors du passage aux q_i. Sa connaissance entraîne la connaissance des $\vec{R}_\alpha$ (moyennant

parfois quelques raisonnements supplémentaires relativement à leur directions et leurs intensités relatives).

7. Résumé pratique. Les équations de Lagrange découlent du principe de D'Alembert. Leur nombre dépend des éventuelles liaisons qui sont imposées dans le problème à N corps considéré.

S'il n'y a pas de liaisons imposées, on dispose de $n_\ell = 3N$ équations de Lagrange qui permettent de déterminer les q_i en fonction du temps.

S'il y a des liaisons imposées, alors deux attitudes sont possibles :

Soit on prend en compte toutes les équations de liaison (au nombre de K) lors du passage aux q_i : on dispose alors de $n_\ell = 3N - K$ équations de Lagrange qui permettent d'obtenir les q_i en fonction du temps ; mais on n'aura aucune information sur les forces de liaison. Il est inutile de tenir compte de ces forces de liaison lors de la détermination des forces généralisées $\mathcal{F}_i$ car celles-ci ne s'expriment au final qu'en fonction des forces agissantes du problème.

Soit on ne prend en compte qu'une partie (K') des équations de liaison lors du passage aux q_i : on dispose alors de $n = 3N - K'$ équations de Lagrange avec ou sans multiplicateurs complétées par les $K - K'$ équations de liaison restantes, l'ensemble devant permettre d'obtenir les q_i en fonction du temps ainsi que les forces de liaison associées à ces $K - K'$ équations. Si les équations de Lagrange sont sans multiplicateurs, il faut prendre en compte ces forces de liaison

dans la détermination des $\mathcal{F}_i$. Si les équations de Lagrange sont avec multiplicateurs, la détermination des $\mathcal{F}_i$ s'effectue à l'aide seulement des forces agissantes ; les forces de liaison seront connues une fois que les multiplicateurs seront connus en fonction du temps.

Chapitre 6

PRINCIPE DE HAMILTON

Lorsque l'on peut définir un lagrangien pour le problème à N corps considéré, les équations de Lagrange peuvent s'obtenir en cherchant à rendre stationnaire l'intégrale de ce lagrangien prise sur un certain intervalle de temps : c'est le principe de Hamilton.

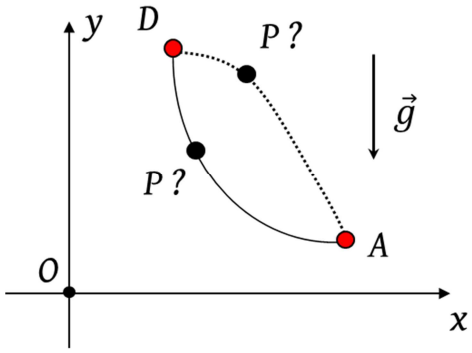
1. Rendre une intégrale stationnaire. On considère le problème mathématique suivant. Soit l'intégrale :

$$I[y] := \int_{x_D}^{x_A} F(x, y, y')\, dx$$

où x est la variable indépendante, $y = y(x)$ une fonction régulière de x, et $y' = y'(x)$ sa dérivée par rapport à x. F est une fonction connue de x, y, y', et x_D, x_A sont deux bornes d'intégrations arbitraires mais données.
La question posée est : parmi toutes les fonctions y qui vérifient les conditions aux limites : $y(x_D) = y_D$ et $y(x_A) = y_A$, où y_D et y_A sont données, quelle est celle, y_0, qui minimise ou maximise l'intégrale ci-dessus ?

On remarque que I dépend de l'ensemble des valeurs prises par la fonction y entre les bornes x_D et x_A : on dit alors de I qu'elle est une *fonctionnelle* de y : $I[y]$, et on dit de y_0 qu'elle rend l'intégrale $I[y]$ *stationnaire*.

Exemple historique : la brachistochrone – En juin 1696, Jean Bernoulli proposa le problème suivant : étant donnés deux points D et A situés dans un plan vertical, quelle doit être la trajectoire d'un point matériel P pour que, partant du point D, il atteigne le plus rapidement possible le point A sous le seul effet de son poids ? Leibniz avait déjà donné une solution à ce problème.



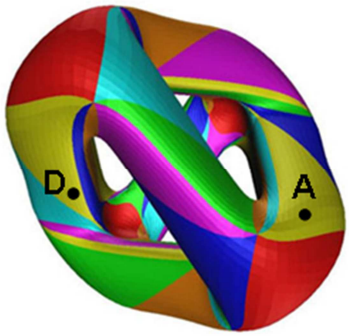
Newton, L'Hospital, Jean et Jacques Bernoulli en fournirent une également. Cette courbe-solution, la brachistochrone en trait plein sur le dessin, rend stationnaire l'intégrale I précédente en prenant :

$$F = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{C - y}}$$

où C est une constante qui dépend des conditions initiales.

Exemple géométrique : géodésiques – Soit à trouver la courbe de longueur minimale qui joint deux points D et A du plan. Là encore le problème revient à rendre stationnaire l'intégrale I avec cette fois : $F = \sqrt{1 + y'^2}$. Naturellement, la solution attendue en géométrie euclidienne est la ligne droite qui joint D à A. Mais si D et A sont maintenant situés sur une surface particulière (une sphère, une selle de cheval, etc...), et que pour joindre ces deux points on ne puisse se déplacer que sur

cette surface, le problème peut devenir plus complexe. On appelle la courbe cherchée *la ligne géodésique* qui relie D à A.

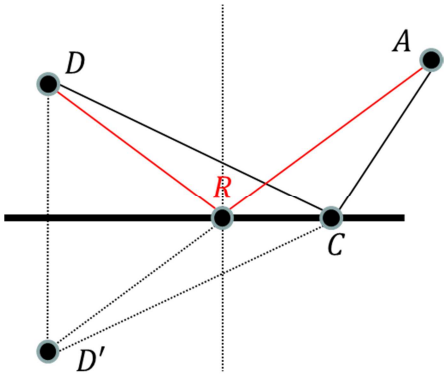


Dans tous les cas, on est encore amené à rendre stationnaire l'intégrale I où les variables x et y n'ont plus la même signification : dans le cas d'une surface sphérique, x représentera l'angle polaire θ, y l'angle azimutal φ, et la fonction F aura pour expression : $F = \sqrt{1 + y'^2 \, sin^2 x}$.

Le problème posé va déboucher sur une équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction-solution y_0 : c'est l'équation d'Euler. Avant d'en aborder la démonstration, on donne ici un autre exemple où cette fois la minimisation de l'intégrale I fait office de principe physique.

2. Les principes de Héron et de Fermat en optique géométrique. Les quatre ouvrages attribués à Héron d'Alexandrie (-125 ?, +100 ?) font de lui un précurseur de la physique moderne. Dans son *Catoptrica*, il énonce les lois de la réflexion lumineuse selon le principe que *le chemin suivi par la lumière est toujours celui de plus courte distance*. De ce principe découle le fait expérimental que la lumière se propage en ligne droite. Pour démontrer la loi de la réflexion, Héron opère de la façon qui suit.

Soient une source de lumière en D, un miroir plan, et un récepteur en A. Héron considère alors l'ensemble de tous les chemins que pourrait prendre un rayon lumineux pour aller de D à A en passant par le miroir. Tous ces chemins sont caractérisés par un point courant (C) appartenant au miroir qui apparaît ici comme une contrainte imposée au trajet du rayon lumineux.

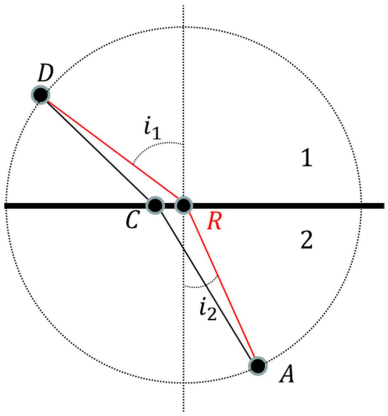


A partir de la géométrie euclidienne, Héron démontre que parmi tous ces trajets imaginaires (virtuels) – les lignes brisées (DCA) - il en existe un plus court que tous les autres : (DRA). Selon le principe annoncé, ce chemin doit être celui réellement pris par la lumière. Or, pour ce chemin, l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence ; ce qu'il fallait démontrer. Pour en faire la démonstration explicite, on pourra s'inspirer des symétries indiquées par les lignes pointillées sur le dessin.

Le principe de Héron d'Alexandrie ne tient pas pour le phénomène de réfraction de la lumière qui a lieu dans des milieux inhomogènes : on se convainc facilement qu'il conduit à la relation fausse $i_1 = i_2$. C'est en 1657 que Pierre de Fermat pense à rendre minimale, non pas la distance parcourue par la lumière entre les deux points D et A, mais la durée du trajet entre ces deux points : guidé par « *le principe si commun et si*

établi que la nature agit toujours par les voies les plus courtes », Fermat pense qu'en raison de la différence de vitesse de la lumière dans les différents milieux qu'elle traverse, le chemin le plus court n'est pas forcément celui de moindre durée ; car pour minimiser la durée totale de son trajet, la lumière devra rester le plus longtemps possible dans le milieu qui lui offre le moins de résistance. Fermat énonce donc le principe suivant qui fonde encore aujourd'hui toute l'optique géométrique :

> ***Principe de Fermat*** : Le trajet suivi par un rayon lumineux pour se rendre d'un point D à un point A est celui dont la durée est stationnaire.



Pour démontrer la validité de son hypothèse, Fermat s'attache à prouver la loi de la réfraction selon le mode opératoire suivant. Soient deux milieux homogènes 1 et 2 au sein desquels la lumière se propage avec les vitesses respectives v_1 et v_2. Dans chacun des deux milieux, la lumière se propage en ligne droite en vertu du principe de Fermat. La source de lumière est en D dans le milieu 1. On appelle R le point de la ligne de séparation entre les deux milieux par lequel passe effectivement la lumière et on trace un cercle de rayon $|DR|$ centré en R. On peut considérer que le point A est situé à l'intersection de ce cercle avec la trajectoire suivie dans le milieu 2. Selon le principe de Fermat, le trajet (DRA) se réalise en une durée, T_{DRA}, plus courte que

tout autre trajet que l'on pourrait imaginer. On considère alors un point C infiniment voisin de R ($CR = \varepsilon$). La durée, T_{DCA}, que mettrait le rayon lumineux s'il empruntait le chemin virtuel (DCA) ne doit alors différer de T_{DRA} que par un terme du second ordre en ε : en effet, lorsqu'une fonction f admet un extremum en x_0, alors $f'(x_0) = 0$ et on peut écrire au voisinage de x_0 : $f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + \varepsilon^2 f''(x_0)/2$. Par suite, on doit avoir ici :

$$\delta T := T_{DCA} - T_{DRA} + O(\varepsilon^2)$$

Or, un calcul géométrique simple montre que cette différence de durées vaut, à l'ordre 1 en ε :

$$\delta T = T_{DCA} - T_{DRA} = \left[\frac{sin\ i_2}{v_2} - \frac{sin\ i_1}{v_1}\right] \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

De sorte que pour satisfaire au principe de Fermat, il faut que le chemin réel (DRA) obéisse à la loi de la réfraction :

$$n_1\ sin\ i_1 = n_2\ sin\ i_2$$

où n_1 et n_2 sont les indices de réfraction de la lumière dans les milieux 1 et 2. Ces indices s'avèrent être inversement proportionnels aux vitesses [1] ($n = c/v$).

---

[1] ***Note historique*** : Dans une lettre adressée à C. de la Chambre datée du 1er janvier 1662, Fermat écrit : *« Le prix de mon travail a été le plus extraordinaire, le plus imprévu et le plus heureux qui fût jamais. Car… j'ai trouvé que mon principe donnait justement et précisément la même proportion des réfractions* [loi des sinus] *que M. Descartes a établie. J'ai été si surpris d'un événement si peu attendu que j'ai peine à revenir de mon étonnement. ».* Mais avec cette formulation de la loi de la réfraction, Fermat se voit obligé d'admettre *« que le passage de la lumière par les corps denses soit plus malaisé que par les rares »* [i.e. si $n_1 > n_2$ alors $v_1 < v_2$], ce qu'il estime *« très vrai et indispensable ».* Or, cette conclusion contredit la théorie corpusculaire de la lumière développée à cette époque par René Descartes en particulier, puis par Isaac Newton un peu plus tard. Cette théorie suppose la lumière constituée de "grains matériels" sur lesquels agissent des forces inhérentes au milieu et que caractérise l'indice de réfraction. Dans cette théorie, on est conduit à admettre le résultat inverse

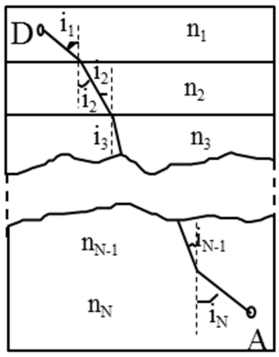
On aura noté que les deux démonstrations qui ont accompagné les principes de Héron et de Fermat utilisent la notion de chemin imaginaire, qui a été immédiatement qualifié de virtuel car il s'agit bien de la même notion de déplacement virtuel que celle qui a été employée au chapitre 5 ; simplement, les chemins virtuels utilisés ici sont issus d'une succession continue de déplacements virtuels élémentaires, analogues au chapitre 5, qui finissent par former une courbe (ici des droites brisées) virtuelle.

Par ailleurs, ces deux démonstration relèvent d'un cas où les indices de réfraction sont constants ; les trajectoires potentielles sont donc connues à l'avance : il s'agit des lignes brisées joignant D à A. Si maintenant les points D et A se situent dans un milieu inhomogène où l'indice de réfraction varie continûment d'un endroit à l'autre, on peut résoudre le problème de la façon qualitative suivante : découpons le milieu inhomogène en N milieux que l'on pourra considérer homogènes. Au passage entre chaque milieu ainsi défini, le

---

de ce que l'on vient de trouver, à savoir que la lumière se propagerait plus vite dans les milieux les plus réfringents [i.e. les plus denses]. C'est donc le problème de la nature physique de la lumière qui est posé. Les cartésiens ne seront pas convaincus par la démonstration de Fermat, en dépit de sa rigueur mathématique: *« Cette voie que vous estimez la plus courte parce qu'elle est la plus prompte, n'est qu'une voie d'erreur et d'égarement que la Nature ne suit point... »* [Lettre de Clerselier à Fermat (1662)]. En outre, il faudrait que le rayon *« se souvînt en R qu'il est parti du point D avec ordre d'aller en A, ce qui est imaginaire et nullement fondé en physique... ».* A ses objecteurs, Fermat répondra: *« ...je vous abandonne de bon cœur ma prétendue conquête de la physique, et il me suffit que vous me laissiez en possession d'un problème de géométrie tout pur... ».* En 1682, Leibniz, d'opinion cartésienne, rejettera le principe de Fermat pour envisager un chemin de moindre résistance. C'est Christiaan Huygens qui montrera que sa théorie ondulatoire de la lumière est en accord avec le principe de Fermat. [Dans ce cas, la vitesse dont il est question dans la démonstration ci-dessus s'identifie avec la *vitesse de phase* de l'onde lumineuse]. Expérimentalement, la question fût résolue par Fizeau et Foucault vers 1850 : leurs expériences donnèrent raison à Fermat ; la théorie corpusculaire, déjà bien en peine d'expliquer les phénomènes d'interférences, fût dès lors abandonnée.

rayon lumineux suivra la loi de la réfraction et la trajectoire totale sera la somme de toutes les petites lignes brisées obtenues de cette manière.



Il reste à faire tendre N vers l'infini pour obtenir une courbe continue.

La traduction mathématique de ce raisonnement est la suivante : donnons-nous un milieu d'indice n connu en fonction de la position où l'on se trouve dans ce milieu : $n = n(x, y)$. Soit maintenant ds l'arc de courbe élémentaire associé à un chemin virtuel $y = y(x)$ pour aller du point D au point A de ce milieu. Cet arc de courbe n'est rien d'autre que la distance élémentaire parcourue le long de la trajectoire pendant une durée dt à la vitesse : $v = c/n\big(x, y(x)\big)$. La durée totale du trajet est donc :

$$T = \int_{t_D}^{t_A} dt = \int_D^A \frac{n}{c}\, ds$$

Selon le principe de Fermat, la trajectoire réelle du rayon lumineux sera celle qui minimise T ; ce sera donc la courbe qui passe par les points D et A, et qui rend stationnaire l'intégrale :

$$I[y] = \int_{x_D}^{x_A} n(x, y)\, \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

C'est le problème cité dans l'introduction et la façon de le résoudre formellement va faire appel ici au *calcul variationnel*

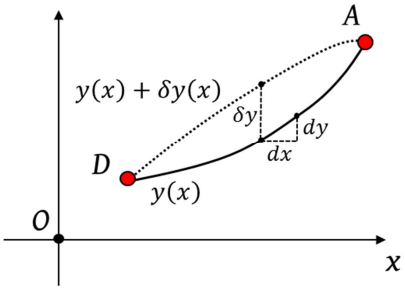
qui consiste à travailler, comme sur les exemples qui viennent d'être traités, avec un ensemble de courbes virtuelles voisines de la solution ; ces courbes étant générées, pour chaque valeur de x, par un déplacement virtuel élémentaire effectué sur une courbe voisine.

3. Calcul variationnel. Equation d'Euler. Soit donc à trouver la fonction $y_0(x)$ qui rend stationnaire l'intégrale :

$$I[y] := \int_{x_D}^{x_A} F(x, y, y')\, dx$$

et qui vérifie les conditions aux limites : $y_0(x_D) = y_D$ et $y_0(x_A) = y_A$.

On considère alors l'écart entre la valeur de I calculée pour une certaine fonction $y(x)$ vérifiant les conditions aux limites et celle calculée pour une fonction infiniment voisine $y(x) + \varepsilon\, \phi(x)$, où ε est aussi petit que l'on veut, et ϕ une fonction arbitraire de x (suffisamment régulière). On appelle variation première de I, notée δI, cet écart obtenu lorsque l'on s'arrête à l'ordre 1 en ε ; et on dira de cette variation première qu'elle est due à une variation $\delta y = \varepsilon\, \phi$ de la fonction y. L'intégrale I sera dite stationnaire si δI est nulle à l'ordre 1 en δy.



Comme au chapitre 5, il est important de faire la distinction entre les notations dy et δy : dy est une « variation » de

$y = y(x)$ due à une « variation » dx de x, tandis que δy est une variation de y au sens où l'on change de fonction : on passe de $y(x)$ à $y(x) + \delta y(x) = (y + \delta y)(x)$ pour toutes les valeurs de x : cette opération sur y se réalise à x constant. Par ailleurs, la fonction $(y + \delta y)$ doit aussi vérifier les conditions aux limites ; il en résulte que : $\delta y(x_D) = \delta y(x_A) = 0$.

Dans ces conditions, la variation première de I au voisinage d'une fonction y devient :

$$\delta I := I(y + \delta y) - I(y) = \int_{x_D}^{x_A} F(x, y + \delta y, (y + \delta y)')\, dx - \int_{x_D}^{x_A} F(x, y, y')\, dx$$

Comme F est une fonction de x, y et y', le développement de Taylor de $F(x, y + \delta y, (y + \delta y)')$ à l'ordre 1 s'écrit :

$$F(x, y + \delta y, (y + \delta y)') = F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y}\, \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\, \delta y'$$

En effet, d'une part : $(\delta y)' = (\varepsilon\, \phi)' = \varepsilon\, \phi' = \delta y'$, et d'autre part, la variation δF de F due à la variation δy de y s'est réalisée à x fixé. δx est donc nul et, au final, on aurait pu écrire directement :

$$\delta I = \int_{x_D}^{x_A} \delta F\, dx = \int_{x_D}^{x_A} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\, \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\, \delta y' \right) dx$$

puis, en utilisant la propriété : $\delta y' = (\delta y)'$, intégrer par parties l'expression ci-dessus qui fournit ainsi :

$$\delta I = \int_{x_D}^{x_A} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \delta y \, dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y\right]_{x_D}^{x_A}$$

Les variations étant nulles aux bornes en raison des conditions aux limites imposées, le terme tout intégré disparaît et il ne reste dans l'expression de δI que le terme intégral dans lequel figure en facteur la variation δy. Enfin, comme la variation envisagée est arbitraire entre les deux bornes x_D, x_A, la variation première de I sera nulle si, et seulement si, le terme entre crochets dans l'intégrale est nul, soit :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \doteq 0$$

C'est l'équation d'Euler. Elle se présente comme une équation différentielle du second degré en y. Sa résolution et les conditions aux limites : $y_0(x_D) = y_D$ et $y_0(x_A) = y_A$, fournissent la solution y_0 au problème posé.

On généralise aisément ce résultat au cas où F dépend de n variables indépendantes : $F = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')$. Pour cela, on envisage un ensemble de variations arbitraires $\delta y_i, i = 1, \dots, n$ et on opère le calcul de δI de façon tout à fait similaire à ce qui vient d'être fait. On obtient ainsi une équation d'Euler pour chacune des variables y_i.

4. Principe de Hamilton. On aura bien sûr remarqué que les équations d'Euler obtenues pour n variables y_i sont identiques aux équations de Lagrange pour les n variables q_i en vertu de la transposition de notations suivante :

$x \leftrightarrow t$

$y_i \leftrightarrow q_i$

$F \leftrightarrow L$

On peut donc prendre comme point de départ de la dynamique le principe variationnel suivant :

> ***Principe de Hamilton*** : soit $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ le lagrangien représentant la dynamique d'un système à N corps, et soit $S[\boldsymbol{q}]$ l'intégrale suivante, appelée *intégrale d'action* :
>
> $$S[\boldsymbol{q}] := \int_{t_D}^{t_A} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\, dt$$
>
> Alors les courbes $\boldsymbol{q}(t)$ solutions du problème à N corps sont telles qu'elles rendent cette intégrale stationnaire : $\delta S \doteq 0$.

Partant du principe de Hamilton, on retrouvera les équations de Lagrange en effectuant la même démarche que dans la section précédente. Avec le changement de notations, cela s'écrit :

$$\delta S = \int_{t_D}^{t_A} \delta L\, dt = \int_{t_D}^{t_A} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta \dot{q}_i \right) dt$$

Comme les variations $\delta \dot{q}_i$ sont engendrées par les variations δq_i (en effet : $\delta \dot{q}_i = d(\delta q_i)/dt$), on intègre par parties les termes en $\delta \dot{q}_i$ de l'expression ci-dessus afin qu'il ne reste que des termes facteurs des variations δq_i. On obtient :

$$\delta S = \int_{t_D}^{t_A} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \delta q_i \ dt + \left[\sum_{i=n}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right]_{t_D}^{t_A}$$

Comme les variations sont nulles aux bornes, en raison des conditions aux limites imposées, le terme tout intégré disparaît. Au final, il ne reste dans l'expression de δS que le terme intégral et, puisque les variations δq_i envisagées sont arbitraires entre les deux bornes x_D et x_A, δS sera nulle si, et seulement si, chacun des termes entre crochets est nul, soit :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \doteq 0 \qquad \forall\, i$$

Ce sont bien les équations de Lagrange du problème, aussi appelées équations d'Euler-Lagrange.

Le principe de Hamilton est un principe variationnel intégral qui conduit aux équations de Lagrange. Elles en sont sa traduction locale (au même titre que les équations de Newton). Pour préciser ce que l'on entend par là, on peut raisonner sur le cas d'un seul point matériel :

• La dynamique de Newton fixe la position et la vitesse initiales du point matériel et se pose la question de connaître la trajectoire que va suivre ce point matériel compte tenu des forces en présence. La réponse est : en vertu de la seconde loi de Newton, qui est une loi locale, la vitesse du point matériel se trouve modifiée pendant la durée dt d'une quantité $d\vec{v} = \vec{F}dt/m$; sa trajectoire, caractérisée par le vecteur-

vitesse qui lui est tangent à chaque instant, suit donc cette modification et se construit ainsi de proche en proche.

• La dynamique lagrangienne, sous-tendue par le principe de Hamilton, fixe quant à elle les positions initiale et finale du point matériel et se pose la question du chemin pris par ce point matériel entre ces deux positions, compte tenu du lagrangien qui décrit sa dynamique. La réponse est : parmi l'ensemble des trajectoires possibles, le point matériel adopte celle qui rend stationnaire l'intégrale d'action. Ici, la trajectoire n'est donc pas obtenue de proche en proche mais « d'un seul coup ». Toutefois, cette courbe a ceci de particulier que chacune de ses portions ds est construite pendant dt en conformité avec la seconde loi de Newton (ou plutôt avec son équivalent sous la forme des équations de Lagrange).

5. Du principe de D'Alembert au principe de Hamilton. Tel qu'il a été énoncé, le principe de Hamilton réclame l'existence d'un lagrangien pour le problème à N corps considéré. Dans cette section on regarde comment passer du principe de D'Alembert au principe de Hamilton.

Le principe de D'Alembert stipule que le travail virtuel des quantités d'accélération du système à N corps est égal au travail virtuel de toutes les forces du problème pour des déplacements virtuels arbitraires $\delta\vec{r}_\alpha$:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{F}_\alpha - m_\alpha\, \vec{a}_\alpha\right) \cdot \delta\vec{r}_\alpha \doteq 0$$

On souhaite maintenant intégrer cette équation entre deux instants finis. Les $\delta\vec{r}_\alpha$ étant définis à un instant donné, on les pense maintenant comme prenant une certaine valeur infinitésimale différente à chaque instant : $\delta\vec{r}_\alpha = \delta\vec{r}_\alpha(t)$, pour finalement former une trajectoire virtuelle pour la durée $t_A - t_D$. Cette précision faite, on obtient ainsi :

$$\int_{t_D}^{t_A} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha \; dt - \int_{t_D}^{t_A} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} \cdot \delta\vec{r}_\alpha \; dt \doteq 0$$

En remarquant que la propriété énoncée au **3** : $\delta y' = (\delta y)'$, se traduit ici par $\delta\vec{v}_\alpha = d\,\delta\vec{r}_\alpha/dt$, on peut alors intégrer par partie la seconde intégrale, ce qui donne :

$$\int_{t_D}^{t_A} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha \; dt - \left[\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha\right]_{t_D}^{t_A}$$
$$+ \int_{t_D}^{t_A} \delta\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2\right) dt \doteq 0$$

On impose maintenant aux déplacements virtuels $\delta\vec{r}_\alpha$ envisagés de s'annuler aux bornes : ce qui a pour conséquence d'annuler le terme tout intégré de l'expression ci-dessus. Puis, on émet l'hypothèse que toutes les forces du problème considéré dérivent d'une fonction de force $\mathcal{U}$; l'intégrande de la première intégrale s'identifie alors à la variation $\delta\mathcal{U}$ de $\mathcal{U}$. Enfin, on aura reconnu l'énergie cinétique du problème dans la seconde intégrale. Si bien que le principe de D'Alembert conduit à la condition suivante :

$$\int_{t_D}^{t_A} \delta\mathcal{U}\, dt + \int_{t_D}^{t_A} \delta T\, dt = \delta \int_{t_D}^{t_A} (T + \mathcal{U})\, dt \doteq 0$$

où l'on reconnait le principe de Hamilton pour le lagrangien $L = T + \mathcal{U}$.

6. Le principe de Hamilton avec liaisons. Lorsque des liaisons sont imposées au problème et que les variables q_i ont été construites en tenant compte de toutes ces liaisons (première attitude), alors on se rappelle que ces q_i forment un jeu de variables indépendantes et que des variations arbitraires δq_i peuvent être envisagées. Par ailleurs, seules les forces agissantes interviennent dans le calcul des forces généralisées, et donc dans la construction de $\mathcal{U}$ si ces forces le permettent. En conséquence, il existe bien un lagrangien dans ce cas et, si ce lagrangien est écrit en fonction des variables indépendantes q_i (et non pas en fonction des x_r), le calcul et les raisonnements du **4** peuvent être reproduit à l'identique pour obtenir les équations de Lagrange.

Dans la seconde attitude, le jeu de variables q_i est surabondant et ne forme donc pas un jeu de variables indépendantes. Ainsi, pour pouvoir envisager des variations δq_i arbitraires, il faudrait modifier $\mathcal{U}$ (et donc le lagrangien) pour y inclure des termes dont dériveraient les forces associées aux liaisons non prises en compte, ce qui n'est pas toujours possible. Il faut alors procéder avec la méthode des multiplicateurs, comme on l'a fait avec le principe de D'Alembert.

Les multiplicateurs en tant que paramètres ajustables - On répète ici mot à mot le processus élaboré au chapitre 5 : on dispose d'un jeu de variables $\boldsymbol{q}$ obtenu après avoir pris en compte toutes les équations de liaison imposées du problème sauf une, que l'on écrit : $f(\boldsymbol{q}, t) = 0$. Ce jeu de variables est donc surabondant : $n = n_\ell + 1$. En envisageant des déplacements virtuels $\delta\boldsymbol{q}$ qui respectent toutes les liaisons du problème y compris la dernière, le principe de D'Alembert sous sa variante $\delta\mathfrak{a} \doteq \delta w_A$ assure alors que les seules forces agissantes interviennent. Si celles-ci dérivent d'une fonction de force $\mathcal{U}$, on peut donc construire un lagrangien $L = T + \mathcal{U}$ et, par suite, écrire le principe de Hamilton :

$$\int_{t_D}^{t_A} \delta L \, dt = \cdots = \int_{t_D}^{t_A} \left[\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)\right] \cdot \delta\boldsymbol{q} \, dt \doteq 0$$

Mais on ne peut pas cette fois annuler chaque terme en facteur des variations δq_i dans cette intégrale puisque la liaison $f(\boldsymbol{q}, t) = 0$ leur impose d'être liées conformément à l'équation :

$$\delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \, \delta q_i = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta\boldsymbol{q} = 0$$

C'est-à-dire aussi, puisque cette équation est vraie tout au long du mouvement :

$$\int_{t_D}^{t_A} \lambda \, \delta f \, dt = \int_{t_D}^{t_A} \lambda \, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta\boldsymbol{q} \, dt = 0$$

où λ est un multiplicateur arbitraire qui peut dépendre du temps et qui est tout à notre convenance pour rendre stationnaire la combinaison linéaire :

$$\int_{t_D}^{t_A} \delta L \, dt + \int_{t_D}^{t_A} \lambda \, \delta f \, dt = \int_{t_D}^{t_A} (\delta L + \lambda \, \delta f) \, dt \doteq 0$$

C'est-à-dire :

$$\int_{t_D}^{t_A} \left[\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \right] \cdot \delta \boldsymbol{q} \, dt \doteq 0$$

On ne peut toujours pas annuler chaque terme en facteur des δq_i, mais on peut choisir λ de telle sorte qu'il annule par exemple le $n$ième terme de cette somme ; on a ainsi :

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) + \lambda \, \frac{\partial f}{\partial q_n} = 0$$

Mais alors, selon le même raisonnement qu'au chapitre 5, on peut bien voir les $(n-1)$ variations δq_i qui subsistent dans l'intégrale comme arbitraires : elles respectent donc toutes les liaisons du système sauf une et le respect de cette dernière équation de liaison est assuré par la valeur de δq_n qui s'exprime en fonction de tous ces autres δq_i au travers de l'équation $\delta f = 0$. On peut donc annuler les $(n-1)$ termes en facteur de ces δq_i, de sorte qu'au final, tout se passe comme si on annulait directement les n termes de la somme initiale, la présence du multiplicateur assurant la cohérence de la procédure :

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} = \mathbf{0}$$

Ce sont les équations de Lagrange (de seconde espèce) avec multiplicateur(s). Les n équations obtenues sont complétées par l'équation de liaison $f(\boldsymbol{q}, t) = 0$ pour résoudre le problème.
On traite de la même façon le cas de plusieurs équations de liaison non prises en compte en introduisant autant de multiplicateurs que d'équations. La méthode fonctionne aussi pour le cas de liaisons non-holonomes linéaires en $\dot{\boldsymbol{q}}$.

Les multiplicateurs en tant que nouvelles variables indépendantes – Dans cette seconde façon de voir, on considère toujours le jeu de variables q_i obtenu après avoir pris en compte toutes les liaisons sauf la liaison $f(\boldsymbol{q}, t) = 0$. Mais, on décide maintenant que cette liaison n'est pas donnée à l'avance. En compensation, on introduit un multiplicateur λ que l'on considère cette fois comme une nouvelle variable indépendante susceptible de subir des déplacements virtuels arbitraires au même titre que <u>toutes</u> les variables q_i qui sont maintenant traitées comme étant toutes indépendantes. On écrit ensuite un principe de Hamilton modifié, à partir du principe de D'Alembert avec multiplicateurs, sous la forme suivante :

$$\int_{t_D}^{t_A} \delta L \, dt + \int_{t_D}^{t_A} \delta\big(\lambda \, f(\boldsymbol{q}, t)\big) \, dt \doteq 0$$

où L est le lagrangien du système comme précédemment. Le calcul qui s'ensuit implique :

$$\int_{t_D}^{t_A} \left(\left[\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \right] \cdot \delta \boldsymbol{q} + f(q,t)\, \delta\lambda \right) dt \doteq 0$$

Les n déplacements virtuels δq_i étant tous arbitraires, tout comme la variation $\delta\lambda$ envisagée, on peut rendre nuls tous les facteurs figurant devant les variations de cette somme, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right) + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \doteq \mathbf{0} \\ f(\boldsymbol{q}, t) \doteq 0 \end{cases}$$

On obtient bien les mêmes équations que précédemment mais avec un raisonnement plus direct, au prix d'un ajustement du principe de Hamilton en y incorporant les multiplicateurs.

Chapitre 7

FORMALISME LAGRANGIEN

Par formalisme lagrangien, on entend que le système étudié est décrit par un lagrangien $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ grâce auquel on peut écrire les équations de Lagrange pour chaque variable q_i en vertu du principe de Hamilton. Dans ce cadre, on formalise le lien entre variables cycliques et intégrales premières, puis on élabore une théorie élémentaire des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable.

1. Variables cycliques et intégrales premières. A partir de la forme même des équations de Lagrange on déduit immédiatement les propriétés qui suivent :

Variables cycliques. Procédure de Routh – Il peut arriver que l'une des coordonnées généralisées n'apparaisse pas de façon explicite dans l'écriture du lagrangien. Appelons q_k cette coordonnée qui prend le nom de *variable cyclique*. L'équation de Lagrange relative à q_k se simplifie alors considérablement puisqu'elle s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \doteq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \doteq C$$

La quantité $p_k := \partial L / \partial \dot{q}_k$ est donc une intégrale première du mouvement, notée ici $C : dC/dt \doteq 0$.
A partir de ce résultat, il est possible, en principe, d'exprimer $\dot{q}_k$ en fonction de C et de toutes les autres q_i ainsi que de leurs

dérivées $\dot{q}_i$ $(i \neq k)$: $\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_i, \dot{q}_i, i \neq k, t, C)$. La constante C quant à elle, en tant qu'intégrale première, s'exprime en fonction de la valeur que prennent toutes les coordonnées généralisées $\boldsymbol{q}$ et leurs dérivées $\dot{\boldsymbol{q}}$ à l'instant initial t_0 et, éventuellement, de t_0 lui-même. C apparaît donc comme un paramètre ajustable du problème, tel ou tel jeu de conditions initiales lui faisant prendre telle ou telle valeur.
De la sorte, on peut alors éliminer $\dot{q}_k$ dans les équations de Lagrange relatives aux $q_i, i \neq k$. On se retrouve ainsi avec $(n-1)$ équations aux $(n-1)$ inconnues $q_i, i \neq k$: on a gagné un degré de liberté.

Routh a décrit une procédure permettant de mettre ces $(n-1)$ équations restantes aux $(n-1)$ inconnues q_i, $i \neq k$, sous la forme de $(n-1)$ nouvelles équations de Lagrange issues d'un *lagrangien réduit,* appelé *« fonction de Routh »*.
Il faut remarquer d'abord que ce serait une erreur que de remplacer $\dot{q}_k$ par son écriture : $\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_i, \dot{q}_i, i \neq k, t, C)$, dans le lagrangien de départ L puis de ré-écrire des équations de Lagrange pour les $(n-1)$ variables q_i restantes à partir de ce lagrangien en voyant C comme un paramètre constant : en effet, les équations de Lagrange pour L sont écrites en considérant les $q_i, i = 1, \dots, n,$ indépendantes, ce qu'elles ne seront plus si on maintient C constant.
Afin d'écrire des équations de Lagrange pour ces $(n-1)$ variables restantes il faut construire un nouveau lagrangien (réduit). Routh propose la méthode suivante : en considérant

une variation virtuelle synchrone de L on a, puisque q_k est cyclique :

$$\delta L = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k$$

Or, en posant $p_k := \partial L / \partial \dot{q}_k$, alors $\delta(p_k \dot{q}_k) = p_k \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p_k$. La variation précédente peut donc s'écrire comme :

$$\delta(L - p_k \dot{q}_k) = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) - \dot{q}_k \delta p_k$$

Si maintenant on définit un lagrangien réduit ou fonction de Routh par $R = L - p_k \dot{q}_k$ où il est entendu que $\dot{q}_k$ a été remplacé par son écriture : $\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_i, \dot{q}_i, i \neq k, t, C = p_k)$, alors $R = R(q_i, \dot{q}_i, i \neq k, t, C = p_k)$ et sa variation s'écrit :

$$\delta R = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \left(\frac{\partial R}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) + \frac{\partial R}{\partial p_k} \delta p_k$$

La comparaison entre cette écriture de la variation et la précédente impose donc les relations suivantes où $i = 1, \dots, n, i \neq k$:

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial p_k} = -\dot{q}_k$$

Ainsi, à partir des équations de Lagrange issues de L, on déduit des équations de Lagrange issues de R pour les $(n-1)$ variables restantes :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} \doteq 0 \quad i = 1, \dots, n, i \neq k$$

La procédure assure alors que ces équations sont équivalentes à celles que l'on obtient lorsque l'on élimine les $\dot{q}_k$ dans les équations de Lagrange relatives aux $q_i, i \neq k$ issues de L. La fonction de Routh fait office de Lagrangien (réduit) pour ces $(n-1)$ variables.

Conservation de l'énergie mécanique – Le théorème de l'énergie cinétique exprimé dans le formalisme lagrangien a déjà été obtenu au 4.7. On rappelle ici qu'il prend la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - L\right) \doteq -\frac{\partial L}{\partial t}$$

On peut ainsi conclure que si le temps t se comporte comme une variable cyclique, alors la quantité énergétique entre parenthèses est une intégrale première qui s'identifie le plus souvent à l'énergie mécanique E du problème. On définit ainsi la grandeur dynamique (revoir le 4.7) :

$$E(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) := \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - L$$

Dans les cas usuels où $L = T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - V(\boldsymbol{q})$, on pourra donc conclure immédiatement que $E = T + V$ est une intégrale première du problème.

Un avant-goût du Théorème de Noether – Des deux sous-sections qui précèdent, on observe que pour chaque variable

cyclique, le temps y compris, il existe une intégrale première. En fait, s'il existe une variable cyclique pour le lagrangien étudié, c'est que ce lagrangien s'avère invariant vis-à-vis de toute translation que l'on pourrait opérer sur la variable cyclique en question : par exemple, si l'on pose $t' = t + T_0$ où T_0 est un temps fixé à une valeur quelconque, le lagrangien $L = T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - V(\boldsymbol{q})$ reste inchangé ; on a encore $\partial L/\partial t' = 0$ et $E = T + V$ est une intégrale première.

Le théorème de Noether, qui est étudié plus loin dans le cours, formalise ce constat plus en profondeur : il associe à toute invariance de l'intégrale d'action sous l'effet d'une transformation affectant une ou plusieurs coordonnées généralisées (y compris le temps) l'existence d'une intégrale première qui lui est associée. Dans ce théorème, la notion même d'invariance est à prendre dans un sens plus étendu que celui qui vient d'être donné en exemple.

Pour l'heure, on se satisfera des observations faites lors de la résolution des exercices.

Invariance du lagrangian par une...	L'***intégrale première*** associée est...
translation spatiale : la variable cyclique est une longueur.	la ***quantité de mouvement*** le long de l'axe de la translation.
rotation spatiale : la variable cyclique est un angle.	le ***moment cinétique*** le long de l'axe de la rotation.
translation temporelle : la variable cyclique est le temps.	l'***énergie mécanique*** du problème.

2. Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre. De nombreux problèmes de physique consistent à étudier le mouvement de systèmes mécaniques au voisinage d'une position d'équilibre stable : vibrations d'un réseau d'atomes, d'une molécule, etc... L'oscillateur harmonique 1D (*id est* : à une dimension) en est l'exemple emblématique : le système oscille dans le temps autour de sa position d'équilibre à une certaine fréquence et selon une loi sinusoïdale déterminées par l'équation du mouvement. Ce comportement a systématiquement lieu au voisinage du (ou d'un) minimum d'une énergie potentielle 1D quelconque, car on peut toujours écrire cette énergie potentielle autour de la valeur q_{min} qui correspond à ce minimum sous la forme :

$$V(q_{min} + \eta) = V_{min} + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_{min}} \eta^2$$

où V_{min} est la valeur minimale de l'énergie potentielle et η l'écart à la position d'équilibre : $\eta = q - q_{min}$.
En effet, le terme en η dans ce développement de Taylor à l'ordre 2 est nul puisque l'on se place au voisinage d'un minimum de la fonction V. La dérivée seconde de V en q_{min} prend une certaine valeur positive (puisque l'équilibre est supposé stable) qui est souvent notée k. Par ailleurs, comme la fonction énergie potentielle n'est définie qu'à une constante près, on peut se permettre de ramener V_{min} à la valeur 0 sans affecter la généralité du problème. De sorte que l'on peut bien

écrire V comme une fonction de η qui prend la forme, au voisinage de la position d'équilibre :

$$V(\eta) = \frac{1}{2}\, k\, \eta^2$$

Dans le cas d'un problème à N corps représenté par les n coordonnées généralisées q, un tel mouvement au voisinage d'une position d'équilibre peut devenir complexe, mais il est possible de le décomposer en une combinaison linéaire de mouvements oscillants simples. Le formalisme lagrangien permet une méthode de résolution de ce type de problème tout à fait générale.

Energie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre – L'énergie potentielle du système est supposée ne dépendre que des coordonnées généralisées : $V = V(\boldsymbol{q})$. Son expression au voisinage d'une position d'équilibre stable $\boldsymbol{q}_{min}$ est donnée par un développement de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction de n variables :

$$V(\boldsymbol{q}_{min} + \boldsymbol{\eta}) = V(\boldsymbol{q}_{min}) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{\boldsymbol{q}_{min}} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \eta_i \eta_j \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\boldsymbol{q}_{min}}$$

où $\boldsymbol{\eta}$ est le n-uplet représentant l'écart à la position d'équilibre : $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_{min}$. Comme précédemment, le premier terme de cette expression est un terme constant que l'on choisit égal à zéro sans restreindre la généralité du problème.

Le second terme est nul puisque toutes les dérivées partielles de V par rapport aux q_i évaluées en $\boldsymbol{q}_{min}$ sont nulles. Si bien qu'au voisinage de $\boldsymbol{q}_{min}$, l'énergie potentielle du système s'écrit à l'ordre 2 :

$$V(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}\, \eta_i \eta_j$$

où les V_{ij} sont de simples coefficients : $V_{ij} = V_{ji} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\boldsymbol{q}_{min}}$

Energie cinétique au voisinage d'une position d'équilibre – Usuellement, le temps n'intervient pas explicitement lors du passage aux coordonnées généralisées : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})$. L'énergie cinétique est alors une forme bilinéaire des vitesses généralisées (revoir 4.**1**) :

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{q})\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j$$

où les a_{ij} sont fonctions de $\boldsymbol{q}$ et sont symétriques : $a_{ij} = a_{ji}$. Comme $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_{min}$, l'expression de T au voisinage de l'équilibre s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ a_{ij}(\boldsymbol{q}_{min}) + \sum_{k=1}^{n} \eta_k \left.\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right|_{\boldsymbol{q}_{min}} + \cdots \right\} \dot{\eta}_i\, \dot{\eta}_j$$

Pour obtenir l'ordre 2 en $\boldsymbol{\eta}$ de ce développement où figurent également des produits $\dot{\eta}_i\, \dot{\eta}_j$, on émet l'hypothèse que les $\dot{\eta}_i$ sont du même ordre de grandeur que les η_k : cela revient à admettre que les vitesses de vibration autour de la position

d'équilibre sont du même ordre de grandeur que les écarts à cette position obtenus au bout d'une seconde. Cette hypothèse se doit d'être vérifiée *a posteriori*, c'est-à-dire à la fin des calculs du problème considéré. Dans ce cas, il est clair que l'expression de T à l'ordre 2 s'écrit simplement :

$$T = T(\dot{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} T_{ij}\, \dot{\eta}_i\, \dot{\eta}_j$$

où les T_{ij} sont de simples coefficients : $T_{ij} = T_{ji} = a_{ij}(\boldsymbol{q}_{min})$.

Résolution des équations de Lagrange au voisinage d'une position d'équilibre – A partir du lagrangien du problème, $L = T - V$, on déduit les équations de Lagrange. Après avoir tenu compte des propriétés de symétrie des coefficients T_{ij} et V_{ij}, elles prennent la forme, pour tout i :

$$\sum_{j=1}^{n} \left(T_{ij}\ \ddot{\eta}_j + V_{ij}\, \eta_j \right) \doteq 0$$

En prenant la peine d'écrire explicitement ces équations pour chaque valeur de j et de i, on observe aisément qu'elles constituent un système de n équations différentielles linéaires couplées, à coefficients constants, du second ordre en $\boldsymbol{\eta}$. Ce type de système est connu pour admettre une solution générale qui s'exprime sous la forme de combinaisons linéaires de solutions sinusoïdales particulières appelées *solutions propres* du problème.

Pour trouver ces solutions propres, on peut écrire $\boldsymbol{\eta}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{c}\, e^{-\,i\,\omega t}$$

On appelle $\boldsymbol{c}$ le n-uplet des *amplitudes* c_i pour une valeur ω de la *fréquence propre* (ou plutôt la pulsation) de vibration. Pour trouver ces deux quantités, $\boldsymbol{c}$ et ω, on injecte l'*ansatz* proposé dans les équations de Lagrange pour obtenir un système qui s'écrit finalement sous forme matricielle :

$$\left(\hat{V} - \omega^2\, \hat{T}\right) \boldsymbol{c} \;\doteq \mathbf{0}$$

où $\hat{V}$ et $\hat{T}$ sont des matrices $n \times n$ construites à partir des V_{ij} et des T_{ij} respectivement : $\hat{V} := \left[V_{ij}\right]$ et $\hat{T} := \left[T_{ij}\right]$.

Ce genre d'équation matricielle est connu pour ne fournir que des solutions nulles pour $\boldsymbol{c}$ puisqu'il s'agit d'un système d'équations linéaires homogènes (théorie des systèmes de Cramer), sauf si le déterminant de la matrice $\left(\hat{V} - \omega^2\, \hat{T}\right)$ s'annule. Dans ce cas en effet, cela signifie que l'une au moins des équations de ce système est redondante et qu'il existe des solutions non nulles pour $\boldsymbol{c}$. Pour trouver ces solutions, il faut donc rechercher au préalable les valeurs de ω pour lesquelles :

$$Dét\left(\hat{V} - \omega^2\, \hat{T}\right) \;\doteq 0$$

Cette équation, que l'on nomme *équation séculaire*, revient à rechercher les racines d'un polynôme de degré n en ω^2. Comme les matrices $\hat{V}$ et $\hat{T}$ sont réelles symétriques, on peut montrer que toutes les racines de ce polynôme sont réelles. On montre aussi qu'elles sont positives (ou nulles).

Pour chaque valeur particulière ω_K de ω que l'on aura ainsi trouvée, on obtiendra un (ou plusieurs si ω_K^2 est racine multiple) n-uplet $\boldsymbol{c}_K$ non nul qui lui est associé en résolvant

par les méthodes habituelles (méthode par substitutions, méthode de Cramer, ...) l'équation $\left(\hat{V} - \omega_K^2\, \hat{T}\right) \boldsymbol{c}_K \doteq \mathbf{0}$.
La solution générale s'écrira comme une combinaison linéaire de chacune de ces solutions propres :

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_K A_K\, \boldsymbol{c}_K\, e^{-\,i\,\omega_K t}$$

les A_K étant des coefficients déterminés par les conditions initiales du problème.

Chapitre 8

DYNAMIQUE HAMILTONIENNE

Dans le formalisme lagrangien, les inconnues du problème sont les n variables indépendantes q_i qui doivent être déterminées en fonction du temps à l'aide des équations de Lagrange. Dans le formalisme hamiltonien, les variables indépendantes passent au nombre de $2n$ qui sont les q_i accompagnées de leurs moments conjugués p_i.
Dans ce qui suit, on adopte d'abord un chemin direct qui permet d'introduire tout de suite les p_i, puis de passer au hamiltonien du système grâce à une transformation de Legendre pour en déduire les équations de Hamilton. Ce chemin habituel ne montre pas que les p_i sont en réalité des multiplicateurs de Lagrange et qu'ils sont bien des variables indépendantes des q_i. On corrige ce « défaut » dans la section **4**, puis, l'ensemble du processus étant accompli, on ré-envisage, pour mieux le comprendre, le raccourci habituel.
La suite du chapitre identifie le hamiltonien d'un système dynamique à son énergie mécanique puis énonce à nouveau le théorème sur les variables cycliques dans ce formalisme.

1. Le passage à $2n$ variables. Moments conjugués. Dans le traitement des équations différentielles d'ordre 2 pour une variable, il est possible de passer à un système équivalent où on dispose de deux équations différentielles d'ordre 1 pour deux variables : par exemple, si $f(x, y, y', y") \doteq 0$ est

l'équation différentielle d'ordre 2 satisfaite pour la variable $y = y(x)$, alors on se propose d'appeler $v = v(x)$ une nouvelle variable qui satisfait l'équation : $v \doteq y'$. L'équation différentielle précédente est alors bien équivalente au système :

$$\begin{cases} f(x, y, v, v') \doteq 0 \\ v \doteq y' \end{cases}$$

En dynamique lagrangienne, les équations du mouvement prennent la forme des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \doteq 0 \quad \overset{\text{càd}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \doteq \mathbf{0}$$

ce qui incite à choisir comme variables supplémentaires, non pas les $\dot{q}_i$ comme dans l'exemple précédent, mais plutôt les quantités $\partial L/\partial \dot{q}_i$ qui sont déjà apparues comme fondamentales pour générer une intégrale première dans le cas de variables cycliques. En posant $p_i := \partial L/\partial \dot{q}_i$, les équations de Lagrange deviennent en effet un ensemble de doublets d'équations du premier ordre qui prend la forme, en notation vectorielle :

$$\begin{cases} \boldsymbol{p} \doteq \partial L/\partial \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \doteq \partial L/\partial \boldsymbol{q} \end{cases}$$

On est ainsi amené à la définition suivante :

> ***Définition*** : on appelle *impulsions généralisées* ou *moments conjugués*, notés p_i, les dérivées

partielles du lagrangien du système par rapport aux vitesses généralisées :

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \overset{\text{càd}}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}$$

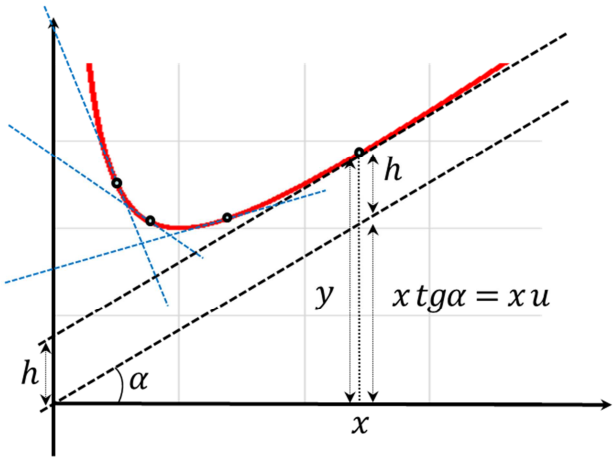
Et on dira des grandeurs dynamiques p_i et q_i qu'elles sont *conjuguées* l'une de l'autre.

On reste toutefois insatisfait face à ce système d'équations différentielles du premier ordre pour les $2n$ inconnues $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{p}$ car la fonction dynamique de départ qu'est le lagrangien est construite à partir des $\dot{\boldsymbol{q}}$ et non à partir des $\boldsymbol{p}$: ne pourrait-on pas travailler de suite avec les p_i pour obtenir cet élégant doublet d'équations – ou une forme équivalente - à l'aide d'une fonction dynamique qui serait dès le départ fonction des $2n$ variables $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{p}$?

De fait, il existe bel et bien, dans le corpus mathématique, un processus qui permet de passer des variables initiales $\dot{q}_i$, présentes dans l'écriture naturelle du lagrangien, aux variables p_i désirées. Proposée par Legendre, la méthode réclame effectivement de changer de fonction dynamique. Dans sa méthode, Legendre transforme une fonction définie par sa valeur en un point (ici : $L = L(\dot{\boldsymbol{q}})$ en oubliant les autres variables) en une autre fonction définie par la valeur de la pente de la tangente en ce même point (*id est* : sa dérivée, ici : $H = H(\boldsymbol{p} := \partial L/\partial \dot{\boldsymbol{q}})$). Géométriquement parlant, les deux fonctions décrivent la même courbe.

2. La transformation de Legendre. On démarre par une première approche géométrique de la transformation de Legendre avant d'en donner une définition formelle.

Approche géométrique - On considère une fonction $y = y(x)$ dont la concavité est toujours positive dans l'intervalle $[x_D, x_A]$ considéré (*id est* : $y''(x) \geq 0$). Soit u la valeur de la pente de la tangente à la fonction au point $\big(x, y(x)\big)$: $u = y'(x)$. Si on considère maintenant l'intersection de cette tangente avec l'axe des ordonnées, on constate, premièrement, que sa valeur, h, est une fonction de u : $h = h(u)$. Deuxièmement, on constate aussi que si on connaît $h = h(u)$ sur tout l'intervalle $[u_D, u_A]$ correspondant à $[x_D, x_A]$ alors on connaît la fonction $y = y(x)$ au sens où on est capable de la construire : en effet, en traçant toutes les droites de pente u et de valeur $h = h(u)$ sur l'axe des ordonnées, il est géométriquement clair que la courbe $y(x)$ n'est rien d'autre que l'enveloppe de toutes ses tangentes. Il n'y aurait ambiguïté dans cette construction que s'il existait deux ou plusieurs valeurs de h (et donc de x) différentes pour une même valeur de u, car alors on ne saurait pas pour quelle



valeur de x cette tangente est construite : c'est ce qui arriverait si la courbe $y(x)$ n'était pas concave (ou convexe) sur l'intervalle considéré.

Ce cas particulier mis à part, on conclut qu'il est équivalent de connaître la fonction $y = y(x)$ ou la fonction $h = h(u)$. D'ailleurs, l'examen de la figure ci-dessus montre que l'on peut écrire : $h(u) + u\,x = y(x)$. C'est, au signe près, l'essence de la transformation de Legendre.

Transformation de Legendre - On adopte la définition suivante :

> ***Définition*** : Soit une fonction y de la variable x à concavité positive dans l'intervalle étudié. On appelle *transformée de Legendre* de la fonction y, la fonction ℓ de la variable u définie par $u := y'(x)$ et telle que :
>
> $$\ell(u) := u\,x - y(x)$$

Dans cette définition, il est compris que pour obtenir $\ell(u)$ à partir de $y(x)$, on procède de la façon suivante : on détermine d'abord la nouvelle variable u par son expression en fonction de x : $u := y'(x)$; puis on inverse cette relation pour obtenir $x = y'^{-1}(u)$ (c'est là qu'intervient la condition de concavité). Ainsi on aura : $\ell(u) = u\,x(u) - y[x(u)]$.

Relation duale entre x et u - En écrivant la différentielle de la transformée de Legendre, on obtient :

$$d\ell = x\,du + u\,dx - dy$$

Mais comme $dy = y'\,dx$ et $u = y'$, on conclut que :

$$x \;= d\ell/du$$

Il faut comprendre cette égalité comme le pendant de la relation $u := dy/dx$. En effet, à supposer que l'on parte de la fonction $\ell(u)$, sa transformée de Legendre, conformément à la définition, sera alors une fonction $z(x)$ où la variable x sera bien définie par $x \;:= d\ell/du$.
En outre, $z(x)$ sera donnée par : $z(x) = u\,x - \ell(u)$. C'est-à-dire que $z = y$. Autrement dit, on vient de montrer que si $\ell(u)$ est la transformée de Legendre de $y(x)$, alors $y(x)$ est la transformée de Legendre de $\ell(u)$: la transformation de Legendre est *involutive*. Cette propriété duale était attendue en vertu de l'analyse géométrique précédente.
En résumé :

$$y(x) \quad \overset{Legendre}{\longleftrightarrow} \quad \ell(u)$$

$$\ell + y = u\,x$$

$$u := dy/dx \qquad\qquad x := d\ell/du$$

Fonctions à plusieurs variables – On généralise facilement la notion de transformée de Legendre au cas de fonctions à n variables : pourvu que la fonction initiale $y(x)$ soit à concavité positive eu égard à la variable concernée x_k, sa transformée de Legendre par rapport à cette variable sera la fonction $\ell(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, u_k)$ telle que :

$$\ell := u_k\,x_k - y$$

avec $u_k := \partial y/\partial x_k$. En écrivant la différentielle de ℓ, on montre facilement les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ell}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial y}{\partial x_i}\,, \qquad i \neq k \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial u_k} = x_k \end{cases}$$

Les $(n-1)$ premières équations expriment le lien entre les dérivées partielles des fonctions ℓ et y relativement aux variables qui ne participent pas à la transformation : ces dérivées sont égales et opposées. La dernière équation est relative à la variable concernée par la transformation et exprime la *dualité* de cette transformation (elle est le pendant de $u_k = \partial y/\partial x_k$).

Si on peut réaliser une transformée de Legendre avec toutes les variables x_i, alors on pourra écrire :

$$\ell(u) := \sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i - y(x) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x} - y(x)$$

avec : $\boldsymbol{u} := \partial y/\partial \boldsymbol{x}$. Et inversement : $\boldsymbol{x} := \partial \ell/\partial \boldsymbol{u}$.

3. Hamiltonien. Equations de Hamilton. On réalise maintenant une transformation de Legendre vis-à-vis des variables $\dot{q}_i$ présentes dans le lagrangien du système, $L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$, conformément à la définition du **2**.

Hamiltonien - Les variables q_i et t n'étant pas concernées par la transformation, la nouvelle fonction H, qui sera appelée

hamiltonien du système, transformée de Legendre de L, sera donc une fonction de ces q_i, du temps, et des nouvelles variables $p_i := \partial L/\partial \dot{q}_i$. On a donc : $H = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ avec :

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) := \sum_{i=1}^{n} p_i \, \dot{q}_i - L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

où il est sous-entendu que les $\dot{q}_i$ figurant dans l'expression sont appelés à disparaître au profit des p_i en inversant les n relations $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$. En fait, pour que ces relations puissent s'inverser et fournir finalement $p = p(q, \dot{q}, t)$, on montre que le *hessien* de la fonction lagrangienne doit être non nul, c'est-à-dire que le déterminant de la matrice hessienne : $\partial^2 L/\partial \dot{\boldsymbol{q}}^2 := \left(\partial^2 L/\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j\right)_{i,j}$, doit être non nul, ce que l'on supposera toujours.

Conformément à la section précédente, et avec les mêmes interprétations, les relations entre les dérivées partielles du hamiltonien H et celles du lagrangien L sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial L}{\partial q_i} & \forall\, i \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} & \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i & \forall\, i \end{cases}$$

Naturellement, si, partant de H, on réalise sa transformée de Legendre vis-à-vis des variables p_i, on obtiendra L, ce que l'on peut résumer en synthétisant la transformation sous la forme :

$$H + L := \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} := \dot{\boldsymbol{q}} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} := \boldsymbol{p}$$

Equations du mouvement - Avec ce changement de variables et de fonction dynamique, se pose maintenant la question de la forme prise par les équations du mouvement dans ce nouveau formalisme ? Pour cela, on dispose toujours du principe de Hamilton :

$$\delta S = \delta \int_{t_D}^{t_A} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\, dt \doteq 0$$

où les variations sont arbitraires et s'effectuent sur le jeu de variables indépendantes $\boldsymbol{q}$. En introduisant maintenant la fonction dynamique H, on peut donc écrire :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} \big(\boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)\big)\, dt \doteq 0$$

Les variations arbitraires $\delta\boldsymbol{q}$ réalisées sur les $\boldsymbol{q}$ entraînent des variations imposées sur les $\dot{\boldsymbol{q}}$ et aussi sur les $\boldsymbol{p}$ puisque $\boldsymbol{p} = \partial L / \partial \dot{\boldsymbol{q}}$. On a ainsi :

$$\delta S \; = \int_{t_D}^{t_A} \left(\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{q}} \; - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \delta \boldsymbol{p} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{q} \right) dt \doteq 0$$

Comme à l'habitude, le terme en $\delta \dot{\boldsymbol{q}} = d(\delta \boldsymbol{q})/dt$ s'intègre par parties et le terme tout intégré qui en découle est nul en raison des conditions imposées aux limites : $\delta \boldsymbol{q}(t_D) = \delta \boldsymbol{q}(t_A) = \boldsymbol{0}$. On obtient alors, après réorganisation des autres termes :

$$\delta S = \int_{t_D}^{t_A} \left[\left(\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{p} - \left(\dot{\boldsymbol{p}} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{q} \right] dt \doteq 0$$

Le calcul devrait normalement se poursuivre afin de pouvoir exprimer les variations $\delta \boldsymbol{p}$ engendrées par les variations $\delta \boldsymbol{q}$ (en écrivant : $\delta \boldsymbol{p} = \delta(\partial L / \partial \dot{\boldsymbol{q}}) = \cdots$). Mais on est dispensé de ce calcul en se rappelant que H est la transformée de Legendre de L pour les variables $\dot{\boldsymbol{q}}$, et qu'à ce titre on a forcément : $\dot{\boldsymbol{q}} = \partial H / \partial \boldsymbol{p}$. Autrement dit, le terme en facteur des $\delta \boldsymbol{p}$ s'annule purement et simplement. Ainsi, il ne reste plus que les variations arbitraires en $\delta \boldsymbol{q}$ dans l'intégrale et on peut conclure pour tout i : $\dot{\boldsymbol{p}} \doteq - \partial H / \partial \boldsymbol{q}$.
Les n doublets d'équations différentielles du premier ordre en $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \partial H / \partial \boldsymbol{p} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \doteq - \partial H / \partial \boldsymbol{q} \end{cases}$$

forment les *équations de Hamilton* pour le mouvement. On les appelle encore *équations canoniques* du mouvement. On dit aussi que l'intégrale d'action écrite à l'aide du hamiltonien prend sa *forme canonique* :

$$S = \int_{t_D}^{t_A} \left(\boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) \right) dt$$

Commentaires et critiques - Le processus qui nous a permis d'aboutir aux équations de Hamilton peut se résumer de la façon suivante : il a fallu d'abord écrire le lagrangien du système en fonction de ses $2n$ variables naturelles $\boldsymbol{q}$ et $\dot{\boldsymbol{q}}$,

$L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$. Puis, sur le constat qu'il était plus élégant de travailler non pas avec les variables $\dot{\boldsymbol{q}}$ mais avec les variables $\boldsymbol{p} := \partial L/\partial \dot{\boldsymbol{q}}$, il a fallu changer de fonction dynamique en opérant une transformation de Legendre sur L pour obtenir la fonction $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$, hamiltonien du système. Les équations de Hamilton semblent alors découler du principe du même nom. Ces équations sont bien conformes au but que l'on s'était fixé. En effet, on peut les comparer au doublet d'équations que l'on avait obtenu au **1** :

$$\begin{cases} \boldsymbol{p} \doteq \partial L/\partial \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \doteq \partial L/\partial \boldsymbol{q} \end{cases}$$

La première s'avère être le pendant de la première équation de Hamilton, $\dot{\boldsymbol{q}} = \partial H/\partial \boldsymbol{p}$, puisque la fonction dynamique H est la transformée de Legendre de L. Quant à la seconde, elle s'identifie à la seconde équation de Hamilton puisque $\partial L/\partial \boldsymbol{q} = -\partial H/\partial \boldsymbol{q}$ pour la même raison.

Cependant, il apparaît clairement que l'une des deux équations de Hamilton ($\dot{\boldsymbol{q}} = \partial H/\partial \boldsymbol{p}$) ne dérive pas réellement du principe de Hamilton tel qu'il a été formulé puisqu'elle résulte simplement de la transformation de Legendre. Par ailleurs, les variables $\dot{\boldsymbol{q}}$ - et par suite les nouvelles variables $\boldsymbol{p}$ puisque $\boldsymbol{p} := \partial L/\partial \dot{\boldsymbol{q}}$ - ne sont pas traitées exactement comme les variables $\boldsymbol{q}$ en ce sens qu'elles ne sont pas des variables indépendantes des $\boldsymbol{q}$: elles leurs sont liées. La preuve en est que les variations $\delta \dot{\boldsymbol{q}}$ – et donc $\delta \boldsymbol{p}$ - ne sont pas des variations libres dans les raisonnements qui ont été faits plus haut.

Dans ce qui suit on reprend la problématique à zéro afin d'arriver à une situation où les $2n$ variables $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{p}$ ont bien le statut de $2n$ variables indépendantes. Le doublet d'équations de Hamilton découlera alors bien du principe de Hamilton où les variations libres seront cette fois effectuées à la fois sur les $\boldsymbol{q}$ et sur les $\boldsymbol{p}$. Ce faisant, on se rendra compte que les $\boldsymbol{p}$ ne sont rien d'autre que des multiplicateurs de Lagrange associés à la relation qui relie les variables $\boldsymbol{q}$ et $\dot{\boldsymbol{q}}$.

4. Le passage à $2n$ variables indépendantes. Pour traiter les $\dot{\boldsymbol{q}}$ comme des variables à part entière au sens fort, c'est-à-dire en tant que n variables indépendantes des $\boldsymbol{q}$, il faut suivre le chemin emprunté aux chapitres 5 et 6 lorsque des liaisons sont imposées au système : dans ce cas, on se rappelle que l'on peut choisir un jeu de variables $\boldsymbol{q}$ surabondant et tenir compte des équations de liaison par l'introduction de multiplicateurs.
En se fondant sur cette idée, on définit ainsi n nouvelles variables w_i qui forment avec les q_i un jeu surabondant de $2n$ variables, les w_i satisfaisant aux n équations de liaison non-holonomes : $w_i = \dot{q}_i$. Dans cette vision, il faut donc remplacer les $\dot{q}_i$ par les w_i dans l'écriture du lagrangien de façon à ce qu'il apparaisse au départ comme une fonction des $2n$ variables $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{w}$: $L = L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}, t)$.

Il reste ensuite à appliquer le principe de Hamilton avec multiplicateurs en suivant l'une ou l'autre méthode selon le statut que l'on souhaite donner aux multiplicateurs associés à chaque équation de liaison $w_i = \dot{q}_i$: soit des paramètres

quelconques que l'on choisit, soit de nouvelles variables indépendantes sur lesquelles on peut opérer des variations arbitraires. Le choix va se porter sur cette seconde possibilité car les nouvelles variables w_i seront bien ainsi des variables à part entière au sens fort : elles seront indépendantes des q_i au départ. Autrement dit, on disposera non pas d'un jeu surabondant de $2n$ variables, mais bien d'un jeu de $2n$ variables indépendantes. Dans ce point de vue, on se rappelle que les équations de liaison $w_i = \dot{q}_i$ ne sont pas censées être écrites à l'avance : elles doivent survenir en même temps que les équations du mouvement lors de l'application du principe de Hamilton avec multiplicateurs. Les w_i ne s'identifieront donc aux $\dot{q}_i$ que pour les courbes solutions : $w_i \doteq \dot{q}_i$.

On introduit donc un troisième nouveau jeu de variables indépendantes que sont les multiplicateurs, et qui seront notés p_i. En adoptant cette notation, *il faut oublier* la définition donnée plus haut de ces p_i : ce sont pour l'instant des multiplicateurs.

Pour obtenir les équations qui régissent le mouvement, on applique maintenant le principe de Hamilton avec multiplicateurs qui admet des variations arbitraires δp_i sur les multiplicateurs p_i en plus des variations arbitraires δq_i et δw_i sur les q_i et sur les w_i respectivement :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} \{L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}, t) - \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{w} - \dot{\boldsymbol{q}})\}\, dt \doteq 0$$

En notant que les variations δq sont nulles aux bornes comme d'habitude, on obtient, tout calcul fait :

$$\int_{t_D}^{t_A} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{p}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{q} + \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} - \boldsymbol{p} \right) \cdot \delta \boldsymbol{w} - (\boldsymbol{w} - \dot{\boldsymbol{q}}) \cdot \delta \boldsymbol{p} \right\} dt \doteq 0$$

Enfin, toutes les variations étant arbitraires, on conclut pour tout i :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \doteq \dot{\boldsymbol{p}} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} \doteq \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{w} \doteq \dot{\boldsymbol{q}} \end{cases}$$

Ces trois séries de n équations aux $3n$ inconnues $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{p}$ remplacent les n équations de Lagrange du second degré et leur sont équivalentes. Cependant, il est bien évident que l'on préférerait travailler directement avec les variables indépendantes $\boldsymbol{p}$ sans que les $\boldsymbol{w}$ interviennent.
Pour cela, on sait maintenant qu'il va être nécessaire d'opérer une transformation de Legendre, non plus sur les $\dot{\boldsymbol{q}}$ comme précédemment mais sur les $\boldsymbol{w}$. La nouvelle fonction H, *hamiltonien* du système, transformée de Legendre de L, sera donc une fonction des $\boldsymbol{q}$, du temps, et des nouvelles variables $\boldsymbol{p}$ définies présentement par : $\boldsymbol{p} := \partial L / \partial \boldsymbol{w}$:

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) := \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{w} - L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}, t)$$

où il est sous-entendu que les $\boldsymbol{w}$ figurant dans cette expression sont appelés à disparaître au profit des $\boldsymbol{p}$ en inversant les n relations $\boldsymbol{p} = \partial L / \partial \boldsymbol{w}$.

Les relations entre les dérivées partielles du hamiltonien H et celles du lagrangien L sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} = -\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{w} \end{cases}$$

Et la transformation est résumée sous la forme :

$$H + L := \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{w} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} := \boldsymbol{w} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} := \boldsymbol{p}$$

Equations du mouvement - Le principe de Hamilton avec multiplicateurs s'écrit toujours :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} \{L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}, t) - \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{w} - \dot{\boldsymbol{q}})\}\, dt \doteq 0$$

où les variations sont arbitraires et s'effectuent sur les trois jeux de variables indépendantes $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{p}$. En introduisant maintenant la fonction dynamique H, on peut écrire :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} \big(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{w} - H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) - \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{w} - \dot{\boldsymbol{q}})\big)\, dt \doteq 0$$

ce qui se réduit à :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} \big(\boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)\big)\, dt \doteq 0$$

où l'on observe que la variable $\boldsymbol{w}$ a tout simplement disparu du problème : c'était bien le but que l'on s'était fixé. Les variations arbitraires ne se font donc plus qu'en $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{p}$ et, tout calcul fait, on obtient :

$$\int_{t_D}^{t_A} \left\{ \left(\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{p} \; - \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{p}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{q} \right\} \, dt \doteq 0$$

ce qui fournit le doublet d'équations :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} \doteq \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \doteq -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \end{cases}$$

Commentaires - Ce doublet d'équations constitue bien les *équations de Hamilton* pour le mouvement et découlent toutes deux du principe de Hamilton (avec multiplicateurs). En effet, la première équation, $\dot{\boldsymbol{q}} \doteq \partial H / \partial \boldsymbol{p}$**,** n'est plus cette fois issue directement de la transformation de Legendre puisque celle-ci concerne les variables $\boldsymbol{w}$: on a plutôt maintenant $\boldsymbol{p} := \partial L / \partial \boldsymbol{w} \doteq \partial L / \partial \dot{\boldsymbol{q}}$ car $\boldsymbol{w} \doteq \dot{\boldsymbol{q}}$; de même : $\partial H / \partial \boldsymbol{p} = \boldsymbol{w} \doteq \dot{\boldsymbol{q}}$.

Dans le processus qui vient d'être décrit, les variables indépendantes que sont les multiplicateurs de Lagrange relatifs aux équations de liaison $\boldsymbol{w} \doteq \dot{\boldsymbol{q}}$ doivent prendre la définition suivante :

> ***Définition*** : on appelle *impulsions généralisées* ou *moments conjugués*, notés p_i, les quantités :

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial w_i} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p} := \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}}$$

Simplification du processus - La simplification dont il est question va consister à se débarrasser complètement des variables $\boldsymbol{w}$ qui ont été nécessaires pour aboutir au formalisme hamiltonien où les $2n$ variables $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{p}$ sont indépendantes. A ce niveau de la discussion, les $\boldsymbol{w}$ sont encore présentes dans l'écriture du lagrangien, dans l'intégrale d'action avec multiplicateurs écrite en fonction de ce lagrangien, dans la transformation de Legendre et, en conséquence, dans la définition des variables $\boldsymbol{p}$.
Afin de rendre invisibles ces variables $\boldsymbol{w}$, il est nécessaire de les assimiler aux $\dot{\boldsymbol{q}}$, ce qui n'est vrai que pour les courbes solutions. Si on fait cela, alors on voit :

• que le lagrangien s'écrit comme à l'habitude : $L \doteq L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

• que la transformation de Legendre concerne la variable $\dot{\boldsymbol{q}}$: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) + L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \doteq \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$, avec cette fois $\boldsymbol{p} \doteq \partial L / \partial \dot{\boldsymbol{q}}$.

• que le principe de Hamilton avec multiplicateurs se réduit au principe de Hamilton originel dans lequel ne figure plus que l'intégrale d'action proprement dite, la liaison ayant disparu :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} \{L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}, t) - \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{w} - \dot{\boldsymbol{q}})\}\, dt \doteq \delta \int_{t_D}^{t_A} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\, dt \doteq 0$$

Et qu'en conséquence l'intégrale d'action exprimée en fonction de H s'écrit :

$$S \doteq \int_{t_D}^{t_A} \big(\boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)\big)\, dt$$

qui est bien l'intégrale qui a été rendue stationnaire pour obtenir les équations de Hamilton.

Comme on peut le voir, toutes ces égalités qui ont été utilisées dans la procédure simplifiée des sections **1** et **3** sont écrites ici pour des courbes solutions dont les variables $\boldsymbol{w}$ ont déjà été identifiées aux $\dot{\boldsymbol{q}}$ et pour lesquelles il ne reste plus qu'à obtenir les équations du mouvement pour les $\boldsymbol{q}$.

En contrepartie, ce que l'on aura du mal à justifier proprement en se passant complétement des variables $\boldsymbol{w}$, est relatif au fait que les variations de l'intégrale d'action se font – comme on l'affirme souvent - dans un cas (en formalisme hamiltonien) avec des $\delta\boldsymbol{p}$ <u>et</u> des $\delta\boldsymbol{q}$ arbitraires, alors que dans l'autre (formalisme lagrangien) on n'envisage que des $\delta\boldsymbol{q}$ arbitraires...

Par la suite, on adopte le point de vue simplifié tout en ayant conscience maintenant de l'abus de langage que cela implique.

5. Hamiltonien versus énergie mécanique. Dans le processus simplifié, le Hamiltonien du système dynamique à l'étude prend donc la forme :

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) := \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

avec : $\boldsymbol{p} := \partial L / \partial \dot{\boldsymbol{q}}$.

Or, la fonction dynamique « énergie mécanique du système » a été définie pour des lagrangiens standards :

$$E(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) := \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \partial L / \partial \dot{\boldsymbol{q}} - L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

Il est donc évident que $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$ est l'énergie mécanique du système exprimée dans les variables $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ (avec les réserves déjà exprimées au 4.7).

De ce constat, on tire immédiatement du théorème de l'énergie cinétique et du fait que $\partial H / \partial t = -\partial L / \partial t$ (puisque L et H sont transformées de Legendre l'une de l'autre) :

$$\frac{dH}{dt} \doteq \frac{\partial H}{\partial t}$$

C'est l'expression du théorème de l'énergie cinétique dans le formalisme hamiltonien. Si H ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système est conservatif.

6. Variables cycliques. D'un simple examen des équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} \doteq \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \doteq -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \end{cases}$$

On tire immédiatement le théorème suivant :

> ***Théorème*** : Lorsqu'une variable q_k ou p_k n'apparaît pas de façon explicite dans l'écriture du hamiltonien (variable cyclique), alors sa

variable conjuguée (respectivement p_k ou q_k) est une intégrale première.

Lorsque les q_i sont des distances ou des angles, on sait que les p_i associés sont des quantités de mouvement (ou impulsions) ou des moments cinétiques respectivement. Par ailleurs, un q_k cyclique pour H l'est aussi pour L. Cette propriété reflète donc les mêmes symétries déjà entrevues pour L. Le cas d'un p_k cyclique pour H est un peu nouveau ; en fait, on voit clairement que cette propriété, puisqu'elle fournit : $q_k = Cte$, fournit l'équilibre pour cette variable.
On remarquera le rôle symétrique que jouent les variables q_i et p_i dans ce théorème. Dans les chapitres qui vont suivre, cette symétrie apparaîtra de façon évidente et l'on verra qu'une variable q_i peut fort bien prendre le statut d'une variable p_i et réciproquement.

Chapitre 8bis

ESPACE DES PHASES – ESPACE DES ÉTATS

Où l'on donne un aperçu des propriétés géométriques des nouveaux espaces dynamiques que sont l'espace des phases et l'espace des états du système, pour finir par le théorème de Liouville.

1. Espace des phases. Espace des états. Dans le formalisme lagrangien, l'évolution dynamique du système est représentée par les mouvements d'un point représentatif $M^{\mathbb{L}}$ de l'espace $\mathbb{L}$ de(s) configuration(s) du système ; les coordonnées de ce point étant les q_i. Dans le formalisme hamiltonien, il est naturel de prendre en compte les nouvelles variables p_i et de se représenter l'évolution du système à l'aide d'un point représentatif $M^{\mathbb{P}}$ de coordonnées (q, p) appartenant à un espace $\mathbb{P}$ à $2n$ dimensions dénommé : *espace des phases du système*.
Dans cet espace, le temps n'est pas représenté. En ajoutant cette dimension supplémentaire qu'est l'axe temporel, on construit l'*espace des états* [2] *du système*. Un point $M^{\mathbb{E}}$ de l'espace $\mathbb{E}$ des états du système aura donc pour coordonnées (q, p, t).

[2] Aussi appelé *espace des phases étendu*. On prendra le parti pris ici d'appeler espace des phases étendu l'espace des phases auquel on adjoint le temps et son moment conjugué qui est, au signe près, le hamiltonien du système (voir les chapitres ultérieurs).

2. Représentation graphique des trajectoires. L'espace $\mathbb{L}$ des configurations du système n'est pas adapté à une représentation graphique des trajectoires dynamiques susceptibles d'être empruntées par le point représentatif $M^{\mathbb{L}}$ selon les conditions initiales que l'on se donne. En effet, à supposer que le système passe par un certain point $M^{\mathbb{L}}$ à un certain instant t_0, cette donnée reste insuffisante pour déterminer de façon univoque la trajectoire qu'il suivra un instant plus tard, car cela dépend de la vitesse (*id est* : des $\dot{q}_i$) qu'avait ce point à l'instant t_0. On doit conclure de cette remarque que de façon générale une infinité de trajectoires possibles passent par un point donné de l'espace de configuration en fonction des conditions initiales variées que l'on se donne.

Dans l'espace des états du système - Le cas de l'espace des états est radicalement différent. Dans cet espace, les coordonnées (q, p, t)

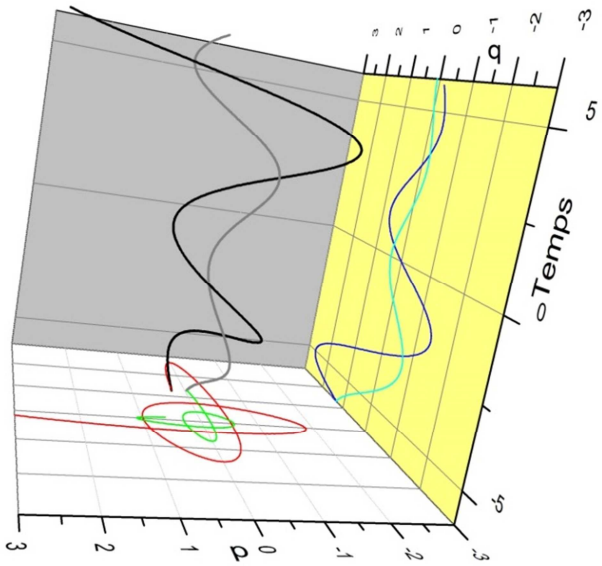


Figure 1 : Trajectoires dans l'espace des états (courbes grise et noire) et dans l'espace des phases (courbes verte et rouge) pour deux conditions initiales différentes, avec, en bleus sur fond jaune, les courbes solutions $q(t)$ associées. Le hamiltonien est ici celui d'un oscillateur amorti 1D issu du lagrangien non standard traité au chapitre 3 ; cet hamiltonien dépend explicitement du temps.

d'un point représentatif $M^{\mathbb{E}}$ du système équivalent à des conditions initiales complétement déterminées. Il s'ensuit que la trajectoire suivie par ce point un instant plus tard sera complétement spécifiée par les équations du mouvement.
On conclut ainsi que par un point de l'espace des états passe une unique trajectoire possible pour le système : les trajectoires dans cet espace ne se coupent donc pas ; elles s'entrelacent (figure 1) en général. Cette propriété ouvre la possibilité d'une classification graphique (et donc géométrique et algébrique) des trajectoires prises par le système selon les conditions initiales que l'on se donne.

Ces raisonnements sont sous-tendus par le théorème suivant que l'on formule ici un peu à l'emporte-pièce :

> ***Théorème de Cauchy – Lipschitz*** : Soit un système d'équations différentielles d'ordre un pour la variable N-dimensionnelle $\boldsymbol{X}(t)$:
>
> $$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{X})$$
>
> Si $\boldsymbol{f}$ est continue et lipschitzienne - c'est-à-dire si $\exists\ c$ tel que $|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{X_1}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{X_2})| < c\ |\boldsymbol{X_1} - \boldsymbol{X_2}|$ – , alors la solution existe et elle est unique une fois la condition initiale $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X_0}$ fixée pour un temps arbitraire t_0 fini.

Dans l'espace des phases du système - Les trajectoires du point représentatif $M^{\mathbb{P}}$ du système au sein de l'espace des phases

s'obtiennent grâce à une simple projection des trajectoires de l'espace des états (figure 1). La propriété d'unicité des trajectoires qui passent par un point de l'espace des phases n'est donc pas vraie en général puisqu'il se peut fort bien qu'un même point de cet espace soit affecté d'un temps différent et qu'il corresponde donc à deux conditions initiales (q, p, t) et (q, p, t') différentes. Toutefois, on montre ci-dessous que l'on retrouve cette unicité des trajectoires si le hamiltonien qui régit la dynamique du système ne dépend pas explicitement du temps (figure 2), c'est-à-dire si le système est conservatif.

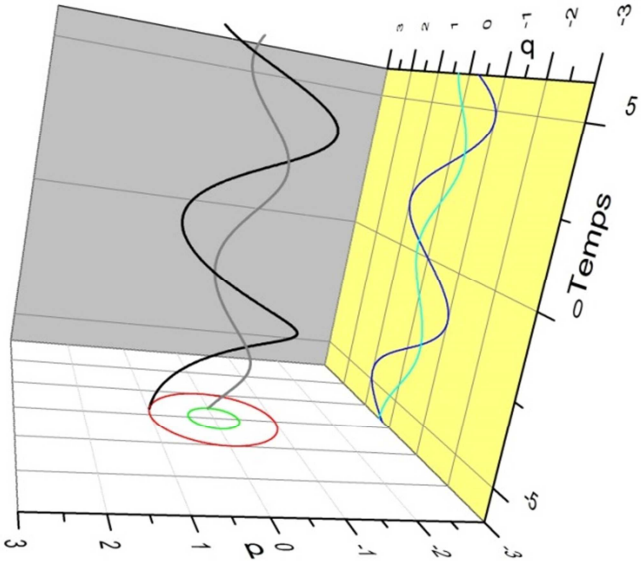


Figure 2 : Trajectoires dans l'espace des états (courbes grise et noire) et dans l'espace des phases (courbes verte et rouge) pour deux conditions initiales différentes, avec, en bleus sur fond jaune, les courbes solutions $q(t)$ associées. Le hamiltonien est ici celui de l'oscillateur harmonique 1D ; il ne dépend pas explicitement du temps.

3. Flot hamiltonien. Afin d'étayer ces aspects graphiques, on peut se forger une image hydrodynamique des mouvements possibles d'un système en regardant dans l'espace des phases (ou des états) de ce système les mouvements d'un ensemble de

points représentatifs associés à des conditions initiales différentes. On a d'abord besoin de se définir une géométrie.

Géométrie euclidienne dans l'espace des phases et dans l'espace des états - On introduit une géométrie euclidienne élémentaire dans l'espace des phases et dans l'espace des états, analogue à celle de l'espace habituel. Cette géométrie est en fait adaptée à la notation des vecteurs n-uplets qui a été développée tout au long des chapitres précédents.

Selon cette géométrie, le « vecteur-position » dans l'espace des phases sera le vecteur $\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathbb{P}}$ dont les composantes cartésiennes sont les $\boldsymbol{q}$ assorties des $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathbb{P}} := (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$.
Dans l'espace des états, on aura de la même façon : $\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathbb{E}} := (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$.

On introduit les « vecteurs-vitesse » $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}} := (\dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{p}})$ et $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{E}} := (\dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{p}}, 1)$, dérivées par rapport au temps des « vecteurs-position » pour chacun des deux espaces.

On introduit également les opérateurs « gradient » dans l'espace des phases et dans l'espace des états :

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{P}} := \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\right)$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{E}} := \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Flots hamiltoniens dans l'espace des phases et dans l'espace des états – Moyennant les outils qui viennent d'être mis en place,

on constate que les équations de Hamilton définissent un « vecteur-vitesse » associé aux courbes solutions en chaque point de l'espace des phases à chaque instant. En effet, puisque :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} \doteq \dfrac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \doteq -\dfrac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial \boldsymbol{q}} \end{cases}$$

alors on peut tracer, à l'instant t, ce « vecteur-vitesse » en chaque point $M^{\mathbb{P}}(q,p)$ de l'espace $\mathbb{P}$**.** On dit ainsi que les équations de Hamilton définissent le *champ* ou *flot hamiltonien* des solutions à chaque instant :

$$\boldsymbol{v}^{\mathbb{P}} \doteq \left(\frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial \boldsymbol{p}}, -\frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial \boldsymbol{q}}\right)$$

On peut échafauder une vision similaire dans l'espace $\mathbb{E}$ des états du système en ajoutant aux équations de Hamilton l'équation évidente : $\dot{t} = \partial t/\partial t = 1$ qui est toujours vraie, y compris pour les courbes solutions. On définit ainsi un flot hamiltonien dans l'espace des états :

$$\boldsymbol{v}^{\mathbb{E}} \doteq \left(\frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial \boldsymbol{p}}, -\frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial \boldsymbol{q}}, 1\right)$$

4. Un flot hamiltonien est à flux conservatif.

Dans l'espace des phases - En prenant la divergence du flot hamiltonien relatif à l'espace des phases on trouve immédiatement, à cause du théorème de Schwarz :

$$div_{\mathbb{P}}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}} := \boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{P}}.\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}} \doteq \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}$$

$$= Tr\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \boldsymbol{q} \partial \boldsymbol{p}}\right) - Tr\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \boldsymbol{p} \partial \boldsymbol{q}}\right) = 0$$

Ainsi *le flot hamiltonien est à divergence nulle*. Cette propriété locale du flot, vérifiée à chaque instant, s'accompagne de son homologue intégrale issue du théorème de Green-Ostrogradski, qui s'écrit ici :

$$\int_{V_{\mathbb{P}}} div_{\mathbb{P}}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}}\, d\mathcal{v} = \oint_{\partial V_{\mathbb{P}}} \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}}.d\boldsymbol{\mathcal{s}}$$

où $V_{\mathbb{P}}$ est un hyper-volume fini de l'espace des phases dont l'élément de volume est $d\mathcal{v} = dq_1 dq_2 \dots dq_n dp_1 dp_2 \dots dp_n$; $\partial V_{\mathbb{P}}$ est l'hyper-surface définissant la frontière de $V_{\mathbb{P}}$, et $d\boldsymbol{\mathcal{s}}$ un élément de surface orienté de cette hyper-surface frontière. Puisque $div_{\mathbb{P}}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}} = 0$, le flot hamiltonien est donc à flux conservatif :

$$\oint_{\partial V_{\mathbb{P}}} \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}}.d\boldsymbol{\mathcal{s}} = 0$$

Autrement dit, l'écoulement des lignes du champ hamiltonien - lignes qui reflètent chacune une trajectoire dans l'espace des phases pour une condition initiale donnée – au travers d'un hyper-volume quelconque est conservé à chaque instant.

Cependant, il ne faut pas conclure que les lignes du flot hamiltonien ne se croisent pas dans l'espace des phases : en effet, la démonstration ci-dessus est réalisée pour un instant t donné : une photographie de l'espace des phases à cet instant montrerait bien un flot hamiltonien dont les lignes ne se croisent pas (figure 3) ; mais, à un instant ultérieur, le flot a en réalité changé puisque les équations de Hamilton qui définissent la valeur de ce flot en chaque point de l'espace $\mathbb{P}$ dépendent explicitement du temps si le hamiltonien du problème en dépend. Ce flot « figé » à l'instant t n'est donc qu'en relation indirecte avec les mouvements réels d'un point représentatif du système.

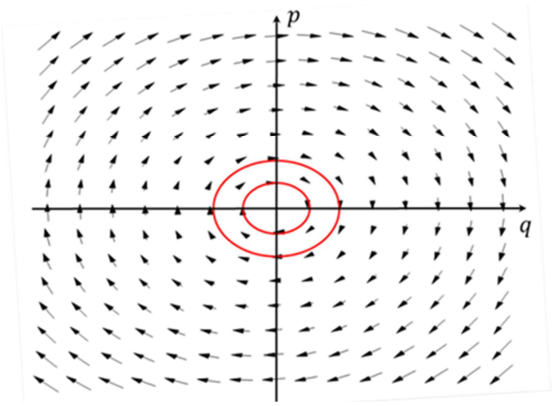


Figure 3 : Un aspect du flot hamiltonien à un instant fixé pour l'oscillateur amorti dont le hamiltonien dépend du temps. Ces courbes ne sont pas en relation directe avec celles effectivement suivies par le point représentatif (voir les figures 1 et 6).

Malgré tout, on peut conclure qu'à l'inverse, si le hamiltonien du système ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire si le système est conservatif, alors l'image du flot hamiltonien obtenue à un instant t est la même que celle obtenue à tout autre instant puisque ce flot ($\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}}$) ne dépend que des positions (q, p). Les lignes de ce champ ne se croiseront effectivement pas (figure 2).

Dans l'espace des états - On dispose d'une propriété tout à fait similaire dans l'espace des états :

$$div_{\mathbb{E}}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{E}} := \boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{E}}.\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{E}} \doteq \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial}{\partial t}(1) = 0$$

Le flot hamiltonien défini dans l'espace des états est donc également à flux conservatif. En outre, attendu que t est l'une des coordonnées du point représentatif $M^{\mathbb{E}}$ dans cet espace, cela assure le non recoupement des lignes qui le représentent même si le hamiltonien du système dépend explicitement du temps (figures 1 et 2).

5. Hyper-surfaces iso-hamiltoniennes. Dans l'espace habituel, la différentielle d'une fonction $f = f(x, y, z)$ est reliée au gradient de cette fonction par la relation : $df = \vec{\nabla} f . d\vec{r}$. On sait par ailleurs que l'équation $f(x, y, z) = Cte = f_0$ définit une surface appelée surface de niveau ou encore « surface iso-f », et que deux telles surfaces iso-f ne peuvent s'intersecter puisqu'elles n'ont pas la même valeur pour f. En outre, en envisageant un déplacement élémentaire $d\vec{r} = d\vec{r}_{\parallel}$ au sein d'une surface iso-f, l'équation précédente donne $df = \vec{\nabla} f . d\vec{r}_{\parallel} = 0$; ce qui signifie que $\vec{\nabla} f$ est toujours orthogonal aux surfaces iso-f.

On se place maintenant dans l'espace des phases du système et on considère la fonction dynamique $f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$. Sa différentielle s'écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot d\boldsymbol{q} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot d\boldsymbol{p} + \frac{\partial f}{\partial t}\, dt = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{P}} f \cdot d\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathbb{P}} + \frac{\partial f}{\partial t}\, dt$$

Systèmes conservatifs - Si la fonction f ne dépend pas explicitement du temps, alors $\partial f/\partial t = 0$ et cette relation s'écrit aussi sous la forme :

$$\frac{df}{dt} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{P}} f . \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}}$$

En choisissant pour fonction f le hamiltonien $H = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ d'un système conservatif et pour $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}}$ le flot hamiltonien :

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}} \doteq \left(\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}, -\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{q}} \right)$$

on obtient donc :

$$\frac{dH}{dt} \doteq \boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{P}} H . \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}}$$

Or, le théorème de l'énergie cinétique a lieu d'être pour les courbes solutions :
$dH/dt \doteq \partial H/\partial t = 0$,
d'où :

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{P}} H . \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}} \doteq 0$$

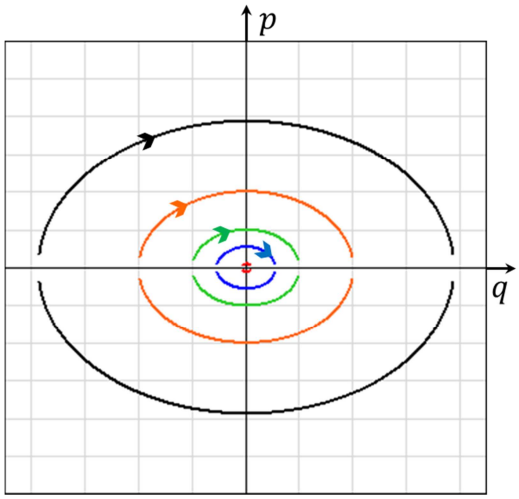


Figure 4 : Trajectoires d'un point représentatif du système dans l'espace des phases pour diverses conditions initiales dans le cas de l'oscillateur harmonique dont le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps. Ces trajectoires se déplacent sur les surfaces iso-hamiltoniennes (ici des ellipses). Voir aussi la figure 2.

Ainsi, les courbes solutions sont toujours orthogonales au gradient du hamiltonien, intégrale première du mouvement ; c'est-à-dire qu'elles ont lieu sur des hyper-surfaces iso-hamiltoniennes ou iso-énergie.

Systèmes non conservatifs - Si maintenant la fonction f dépend explicitement du temps, alors il faut écrire :

$$\frac{df}{dt} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{P}} f . \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

En choisissant pour fonction f le hamiltonien $H = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ d'un système non conservatif et pour $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}}$ le flot hamiltonien :

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}} \doteq \left(\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial \boldsymbol{p}}, - \frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial \boldsymbol{q}} \right)$$

On obtient alors :

$$\frac{dH}{dt} \doteq \boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{P}} H . \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Or, le théorème de l'énergie cinétique a encore lieu d'être pour les courbes solutions : $dH/dt \doteq \partial H/\partial t$, d'où à nouveau :

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{P}} H . \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathbb{P}} \doteq 0$$

Les courbes solutions du système non conservatif sont donc encore orthogonales au gradient du hamiltonien, c'est-à-dire qu'elles ont lieu à chaque instant sur des hyper-surfaces iso-hamiltoniennes. Mais ces hyper-surfaces évoluent dans le temps (figure 5) et H n'est pas ici une intégrale

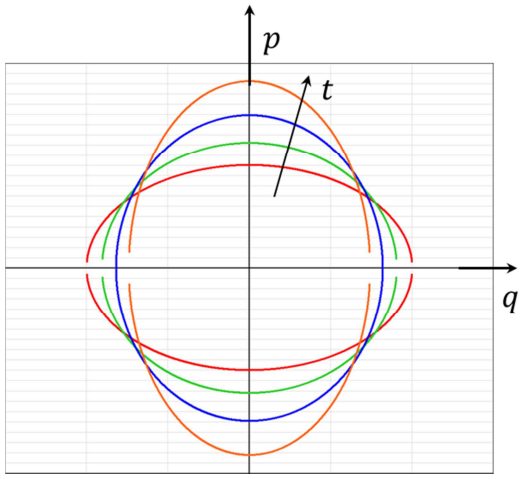


Figure 5 : évolution dans le temps d'une hyper-surface iso-hamiltonienne $H = H_0$ lorsque le hamiltonien du système dépend explicitement du temps. Ici, le cas de l'oscillateur amorti.

première : de sorte qu'à chaque instant la trajectoire du point représentatif dans l'espace des phase admet pour tangente une hyper-surface iso-hamiltonienne dont la valeur de H dépend de cet instant (figure 6).

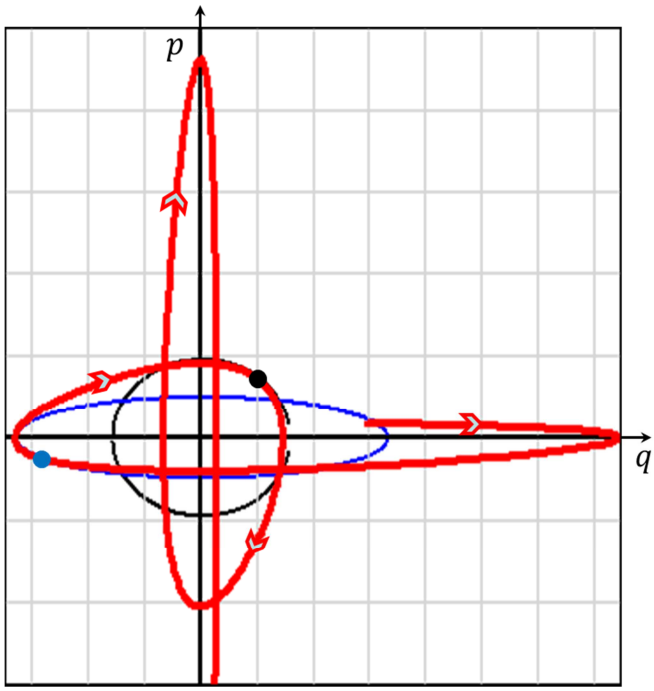


Figure 6 : Une trajectoire (en rouge) du point représentatif du système pour le hamiltonien de l'oscillateur amorti qui dépend explicitement du temps (voir aussi la figure 1). En bleu et noir : deux hyper-surfaces iso-hamiltoniennes (à valeurs de H différentes) tangentes à la trajectoire à deux instants donnés : la trajectoire est à chaque instant tangente à de telles surfaces.

Enfin, on aura compris que l'étude du flot hamiltonien revient d'une certaine façon à l'étude des propriétés géométrique de la fonction hamiltonienne, nonobstant le changement de signe (important) sur sa dérivée partielle par rapport aux $\boldsymbol{q}$.

6. Théorème de Liouville. Un énoncé du théorème de Liouville peut être le suivant :

> ***Théorème de Liouville*** : Tout hyper-volume de l'espace des phases se conserve au cours du temps.

En fait, la démonstration de ce théorème a déjà été réalisée dans la section **4**. En effet, on sait de façon générale que si $\vec{v}(x, y, z, t)$ représente un champ de vitesses, alors sa divergence mesure la variation de volume par unité de temps et de volume : soit par exemple un ensemble continu de points matériels contenus dans un certain volume $V(t)$ à l'instant t. On peut imaginer une surface $S(t)$ qui délimite ce volume et fait office de paroi. Pendant la durée dt, ce volume aura varié d'une quantité dV qui s'identifie au final avec le volume généré (positivement ou négativement) par l'ensemble des déplacements élémentaires de chaque élément de surface ds de la paroi. Or, le volume élémentaire généré par le déplacement $d\vec{r}$ d'un élément de surface de la paroi est : $d\tau = dr\, ds\, cos\left(\widehat{d\vec{r}, d\vec{s}}\right) = d\vec{r}.d\vec{s}$; et comme le point matériel associé à ds se sera déplacé de la quantité $d\vec{r} = \vec{v}\, dt$, la variation de volume globale sera alors :

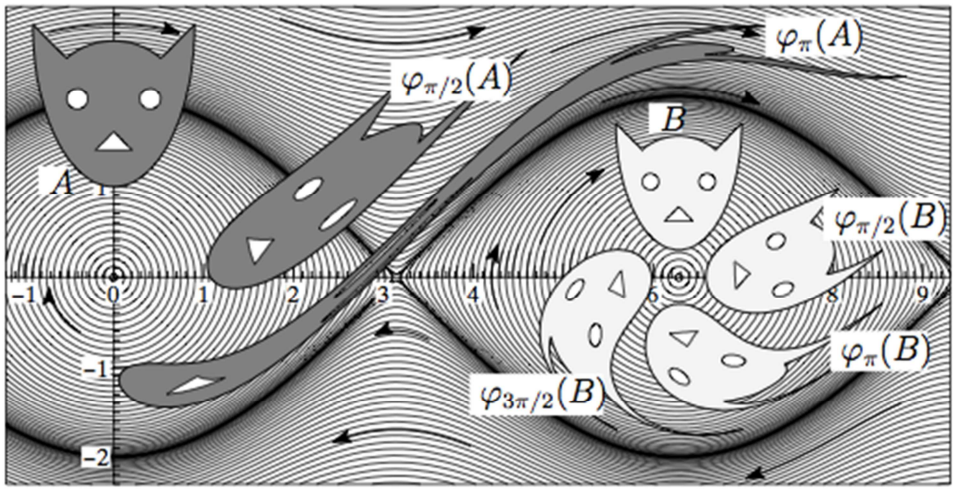
$$dV = \oint_S d\tau = \left(\oint_S \vec{v}.d\vec{s}\right) dt$$

Ainsi, le flux du vecteur-vitesse au travers de la surface délimitant le volume V à l'instant t exprime la variation de ce volume au cours du temps. Et le théorème de Green-Ostrogradski complète la démonstration.

Appliquées à l'espace des phases, ces idées débouchent sur la vision suivante. Etant donné un hyper-volume de taille $\mathcal{v}$ de l'espace des phases formé par un ensemble de conditions initiales voisines ; alors cet hyper-volume peut se déformer au

cours du temps, éventuellement très fortement, mais sa taille sera toujours v.

L'exemple suivant montre le *portrait de phases* du pendule plan et l'évolution de deux hyper-volumes (ici les surfaces A et B) de conditions initiales au cours du temps (repéré ici par la variable φ).



D'après : https://smac2014.wikispaces.com

Chapitre 9

TRANFORMATIONS CANONIQUES

Le formalisme hamiltonien offre la possibilité de trouver de nouveaux jeux de coordonnées (Q_i, P_i) pour lesquels les équations de Hamilton pourront encore être écrites : c'est la théorie des transformations canoniques.

1. Jauge lagrangienne. Un lagrangien qui décrit la dynamique d'un système n'est pas unique. En fait, il en existe une infinité. En particulier, on montre ici que deux lagrangiens qui ne diffèrent entre eux que par la dérivée d'une fonction $F = F(\boldsymbol{q}, t)$ donnent lieu à la même dynamique.

Démonstration analytique – Soient deux lagrangiens $L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ et $L' = L'(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ tels que :

$$L'(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \frac{dF(\boldsymbol{q}, t)}{dt}$$

Comme :

$$\frac{dF}{dt} = \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{q}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

Or, on montre que $d/dt\,(\partial F/\partial \boldsymbol{q}) = \partial/\partial \boldsymbol{q}\,(dF/dt)$. En effet [3] :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{q}}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{q}^2}\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{q}}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial F}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

Alors il faut conclure que :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{q}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}$$

Et qu'en conséquence, les équations de Lagrange pour L' et L seront les mêmes : L' et L décrivent donc bien la même dynamique.

Démonstration variationnelle – Le principe de Hamilton appliqué à L' énonce :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} L'(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\, dt \doteq 0$$

Soit encore :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} \left[L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \frac{dF(\boldsymbol{q}, t)}{dt}\right] dt \doteq 0$$

Ce qui s'écrit :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\, dt + \left[\delta F\right]_{t_D}^{t_A} \doteq 0$$

---

[3] La démonstration repose sur la propriété que l'on peut démontrer pour soi-même :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{w}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \boldsymbol{w} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \boldsymbol{v}$$

où $(\,)^T$ signifie la matrice transposée, $(\partial \boldsymbol{v}/\partial \boldsymbol{u})$ est la matrice $\left(\partial v_i/\partial u_j\right)ij$ et où la notation $(\partial \boldsymbol{v}/\partial \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{w}$ signifie que la matrice $(\partial \boldsymbol{v}/\partial \boldsymbol{u})$ s'applique sur le n-uplet colonne $\boldsymbol{w}$. Enfin, le théorème de Schwarz est utilisé et ici : $(\partial \dot{\boldsymbol{q}}/\partial \boldsymbol{q}) = \hat{0}$.

Avec : $\delta F = (\partial F/\partial \boldsymbol{q}) \cdot \delta \boldsymbol{q}$. Or les variations δq sont toutes nulles aux bornes : le terme tout intégré est donc nul. En conséquence, et puisque le raisonnement aurait été le même si on était parti de L, on a l'équivalence :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} L'(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\, dt \doteq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{t_D}^{t_A} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\, dt \doteq 0$$

Ce qui signifie que la fonction F ne jouera aucun rôle dans les équations de Lagrange pour L' ou pour L qui décrivent donc bien la même dynamique.

Remarque fondamentale pour la théorie des transformations canoniques – On voit que la démonstration qui précède est fondée sur le fait que, de façon générale, la variation intégrale de la dérivée d'une fonction $F = F(\boldsymbol{q}, t)$ est toujours nulle pour des variations $\delta \boldsymbol{q}$ nulles aux bornes :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} \frac{dF(\boldsymbol{q}, t)}{dt}\, dt = 0 \qquad \forall\, F$$

2. Transformations canoniques et fonctions génératrices. Soit un hamiltonien $H = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ pour lequel les équations de Hamilton ne sont pas aisément maniables. On se propose de trouver un nouveau jeu de variables $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$ qui soit tel, que les nouvelles équations qui surviennent après avoir réalisé le changement de variables $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \longrightarrow (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$ sont les équations de Hamilton pour un nouvel hamiltonien $H' = H'(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$.

> ***Définition*** - Les transformations $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$ qui laissent invariantes les équations

canoniques du mouvement sont appelées *transformations canoniques*.

Fonction génératrice - Puisque les équations canoniques dérivent du principe de Hamilton, on peut écrire pour chacun des deux jeux de variables :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} \left(\boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)\right) dt \doteq 0$$

où les variations $\delta \boldsymbol{q}$ sont arbitraires et nulles aux bornes, et :

$$\delta \int_{t_D}^{t_A} \left(\boldsymbol{P} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}} - H'(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)\right) dt \doteq 0$$

où les variations $\delta \boldsymbol{Q}$ sont arbitraires et nulles aux bornes. Profitant de la remarque fondamentale qui précède, on peut garantir que ces deux égalités seront vérifiées simultanément si les intégrandes de ces deux intégrales ne diffèrent entre eux que par la dérivée d'une fonction, qui sera notée F_1, dont les arguments peuvent être les $\boldsymbol{q}$ et/ou les $\boldsymbol{Q}$, ainsi que le temps éventuellement : $F_1 = F_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)$.
De la sorte, on voit que la différentielle de F_1 doit pouvoir s'écrire :

$$dF_1 = \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{Q} + (H' - H)dt$$

Or, on a bien sûr :

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot d\boldsymbol{q} + \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{Q}} \cdot d\boldsymbol{Q} + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

Ce qui impose les $(2n + 1)$ équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{p} & (1) \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{Q}} = -\boldsymbol{P} & (2) \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial t} = H' - H & (3) \end{cases}$$

En supposant connue la fonction $F_1 = F_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)$, la signification de ces équations est alors la suivante : le premier jeu de n équations doit permettre d'obtenir $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$. Le second jeu de n équations doit alors permettre d'obtenir $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ si (1) est résolu. Enfin, la dernière équation permet d'obtenir $H' = H'(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$ après avoir effectué toutes les substitutions nécessaires issues de (1) et (2).
De ce raisonnement, on conclut donc que si la fonction $F_1 = F_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)$ est connue alors la transformation $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$ est parfaitement déterminée.

> ***Définition*** – On dit de la fonction $F_1 = F_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)$ qu'elle est une *fonction génératrice* de la transformation $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$.

Plusieurs types de fonctions génératrices – En réalisant une transformation de Legendre sur la fonction F_1, il est possible d'engendrer une autre fonction génératrice du même changement de variables. En effet, puisque, par exemple, $\partial F_1 / \partial \boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{P}$, la transformée de Legendre de $F_1 = F_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)$ vis-à-vis des variables $\boldsymbol{Q}$ sera une fonction, notée $F_1' = -F_2$, dont les arguments seront les $\boldsymbol{q}$, les P et le temps

éventuellement : $F_1' = -F_2 = -F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)$. Conformément à la définition de la transformée de Legendre, on aura alors :

$$F_1' = (-\boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{Q} - F_1 = -F_2$$

Si bien qu'en écrivant la différentielle de cette relation, on déduit les liens entre les dérivées partielles des deux fonctions F_1 et F_2 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{q}} = \dfrac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{q}} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial t} = \dfrac{\partial F_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{Q} \end{cases}$$

Comme au chapitre 8, la première série de n équations ainsi que celle concernant le temps reflètent le lien entre les dérivées partielles pour les variables ne participant à la transformation de Legendre (le signe a changé par rapport au chapitre 8 en raison du changement de signe $F_1' = -F_2$). On reconnaît la dernière série comme étant la relation duale de la relation $\partial F_1 / \partial \boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{P}$.

Le système d'équations (1), (2), (3) précédent peut bien alors être remplacé par un système équivalent où seule F_2 apparaît :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{p} & (1bis) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{Q} & (2bis) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial t} = H' - H & (3bis) \end{cases}$$

Et on peut raisonner de la même façon que précédemment. F_2 est donc bien aussi une fonction génératrice du changement de variables $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$.
Tous ces arguments supposaient bien sûr qu'il était possible d'opérer une transformation de Legendre avec la variable concernée (on se rappelle des conditions de concavité). Les deux autres types qui suivent sont aussi soumis à cette condition.

Types $\boldsymbol{F_3}$ et $\boldsymbol{F_4}$ – La transformation de Legendre qui vient d'être réalisée a impliqué les variables $\boldsymbol{Q}$. Mais on aurait tout aussi bien pu envisager de réaliser une transformation de Legendre impliquant les variables $\boldsymbol{q}$. Dans ce cas, puisque $\partial F_1/\partial \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$, la transformée de Legendre de $F_1 = F_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)$ vis-à-vis des variables $\boldsymbol{q}$ sera une fonction, notée $F_1'' = -F_3$, dont les arguments seront les $\boldsymbol{p}$, les $\boldsymbol{Q}$ et le temps éventuellement : $F_1'' = -F_3 = -F_3(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, t)$. Conformément à la définition de la transformée de Legendre, on aura alors :

$$F_1'' = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} - F_1 = -F_3$$

Un raisonnement en tout point similaire au précédent aboutit donc à un troisième système possible qui fait de F_3 un

nouvelle fonction génératrice du changement de variables $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial \boldsymbol{p}} = -\boldsymbol{q} & (1ter) \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial \boldsymbol{Q}} = -\boldsymbol{P} & (2ter) \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial t} = H' - H & (3ter) \end{cases}$$

Naturellement, on peut aussi envisager une transformation de Legendre sur F_1 vis-à-vis des deux jeux de variables $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{Q}$ simultanément. La nouvelle transformée de Legendre sera alors une fonction $F_1''' = -F_4 = -F_4(\boldsymbol{p},\boldsymbol{P},t)$ définie par :

$$F_1''' = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} + (-\boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{Q} - F_1 = -F_4$$

On aboutit ainsi à un quatrième jeu d'équations possible :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_4}{\partial \boldsymbol{p}} = -\boldsymbol{q} & (1quater) \\ \dfrac{\partial F_4}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{Q} & (2quater) \\ \dfrac{\partial F_4}{\partial t} = H' - H & (3quater) \end{cases}$$

Selon les problèmes auxquels on a à faire face, on emploie le plus souvent des fonctions génératrices de type F_1 ou F_2.

Relations caractéristiques d'une transformation canonique – En examinant les dérivées secondes des quatre fonctions génératrices à partir des quatre séries de relations qui

viennent d'être établies pour un même changement de variables $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$, on déduit les quatre relations matricielles suivantes [4], après avoir utilisé le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T ;\ \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T ;\ \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T ;\ \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T$$

où $\partial \boldsymbol{p}/\partial \boldsymbol{Q} := \left(\partial p_i/\partial Q_j\right)ij$, etc... On montre également que si ces relations sont satisfaites, alors le changement de variables est canonique.

Transformations canoniques et espace des phases - Une transformation canonique est une *transformation ponctuelle* de l'espace des phases $\mathbb{P}$ qui a la particularité de laisser invariantes les équations de Hamilton. Comme toute transformation ponctuelle, on peut voir cette opération selon plusieurs points de vue équivalents.

Une première façon est de voir la transformation comme un changement de variables pour représenter le même point $M^{\mathbb{P}}$ de l'espace des phases, à l'image du passage des coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace réel aux coordonnées cylindriques par exemple.

Une autre façon est de voir la transformation comme la mise en relation d'un point $M^{\mathbb{P}}$ de coordonnées (q,p) de l'espace

[4] En faisant la démonstration, on fera attention au fait que le théorème de Schwarz s'écrit sous forme matricielle :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{u}\partial \boldsymbol{v}} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{v}\partial \boldsymbol{u}}\right)^T$$

des phases $\mathbb{P}$ avec un point $M^{\mathbb{P}'}$ de coordonnées (Q, P) d'un autre espace des phases $\mathbb{P}'$.

Enfin, il faut souligner que le temps t n'est pas transformé par ce type de transformation canonique que l'on peut qualifier de synchrone.

3. Exemples de transformations canoniques. ***Transformation identité*** – Soit la fonction génératrice de type F_2 : $Id_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t) := \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{P}$. Alors les équations de la transformation sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Id_2}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} \\ \dfrac{\partial Id_2}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q} \\ \dfrac{\partial Id_2}{\partial t} = 0 = H' - H \end{cases}$$

Id_2 est donc la transformation identité. On montre de même que $Id_3(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, t) := -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{Q}$ en est son analogue pour le type F_3.

Inversion des coordonnées et impulsions généralisées – Soit la fonction génératrice de type F_1 : $I_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t) := \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{Q}$. Alors les équations de la transformation sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{p} \\ \dfrac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{q} = -\boldsymbol{P} \\ \dfrac{\partial I_1}{\partial t} = 0 = H' - H \end{cases}$$

On pourra montrer que $I_4(\boldsymbol{p},\boldsymbol{P},t) := \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{P}$ est l'analogue de type F_4 de cette transformation qui vient d'inverser les $\boldsymbol{q}$ et les $\boldsymbol{p}$ au signe près. On conclut que coordonnées généralisées et impulsions généralisées ont exactement le même statut en dynamique hamiltonienne.

Transformations ponctuelles de l'espace de configuration – Soit la fonction génératrice de type F_2 définie par :

$$P_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},t)\cdot\boldsymbol{P}$$

où $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},t) \rightleftharpoons \left(f_1(\boldsymbol{q},t), f_2(\boldsymbol{q},t), \dots, f_n(\boldsymbol{q},t)\right)^T$, les f_i étant des fonction régulières de leurs arguments. Les équations de cette transformation sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_2}{\partial \boldsymbol{q}} = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},t) = \boldsymbol{Q} \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial t} = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{P} = H' - H \end{cases}$$

où il faut constater que la transformation des $\boldsymbol{q}$ en $\boldsymbol{Q}$ se réalise indépendamment des $\boldsymbol{p}$ et/ou $\boldsymbol{P}$: $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},t)$. Il s'agit donc là d'une transformation ponctuelle (synchrone) de l'espace des configurations. En conséquence, les transformations ponctuelles de l'espace des configurations sont incluses dans les transformations ponctuelles de l'espace des phases.

On pourra conclure au même résultat concernant les transformations ponctuelles de l'*espace des moments* avec la transformation canonique : $P_3(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{p},t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p},t)\cdot\boldsymbol{Q}$.

4. Deux problèmes clefs. Au vu des exemples précédents, on peut imaginer qu'il existe des transformations canoniques qui doivent permettre d'intégrer les équations du mouvement de la façon la plus simple possible.

Réduction à un problème de valeurs initiales – A supposer qu'il existe une transformation canonique pour le problème dynamique auquel on s'intéresse qui soit telle que : $H'(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t) = 0$. Dans ce cas, les équations de Hamilton pour H' sont les plus simples possibles et fournissent directement la solution :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{Q}} \doteq \dfrac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{P}} = 0 \\ \dot{\boldsymbol{P}} \doteq -\dfrac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{Q}} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Q}(t) \doteq \boldsymbol{Cte} = \boldsymbol{Q}(t_0) = \boldsymbol{Q}_0 \\ \boldsymbol{P}(t) \doteq \boldsymbol{Cte} = \boldsymbol{P}(t_0) = \boldsymbol{P}_0 \end{cases}$$

On dit que le problème a été réduit à un problème de valeurs initiales. Connaissant la fonction génératrice, on peut ensuite revenir aux variables $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ d'origine, et le problème est résolu.
Naturellement, la difficulté va être de trouver la transformation canonique grâce à laquelle ce programme est réalisable. Une telle étude mène à la démarche de Hamilton-Jacobi.

Réduction à un problème d'équilibre – A supposer maintenant qu'il existe une transformation canonique qui débouche sur un hamiltonien H' indépendant du temps et pour lequel tous

les $\boldsymbol{Q}$ sont cycliques : $H' = H'(\boldsymbol{P})$. Les équations de Hamilton pour H' sont alors :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{Q}} \doteq \dfrac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{P}} \\ \dot{\boldsymbol{P}} \doteq -\dfrac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

La seconde série d'équations fournit d'abord : $\boldsymbol{P}(t) \doteq \boldsymbol{P}_0$. Puis, ce résultat injecté dans la première série donne alors (puisque $H' = H'(\boldsymbol{P})$) : $\dot{\boldsymbol{Q}} \doteq \boldsymbol{Cte} = \dot{\boldsymbol{Q}}_0$. Cette dernière équation s'intègre directement et les solutions sont donc :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{Q}} \doteq \dot{\boldsymbol{Q}}_0\, t + \boldsymbol{Q}_0 \\ \\ \boldsymbol{P}(t) \doteq \boldsymbol{P}_0 \end{cases}$$

Qui sont les solutions à un problème de dynamique sans forces en présence. C'est pourquoi on dit que le problème d'origine a été réduit à un problème d'équilibre.
Comme précédemment, on peut ensuite revenir aux variables $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ d'origine si on connaît la fonction génératrice. L'étude de ce programme mène à la théorie des variables angle/action.

5. Le mouvement vu comme une succession de transformations canoniques infinitésimales. ***Transformations Canoniques Infinitésimales (TCI)*** – Soit la transformation canonique de type F_2 :

$$Id_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{P}$$

dont on a vu au **3** qu'elle représente la transformation identité. On définit alors la notion de *transformation canonique infinitésimale (TCI)* de type F_2 par la fonction génératrice :

$$F_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t) = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{P} + \varepsilon\, G(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$$

où ε peut être aussi petit que l'on veut. Ce changement infinitésimal de variables est fourni par les équations de la transformation :

$$\frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{p} = \boldsymbol{P} + \varepsilon\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}}\ ;\ \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} + \varepsilon\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{P}}\ ;\ H' - H = \varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}$$

G détermine donc la transformation infinitésimale $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$ ainsi que le changement infinitésimal d'hamiltonien. *On dit de G qu'elle caractérise la TCI.*

On peut voir que :

$$\begin{cases} \varepsilon\,\boldsymbol{q} = \varepsilon\,\boldsymbol{Q} - \varepsilon^2\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{P}} = \varepsilon\,\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2) \\ \varepsilon\,\boldsymbol{p} = \varepsilon\,\boldsymbol{P} + \varepsilon^2\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}} = \varepsilon\,\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2) \end{cases}$$

Ainsi, à l'ordre 1 en ε, on peut remplacer, à l'envie, $\varepsilon\,\boldsymbol{Q}$ par $\varepsilon\,\boldsymbol{q}$ et $\varepsilon\,\boldsymbol{P}$ par $\varepsilon\,\boldsymbol{p}$, et vice-versa.

De même, ce changement infinitésimal de variables canoniques permet, à l'ordre 0 en ε, de remplacer les dérivées partielles $\partial G/\partial\boldsymbol{P}$ et $\partial G/\partial\boldsymbol{q}$ de la fonction $G(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$ par $\partial G/\partial\boldsymbol{p}$ et $\partial G/\partial\boldsymbol{Q}$ respectivement ; en effet, la règle de dérivation en chaîne accompagnée des équations de la transformation permettent d'écrire :

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{P}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{p}} + \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{p} \partial \boldsymbol{q}}\right)^T \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{P}}$$
$$= \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{P}} + \boldsymbol{O}(\varepsilon)$$

et :

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{Q}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{P}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{Q}} - \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{Q} \partial \boldsymbol{P}}\right)^T \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}}$$
$$= \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{O}(\varepsilon)$$

Le mouvement est une succession de TCI – On démontre maintenant que les mouvements du système de points matériels dans son espace des phases associé peuvent être assimilés à une succession de transformations canoniques infinitésimales engendrées par le hamiltonien du système.

Si on appelle $(\boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{p}_t)$ le jeu de variables canoniques du système à l'instant t, alors, à l'instant immédiatement voisin $t + \tau$, ce jeu de variables sera transformé en un nouveau jeu $(\boldsymbol{Q}_{t+\tau}, \boldsymbol{P}_{t+\tau})$ très voisin, de sorte que l'on peut effectuer un développement de Taylor limité à l'ordre 1 en τ et écrire :

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}_{t+\tau} = \boldsymbol{q}_t + \tau\, \dot{\boldsymbol{q}}_t \doteq \boldsymbol{q}_t + \tau\, \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_t} \\ \boldsymbol{P}_{t+\tau} = \boldsymbol{p}_t + \tau\, \dot{\boldsymbol{p}}_t \doteq \boldsymbol{p}_t - \tau\, \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}_t} \end{cases}$$

où $H = H(\boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{p}_t, t)$ est le hamiltonien du système pris à l'instant t. A l'instant $t + \tau$ ce hamiltonien deviendra un

hamiltonien $H' = H'(\boldsymbol{Q}_{t+\tau}, \boldsymbol{P}_{t+\tau}, t+\tau)$ qui peut s'écrire, en effectuant à nouveau un développement de Taylor à l'ordre 1 en τ :

$$H' = H(\boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{p}_t, t) + \dot{\boldsymbol{q}}_t \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}_t} + \dot{\boldsymbol{p}}_t \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_t} + \tau \frac{\partial H}{\partial t} \doteq H + \tau \frac{\partial H}{\partial t}$$

où on a utilisé les équations canoniques du mouvement pour écrire la dernière égalité.

Ainsi, pendant la durée infinitésimale τ, le jeu de variables $(\boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{p}_t)$ et le hamiltonien H sont transformés en un nouveau jeu de variables $(\boldsymbol{Q}_{t+\tau}, \boldsymbol{P}_{t+\tau})$ et un nouvel hamiltonien H' via un système d'équations analogues à celles d'une transformation canonique infinitésimale caractérisée par H lui-même $(H(\boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{P}_{t+\tau}, t))$.

□

Chapitre 10

THÉORIE DE HAMILTON-JACOBI

La recherche d'une transformation canonique susceptible de transformer les variables d'origine $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ en des nouvelles variables $(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$ qui soient toutes des constantes vis-à-vis du mouvement (*id est* : des intégrales premières) mène à l'équation de Hamilton-Jacobi. La fonction génératrice de ce changement de variable ultime s'avère être l'intégrale d'action. Cette identification mène directement au principe de Jacobi pour les systèmes conservatifs. Ce principe, qui découle du principe plus général de Hamilton, et l'existence de surfaces équiaction perpendiculaires à la trajectoire du point matériel en mouvement sous-tendent la connexion entre l'optique géométrique et la mécanique des systèmes conservatifs qui prend le nom d'analogie optico-mécanique. C'est à partir de cette analogie que De Broglie et Schrödinger ont posé les bases de la mécanique ondulatoire.

1. Equation de Hamilton-Jacobi. Le problème est ici de trouver la fonction génératrice d'une transformation canonique $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$ telle que le nouvel hamiltonien $H'(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t)$ soit tout simplement nul : $H'(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t) = 0$. En choisissant cette fonction génératrice de type F_1 et en l'appelant $S = S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)$, on sait que les équations de la transformation sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{p} & (1) \\ \dfrac{\partial S}{\partial \boldsymbol{Q}} = -\boldsymbol{P} & (2) \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} = H' - H = -H & (3) \end{cases}$$

On sait aussi que les nouvelles variables $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{P}$ sont en fait des constantes pour le mouvement qui dépendent des conditions initiales. On les écrira : $\boldsymbol{Q} \doteq \boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{P} \doteq \boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{\beta}$.

L'idée de la théorie de Hamilton-Jacobi est alors de regarder l'équation (3) comme une équation différentielle aux dérivées partielles pour S. En effet, si on réécrit cette équation avec les arguments dont dépendent les fonctions impliquées après avoir utilisé la série d'équations (1), elle prend la forme :

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial t} + H\left(\boldsymbol{q}, \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}, t\right) \doteq 0$$

Comme l'expression de H est connue, il s'agit bien là d'une équation différentielle (non linéaire) pour S. C'est l'équation de Hamilton-Jacobi.

Principe de résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi - L'équation pour S se résout pour les variables $\boldsymbol{q}$ et t. Au cours de cette résolution, des constantes d'intégration vont survenir : on est bien sûr en droit d'identifier ces constantes avec les constantes $\boldsymbol{\alpha} \doteq \boldsymbol{Q}$. On dira alors qu'une *solution complète* à l'équation de Hamilton-Jacobi est obtenue si cette solution fait intervenir n telles constantes arbitraires. N'est

pas comptée dans ces constantes, une éventuelle constante additive S_0 à la solution obtenue ; une telle constante en effet ne joue aucun rôle dans la théorie : on peut s'en rendre compte en tentant d'appliquer la procédure qui suit à cette constante S_0.
Une fois la solution complète déterminée, il restera à exploiter la série d'équations (1) qui permettent d'obtenir les constantes $\boldsymbol{\beta} \doteq \boldsymbol{P} = -\partial S/\partial \boldsymbol{\alpha}$. En fait, ce dernier système d'équations fournira les solutions $\boldsymbol{q} \doteq \boldsymbol{q}(t; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ (sous forme inversée, du type $t \doteq t(q_i), \ldots$) puisqu'en réalité, on aura compris que les constantes $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ ne sont rien d'autre que des intégrales premières du mouvement et/ou des valeurs initiales.

Exemple en dimension 1 – Pour un nombre de degrés de liberté $n = 1$, le hamiltonien du système prend souvent la forme :

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2\mu} + V(q)$$

où (q,p) est le jeu des deux coordonnées canoniques et μ un paramètre constant. L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit alors :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + V(q) \doteq 0$$

Avec $S \doteq S(q, \alpha_1, t)$. La variable t est facilement séparable en posant : $S = F(t) + W(q)$. En identifiant la constante α_1 à la constante de séparation qui survient, on finit par obtenir ainsi une solution complète pour S sous forme intégrale :

$$S \doteq -\alpha_1 t + \int \sqrt{2\mu[\alpha_1 - V(q)]}\, dq$$

Il n'est nul besoin de primitiver cette expression de S car sous cette forme elle suffit à déterminer la constante β_1 :

$$-\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} \doteq -t + \mu \int \frac{dq}{\sqrt{2\mu[\alpha_1 - V(q)]}}$$

Et il ne reste plus qu'à calculer la primitive de l'expression ci-dessus pour obtenir $t \doteq t(q; \alpha_1, \beta_1)$, puis inverser le résultat pour obtenir $q \doteq q(t; \alpha_1, \beta_1)$.

On remarque facilement que α_1 s'identifie à l'énergie mécanique du système et que β_1 est un temps origine arbitraire.

2. Interprétation de la fonction génératrice $\boldsymbol{S}$. La fonction $S = S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q} \doteq \boldsymbol{\alpha}, t)$ génère pour ainsi dire l'ultime changement de variables qui fait passer du jeu de coordonnées $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ au jeu de coordonnées $(\boldsymbol{Q} \doteq \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{P} \doteq \boldsymbol{\beta})$ qui n'est constitué que des intégrales premières du mouvement et d'autres constantes initiales.

Or, on se rappelle que la différentielle de S s'écrit :

$$dS = \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{Q} + (H' - H)dt$$

Si bien que pour les courbes solutions (pour lesquelles $d\boldsymbol{Q} \doteq d\boldsymbol{\alpha} = 0$) on a :

$$dS \doteq \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} - H\, dt$$

Soit encore :

$$S \doteq \int \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} - \int H\, dt = \int (\boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - H)\, dt = \int L\, dt$$

Ainsi, *S n'est rien d'autre que l'intégrale d'action prise le long d'une courbe solution.*

Cas des systèmes conservatifs – Si le système est conservatif, alors $H = E$ est une intégrale première du mouvement. Comme S est estimée via l'intégrale d'action le long d'une courbe solution, on peut bien écrire :

$$S \doteq \int \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} - \int H\, dt = \int \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} - E\, t$$

Ce qui montre que la première constante (α_1) que l'on obtient lors de la séparation (additive) des variables spatiales et de la variable temporelle est l'énergie du système.

Cas d'une variable cyclique – Si l'une des variables $\boldsymbol{q}$, disons q_k, est cyclique, alors on sait que son moment conjugué p_k est une intégrale première. L'écriture de S devient ainsi :

$$\begin{aligned} S &\doteq \int \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} - \int H\, dt \\ &= p_k\, q_k + \int \sum_{i=1, i \neq k}^{n} p_i\, dq_i - \int H\, dt \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction S est séparable additivement pour chaque variable cyclique, et la constante de séparation (que l'on peut prendre pour α_k) est le moment conjugué qui lui est associé.

7. Surfaces équiaction des systèmes conservatifs. Pour un système conservatif, la fonction génératrice S s'écrit donc pour les courbes solutions :

$$S \doteq \int \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} - E\,t$$

On montre ici que dans l'espace $\mathbb{L}$ des configurations du système, les hypersurfaces équiaction (ou iso-action), qui sont les hypersurfaces sur lesquelles $S = Cte = S_0$, jouent le rôle d'hypersurfaces équiphases pour le mouvement. On se contente de réaliser la démonstration dans le cas d'une seule particule pour lequel l'espace de configuration s'identifie à l'espace physique si on utilise un jeu de coordonnées cartésiennes.

Le cas de la particule libre – Le hamiltonien de la particule libre repérée par le point $M^{\mathbb{L}}(x, y, z)$ s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

L'énergie du système est conservée, $H = E$, et par ailleurs x, y, z sont cycliques ; on a donc : $p_x = Cte = p_{0x}$, $p_y = p_{0y}$ et $p_z = p_{0z}$. Le calcul de S s'ensuit immédiatement :

$$S \doteq -E\,t + x\,p_{0x} + y\,p_{0y} + z\,p_{0z} = -E\,t + \vec{p}_0 \cdot \vec{r}$$

En voyant S comme une fonction des variables $\vec{r}$ et t, les surfaces équiaction $S = S_0$ sont alors données par la relation :

$$S = S_0 \doteq -E\,t + \vec{p}_0 \cdot \vec{r} \iff \vec{p}_0 \cdot \vec{r} \doteq S_0 + E\,t$$

On reconnaît-là l'équation d'un plan perpendiculaire[5] à $\vec{p}_0$ dont l'interprétation est la suivante : à un instant t fixé (on prend une photographie du système), il existe donc une surface équiaction, ici un plan, qui passe par le point $M^{\mathbb{L}}$ et qui est perpendiculaire à la trajectoire de ce point puisque $\vec{p}_0$ indique la direction et le sens de cette trajectoire.

En fait, on voit même qu'il existe une infinité de tels plans remplissant tout l'espace associés à des valeurs différentes de S_0. De sorte qu'au fur et à mesure que le temps s'écoule il existera toujours un tel plan passant par $M^{\mathbb{L}}$ et qui sera perpendiculaire à la trajectoire. Et en effet, on aurait pu tout de suite arriver à cette conclusion puisque la fonction génératrice S possède la propriété fondamentale que $\partial S/\partial \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$, c'est-à-dire ici : $\partial S/\partial \vec{r} = \vec{p} \doteq \vec{p}_0$ qui montre qu'à chaque instant, les surfaces iso-S étant perpendiculaires à $\vec{\nabla} S$, ces surfaces sont bien perpendiculaires à $\vec{p}_0$.

Cependant, on peut aller un peu plus loin et déclarer que la trajectoire est constamment perpendiculaire à la surface équiaction dont la valeur de S est toujours la même : S_0. En effet, si, à un instant t fixé, on considère la surface équiaction de valeur $S = S_0 + dS$, son équation correspondante s'écrit : $\vec{p}_0 . \vec{r} \doteq S_0 + dS + E\, t$. La valeur de ce dS étant arbitraire, on peut lui donner la valeur $dS = -E\, dt$ où dt serait la durée infinitésimale qui a précédé l'instant t. L'équation du plan équiaction devient ainsi : $\vec{p}_0 \cdot \vec{r} \doteq S_0 + E\,(t - dt)$; or cette

[5] En effet, en géométrie euclidienne, l'équation $\vec{K} \cdot \overrightarrow{OM} = C$ pour tout point M est celle d'un plan perpendiculaire au vecteur $\vec{K}$.

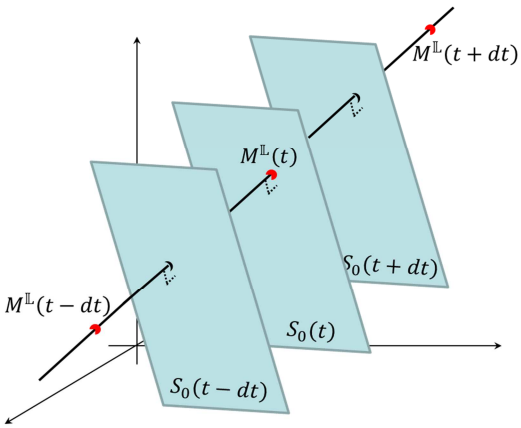
équation n'est rien d'autre que celle de notre surface équiaction $S = S_0$ mais prise cette fois à un instant antérieur $t - dt$. Tant et si bien, qu'au lieu de raisonner sur une infinité de surfaces équiaction associées à différentes valeurs de S lorsque le temps s'écoule, on peut raisonner sur une seule telle surface de valeur fixe $S = S_0$ qui se déplace au cours du temps, cette surface ayant ceci de particulier qu'elle reste constamment perpendiculaire à la trajectoire du point $M^{\mathbb{L}}$.

La vitesse de propagation de cette surface s'estime facilement puisque l'on a :

$$S = S_0 \quad \Longrightarrow dS = 0 = -\,E\,dt \;+\; \vec{p}_0 \cdot d\vec{r}$$

Le produit scalaire $\vec{p}_0 \cdot d\vec{r}$ peut s'écrire comme $p_0\,dr_\perp$ où $dr_\perp$ est un déplacement élémentaire perpendiculaire à la surface iso-S (puisque $\vec{p}_0$ est perpendiculaire à cette surface). Ainsi, la vitesse de propagation du plan équiaction a la valeur :

$$v_\phi := \frac{dr_\perp}{dt} = \frac{E}{p_0}$$
$$= \sqrt{E/2m}$$



Le point matériel libre sur sa trajectoire et l'évolution de la surface équiaction $S = S_0$ au cours du temps.

Il faut bien voir que cette vitesse ne correspond pas à la vitesse ($\dot{\boldsymbol{q}}$) du point $M^{\mathbb{L}}$. En effet, cette vitesse est :

$$v_g := v = \frac{p_0}{m} = \sqrt{2E/m}$$

C'est-à-dire le double de la vitesse de propagation de la surface équiaction.

Généralisation – Le hamiltonien d'une particule plongée dans un potentiel $V = V(x, y, z)$ s'écrit :

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

L'énergie du système est encore conservée, $H = E$, mais on n'a pas forcément de variable cyclique. La fonction génératrice S s'écrit donc :

$$S \doteq -E\,t + \int \overrightarrow{p_s} \cdot d\vec{r}$$

(où l'on a écrit $\vec{p} \doteq \overrightarrow{p_s}$ pour les courbes solution). Mais cette écriture plus générale n'empêche pas de faire le même constat que précédemment : en effet, puisque d'une part la fonction S est telle que : $\partial S/\partial \vec{r} = \vec{p} \doteq \overrightarrow{p_s}$, il en résulte encore que les surfaces équiaction sont à chaque instant perpendiculaires à $\overrightarrow{p_s} = m\,\vec{v}$, c'est-à-dire à la trajectoire du point $M^{\mathbb{L}}$. D'autre part, l'écriture de S en fonction du temps est aussi la même que précédemment, de sorte que tous les raisonnements à propos d'une surface équiaction $S = S_0$ se propageant au cours du temps peuvent être répétés à l'identique. On conclut donc encore ici qu'il existe une surface équiaction $S = S_0$ qui se déplace au cours du temps et qui a la propriété d'être constamment perpendiculaire à la trajectoire de $M^{\mathbb{L}}$.
La vitesse de propagation de cette surface s'estime comme précédemment :

$$S = S_0 \implies dS = 0 = -\,E\,dt\, +\, p_s\, dr_\perp$$

D'où cette fois :

$$v_\phi := \frac{dr_\perp}{dt} = \frac{E}{p_s} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V(\vec{r}))}}$$

A nouveau, cette vitesse ne correspond pas à la vitesse du point $M^{\mathbb{L}}$:

$$v_g := v = \frac{p_s}{m} = \sqrt{2(E - V(\vec{r}))/m}$$

On voit que le produit $v_\phi v_g$ est indépendant de la nature du potentiel :

$$v_\phi v_g = E/m$$

8. Analogie optico-mécanique. L'existence de surfaces équiaction qui se déplacent au cours du temps et qui sont constamment perpendiculaires à la trajectoire d'un point matériel fait fortement penser aux surfaces équiphase de l'optique géométrique qui se déplacent également perpendiculairement à la trajectoire des rayons lumineux. Il est en fait possible de fonder cette analogie encore plus franchement en énonçant un principe dynamique tout à fait similaire au principe de Fermat qui sous-tend toute l'optique géométrique.

Historique succinct : principe de Maupertuis ou principe de la moindre action - Bien avant le développement de la mécanique de Lagrange et d'Hamilton, Maupertuis énonça en 1744,

devant l'académie des Sciences de Paris, le principe mécanique suivant : *"Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'action nécessaire pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible."*

La quantité que Maupertuis dénommait action devait dépendre selon lui de la masse, de la vitesse et de la distance caractéristiques du problème traité. Cette "définition" était assez vague et très intuitive. Maupertuis pensait comme Fermat que *« la Nature, dans la production de ses effets, agit toujours par les moyens les plus simples »*. Grâce à la correspondance que Maupertuis entretenait avec Euler, ce dernier fût à même de préciser l'énoncé du principe de la moindre action en cette même année 1744 : *"Pour aller d'un point A à un point B, un corps de masse m prendra le chemin pour lequel l'intégrale curviligne* $\int_A^B mv\,ds$ *prend une valeur minimale."*. Euler justifiera ce principe dans le cas des courbes planes et avec la condition que la vitesse n'est fonction que des coordonnées d'espace du point courant. Cette condition consiste à admettre que le système est conservatif et que l'énergie potentielle n'est fonction que des coordonnées d'espace.

L'énoncé d'Euler peut se déduire du principe de Hamilton et prend le nom aujourd'hui de principe de Jacobi.

Principe de Jacobi – On reprend le cas d'une seule particule dont le hamiltonien, en coordonnées cartésiennes est :

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

Les courbes solutions à ce problème dynamique satisfont au principe de Hamilton :

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} \left(\vec{p} \cdot \vec{v} - H(\vec{r}, \vec{p})\right) dt \doteq 0$$

avec $\vec{v} = \dot{x}\, \vec{u}_x + \dot{y}\, \vec{u}_y + \dot{z}\, \vec{u}_z$, et où les variations sont arbitraires et s'effectuent sur $\vec{r}$ et $\vec{p}$.

Le système étant conservatif, on a $H = E$. On peut alors se proposer de remplacer purement et simplement H par la constante E dans le principe de Hamilton. Cela est licite à condition de bien observer que ce faisant, on doit restreindre les variations qui ne seront alors plus arbitraires : en effet, l'équation $H = E$ implique une liaison entre $\vec{r}$ et $\vec{p}$ qui s'écrit :

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

et qui impose aux variations $\delta\vec{r}$ et $\delta\vec{p}$ d'obéir à la relation :

$$0 = \frac{\vec{p}}{m} \cdot \delta\vec{p} + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot \delta\vec{r}$$

Compte tenu de cette restriction - qui revient à n'explorer que les chemins qui respectent la liaison $H = E$ -, le principe de Hamilton se transforme ainsi en :

$$\delta_E \int_{t_A}^{t_B} \vec{p} \cdot \vec{v}\, dt - E\, \delta_E(t_B - t_A) \doteq 0$$

où δ_E représente symboliquement la restriction qui vient d'être discutée. Le terme tout intégré est nul puisque les

variations sont synchrones. Par ailleurs, puisque $\vec{p} = m\vec{v}$, on en vient à écrire :

$$\delta_E \int_{t_A}^{t_B} \frac{\vec{p}^2}{m}\, dt = \delta_E \int_{t_A}^{t_B} 2\, T\, dt \doteq 0$$

où T est l'énergie cinétique de la particule. Or, T peut s'exprimer en fonction de l'élément d'arc de courbe ds parcouru par le point matériel pendant la durée dt : $2\, T = m\, (ds/dt)^2$. Si bien que le principe de Hamilton continue de se transformer en :

$$\delta_E \int_{t_A}^{t_B} m\, (ds/dt)^2\, dt = \delta_E \int_A^B p\, ds \doteq 0$$

où A et B sont les deux points par lesquels passent toutes les trajectoires virtuelles aux temps t_A et t_B respectivement.
Enfin, on peut remplacer p par son expression en fonction de $\vec{r}$ qui découle de la liaison $H = E$. Ce faisant, il ne restera plus dans cette intégrale que la variable $\vec{r}$: on pourra donc ne réaliser que des variations $\delta\vec{r}$ et les considérer comme arbitraires, étant entendu que les variations $\delta\vec{p}$ – qui ne jouent plus aucun rôle pour cette intégrale - satisfont à la relation restrictive précédente. Ainsi, on n'a plus besoin de spécifier le symbole variationnel par l'indice E, et on peut écrire maintenant :

$$\delta \int_A^B \sqrt{2m\left(E - V(\vec{r})\right)}\, ds \doteq 0$$

où les variations s'effectuent sur $\vec{r}$ et sont arbitraires. C'est le *principe de Jacobi* qui correspond très précisément à l'énoncé d'Euler. On montre plus loin que ce principe s'étend à tout système conservatif à nombre de degrés de liberté quelconque.

Analogie optico-mécanique – Le principe de Jacobi et l'existence de surfaces équiaction, comparables au principe de Fermat et aux surfaces équiphase, permet d'élaborer une analogie formelle entre l'optique géométrique et la dynamique d'une particule plongée dans un champ de forces conservatif.

Optique géométrique	$\rightleftarrows$	**Dynamique conservative**
Principe de Fermat $\delta \int_A^B n/c \; ds \doteq 0$	$\rightleftarrows$	***Principe de Jacobi*** $\delta \int_A^B \sqrt{2m\,(E-V)}\; ds \doteq 0$
Phase de l'onde plane $\phi = -\omega\, t + \vec{k}\cdot\vec{r}$	$\rightleftarrows$	*Action de la particule libre* $S = -E\, t + \vec{p}\cdot\vec{r}$
Vecteur d'onde $\vec{k} = \partial\phi/\partial\vec{r}$	$\rightleftarrows$	*Quantité de mouvement* $\vec{p} = \partial S/\partial\vec{r}$
Vitesse de la surface équiphase $v_\phi = \omega/k = c/n$	$\rightleftarrows$	*Vitesse de la surface équiaction* $v_\phi = E/p = E/\sqrt{2m(E-V)}$
Vitesse de groupe $v_g = \partial\omega/\partial k$	$\rightleftarrows$	*Vitesse de la particule* $v_g = \partial E/\partial p = \sqrt{2(E-V)/m}$
$v_\phi v_g = c^2$	$\rightleftarrows$	$v_\phi v_g = E/m$

9. La mécanique ondulatoire. En se fondant sur l'analogie optico-mécanique, De Broglie proposa en 1923-24 d'associer une longueur d'onde à une particule ainsi qu'une pulsation propre par le biais des formules $\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$ et $E = \hbar\,\omega$ où $\hbar$ est la constante de Planck divisée par 2π.
Schrödinger a pu construire en 1926 une équation fondatrice de la théorie quantique en se basant sur les mêmes idées, que l'on peut résumer de la façon suivante : si la mécanique classique échoue pour décrire le comportement des atomes, n'est-ce pas parce que nous sommes dans une situation tout à fait similaire à celle de l'optique géométrique qui n'est qu'une approximation de l'optique ondulatoire valable uniquement lorsque la longueur d'onde de la radiation lumineuse est faible devant les dimensions de la trajectoire considérée (c'est l'approximation de l'eïkonale formulée par Clausius). Or les dimensions des trajectoires électroniques au sein de l'atome sont de l'ordre de l'angström : ces dimensions ne seraient-elles pas si petites que nous serions arrivés aux limites de la description qu'offre la mécanique classique ? Ne faut-il pas passer à une *mécanique ondulatoire* au même titre que lorsque l'on passe de l'optique géométrique à l'optique ondulatoire de Maxwell pour expliquer les phénomènes d'interférence et de diffraction des ondes lumineuses ? Ainsi, selon Schrödinger : « *la manière correcte de concevoir ou de représenter les phénomènes mécaniques consiste à les rattacher à une propagation d'ondes dans l'espace des* ***q*** *et non à un mouvement de points représentatifs dans le même espace. L'étude du mouvement des points représentatifs qui*

forme l'objet de la mécanique classique, n'est qu'un procédé d'approximation et son emploi est aussi peu justifié que l'emploi de l'optique géométrique dans le cas des phénomènes lumineux réels, [...], *il faut abandonner les équations fondamentales de la mécanique classique, et avoir recours à l'équation des ondes elle-même.* ».
Habituellement, l'équation des ondes prend la forme :

$$\Delta\Psi - \frac{1}{v_\phi^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \doteq 0$$

où $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$ est le concept physique représentant le phénomène ondulatoire en question et $v_\phi = v_\phi(\vec{r}, t)$ sa vitesse de phase. Dans une mécanique à vocation ondulatoire, la vitesse de phase doit être celle de l'analogie optico-mécanique et la grandeur ondulatoire sera appelée *fonction d'onde*.
Pour résoudre cette équation des ondes, on peut, comme pour les ondes lumineuses, réaliser une séparation des variables en posant : $\Psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})\, e^{-i\,Et/\hbar}$, c'est-à-dire en regardant d'abord l'équation pour une onde de fréquence (*id est* : d'énergie grâce à la relation de De Broglie) bien déterminée. Après avoir injecté cette forme pour Ψ et remplacé v_ϕ par sa valeur dans l'équation des ondes, un calcul simple conduit alors une équation pour φ qui se met sous la forme :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi + V\,\varphi \doteq E\,\varphi$$

C'est l'équation d'onde pour un état de la particule stationnaire en énergie. Les solutions $\varphi(\vec{r})$ à cette équation

sont paramétrées par E ($\varphi = \varphi_E$). Mais, de façon générale, la fonction d'onde Ψ est une superposition de tels états et pour obtenir une équation appropriée qui régit l'évolution temporelle de Ψ il faut éliminer le paramètre E qui apparaît dans les deux équations précédentes. Pour ce faire, on peut remarquer qu'en écrivant $\Psi = \varphi\, e^{-i\,Et/\hbar}$, on a forcément : $i\hbar\, \partial\Psi/\partial t = E\,\Psi$. De sorte qu'en multipliant l'équation pour ces états stationnaire par le facteur $e^{-i\,Et/\hbar}$, puis en remplaçant $E\,\Psi$ par $i\hbar\, \partial\Psi/\partial t$, on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\,\Psi \doteq i\,\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

C'est l'équation de Schrödinger.

L'interprétation physique de la fonction d'onde a posé de nombreux problèmes épistémologiques et en pose encore. Born a proposé en 1927 d'associer le module de Ψ élevé au carré à une densité de probabilité de sorte que la quantité $|\Psi(\vec{r},t)|^2\, d^3r$ représente la probabilité de trouver la particule à la position $\vec{r}$ à l'instant t dans un petit volume d^3r autour de cette position. Ψ est appelée *amplitude de probabilité* et c'est elle que l'on obtient, avec ses fréquences propres (i.e. les énergies possibles) associées, en résolvant l'équation de Schrödinger.

10. Phase de la fonction d'onde et courant de probabilité.

Ψ est une fonction à valeurs complexes que l'on peut donc mettre sous la forme :

$$\Psi = |\Psi|\, e^{-i\,S/\hbar}$$

où $|\Psi| = |\Psi(\vec{r},t)|$ est le module du nombre complexe et $S = S(\vec{r},t)$ sa phase. En injectant cette écriture de Ψ dans l'équation de Schrödinger et en identifiant parties réelles et imaginaires, on est conduit au système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \hbar\left\{div\left[|\Psi|^2\frac{\vec{\nabla}S}{m}\right]+\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t}\right\} \doteq 0 \\ \frac{\left(\vec{\nabla}S\right)^2}{2m}+V+\frac{\partial S}{\partial t} \doteq \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta|\Psi|}{|\Psi|} \end{cases}$$

La première équation est une équation de conservation du type $div\vec{j}+\partial\rho/\partial t \doteq 0$ où $\vec{j}=\vec{j}(\vec{r},t)$ est une densité de courant de charges au point $\vec{r}$ à l'instant t et $\rho=\rho(\vec{r},t)$ la densité de charges au même point et au même instant. Cette première équation exprime donc que la variation dans le temps de la probabilité de présence de la particule dans un certain volume Ω autour du point $\vec{r}$ est compensée par le flux de la densité $\vec{j}(\vec{r},t)$ du courant de probabilité associé au travers de la surface Σ entourant ce volume :
On a :

$$\vec{j} := |\Psi|^2\frac{\vec{\nabla}S}{m}$$

Et :

$$\oint_\Sigma \vec{j}.d^2\vec{s} = \int_\Omega div\,\vec{j}\ d^3r\ = -\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Psi|^2\ d^3r$$

On voit que $\vec{j}$ a bien la forme $\rho\,\vec{v}$ puisque $\vec{\nabla}S = \partial S/\partial\vec{r}$ est la quantité de mouvement $\vec{p}$ de la particule si on identifie la phase S à l'intégrale d'action de la théorie de Hamilton-Jacobi. Cette identification est confirmée par la seconde équation où on reconnaît l'équation de Hamilton-Jacobi pour la détermination de S lorsque l'on fait $\hbar \cong 0$. On notera en outre que si on prend $\hbar \cong 0$, la première équation disparaît. Dans ces conditions, il ne reste plus que l'équation de Hamilton-Jacobi à notre disposition et l'analogie optico-mécanique subsiste sans qu'aucune notion de nature ondulatoire soit introduite.

Chapitre 11

CROCHETS DE POISSON

Les crochets de Poisson définissent une algèbre de Lie sur l'espace des phases du problème à N corps considéré. Ils sont invariants par une transformation canonique et interviennent dans toutes les questions concernant la recherche d'intégrales premières. Ils jettent également un pont entre mécanique classique et mécanique quantique via leur assimilation aux commutateurs entre deux opérateurs associés à deux grandeurs physiques.

1. Crochet de Poisson : définition. Soit une grandeur dynamique $X(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ définie sur l'espace des phases. On a alors :

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial X}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial X}{\partial t}$$

Si on utilise les équations de Hamilton pour remplacer les $\dot{q}_i$ et les $\dot{p}_i$ dans cette expression, on obtient :

$$\dot{X} \doteq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial X}{\partial t}$$

où H est le hamiltonien du système. La somme qui figure dans ce résultat préliminaire possède des propriétés algébriques et

dynamiques d'une importance telle que l'on est amené à la définition suivante.

> ***Définition*** : Soient deux grandeurs dynamiques $X(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ et $Y(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ définies sur l'espace des phases. On appelle *crochet de Poisson* entre les deux grandeurs X et Y la quantité notée $[X,Y]$ et définie par :
>
> $$[X,Y] := \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i}\frac{\partial Y}{\partial q_i}\right)$$
> $$= \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{p}}\cdot\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}}$$

Il semble qu'avec cette définition les crochets de Poisson soient des quantités dont la valeur dépend des variables $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ utilisées. En fait, il n'en est rien car on montre ci-dessous que les crochets de Poisson sont invariants vis-à-vis une transformation canonique. C'est ce qui justifie la notation employée, $[X,Y]$, qui est transparente vis-à-vis de ces variables.

2. Crochets de Poisson et transformations canoniques. Soit $[X,Y]_{q,p}$ le crochet de Poisson calculé lorsque les deux grandeurs dynamiques X et Y sont exprimées dans le jeu de variables $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$, et soit $[X,Y]_{Q,P}$ le crochet de Poisson calculé lorsque ces deux grandeurs sont exprimées dans le jeu de variables $(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$ issu d'une transformation canonique. On montre ici que $[X,Y]_{q,p} = [X,Y]_{Q,P}$.

On part par exemple de :

$$[X,Y]_{Q,P} = \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{Q}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{P}} - \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{P}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{Q}}$$

Mais, en considérant maintenant X et Y comme des fonctions du jeu de variables $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$: $X = X(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ et $Y = Y(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$, la règle de dérivation en chaîne (3.**2**) permet d'écrire :

$$\frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{Q}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{q}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{p}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{P}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)^T \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{q}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)^T \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{p}}$$

De même :

$$\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{Q}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{P}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)^T \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)^T \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}}$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$[X,Y]_{Q,P} = \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{q}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{p}}\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)^T \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)^T \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}}\right]$$

$$- \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)^T \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{q}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)^T \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{p}}\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}}\right]$$

En développant cette expression, 8 termes du type $(\mathcal{M}\boldsymbol{u}) \cdot (\mathcal{N}\boldsymbol{v})$, où $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont des matrices, vont survenir. Chacun de ces termes va pouvoir être modifié grâce à la propriété

suivante : $(\mathcal{M}\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{w} = (\mathcal{M}^T\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{u}$. Comme ici $\boldsymbol{w} = \mathcal{N}\boldsymbol{v}$, on aura ainsi : $(\mathcal{M}\boldsymbol{u}) \cdot (\mathcal{N}\boldsymbol{v}) = (\mathcal{M}^T\mathcal{N})\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$. L'expression de $[X, Y]_{Q,P}$ devient alors, en regroupant les termes en fonction des produits scalaires qui vont survenir :

$$
\begin{aligned}
[X, Y]_{Q,P} = & \left[\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)^T - \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T\right]\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{q}} \\
& + \left[\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)^T - \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T\right]\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{p}} \\
& + \left[\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)^T - \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T\right]\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{q}} \\
& + \left[\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)^T - \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^T\right]\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{p}}
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, on dispose aussi des relations matricielles (9.**2**) caractéristiques de la transformation canonique :

$$
\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T ; \ \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T ; \ \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T ; \ \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T
$$

On peut donc utiliser ces relations pour remplacer chaque matrice transposée dans l'expression précédente de $[X, Y]_{Q,P}$ pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
[X, Y]_{Q,P} = & -\left[\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} + \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right]\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{q}} + \left[\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right]\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{p}} \\
& + \left[\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right]\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{q}} - \left[\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right]\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{p}}
\end{aligned}
$$

Or, on se convainc facilement que les matrices entre crochets dans cette dernière égalité ne sont que les expressions matricielles de l'ensemble des dérivées partielles des variables $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ entre elles au travers de la règle de dérivation en chaîne via les variables $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$, par exemple :

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{p}} = \mathcal{I}_n$$

où $\mathcal{I}_n$ est la matrice identité $(n \times n)$. D'où, en appelant $\mathcal{O}_n$ la matrice nulle $(n \times n)$:

$$[X,Y]_{Q,P} = -\,\mathcal{O}_n \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{q}} + \mathcal{O}_n \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{p}} + \mathcal{I}_n \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{q}} - \mathcal{I}_n \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{p}}$$

Soit finalement :

$$[X,Y]_{Q,P} = \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}} = [X,Y]_{q,p}$$

□

3. Propriétés algébriques des crochets de Poisson. On démontre facilement les propriétés suivantes :

• $[X,Y] = -\,[Y,X]$ qui exprime l'anti-commutativité (ou l'antisymétrie) des crochets de Poisson. En particulier : $[X,X] = 0$.

• $[\alpha X, \beta Y] = \alpha\beta\ [X,Y]$

• $[X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$: distributivité gauche par rapport à l'addition (ou encore linéarité droite).

• $[X+Y,Z]=[X,Z]+[Y,Z]$: distributivité droite par rapport à l'addition (ou encore linéarité gauche).

Ces trois dernières propriétés font des crochets de Poisson une application bilinéaire de l'espace des phases sur lui-même.

On démontre également l'identité de Leibniz (droite et gauche) :

• $[X,YZ]=Y[X,Z]+[X,Y]Z$

• $[XY,Z]=X[Y,Z]+[X,Z]Y$

Ainsi que l'identité fondamentale de Jacobi :

• $\big[X,[Y,Z]\big]+\big[Y,[Z,X]\big]+\big[Z,[X,Y]\big]=0$

On dit alors que les crochets de Poisson définissent une *algèbre de Lie* sur l'espace des phases.

3. Dynamique et crochets de Poisson. ***Equations du mouvement*** – Si on réalise le crochet de Poisson d'un q_k ou d'un p_k avec le hamiltonien H du système, on obtient :

$$[q_k,H]=\frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad ; \qquad [p_k,H]=-\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

En injectant les équations de Hamilton dans ces résultats, on déduit les équations du mouvement dans le langage des crochets de Poisson :

$$\begin{cases}[q_k,H]\doteq\dot{q}_k\\ [p_k,H]\doteq\dot{p}_k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[\boldsymbol{q},H]\doteq\dot{\boldsymbol{q}}\\ [\boldsymbol{p},H]\doteq\dot{\boldsymbol{p}}\end{cases}$$

Quelques compléments à propos de la notation vectorielle pour les crochets de Poisson figurent dans la note ci-dessous [6].

Intégrales premières – Plus généralement, il est évident - d'après le **1** - que la dérivée par rapport au temps d'une grandeur dynamique $X(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ s'exprime sur les courbes solutions au moyen du crochet de Poisson entre X et H :

$$\dot{X} \doteq [X,H] + \frac{\partial X}{\partial t}$$

Faisant $X = H$ dans cette équation, on obtient immédiatement : $dH/dt \doteq \partial H/\partial t$. On retrouve donc aisément le théorème énergétique et le cas des systèmes conservatifs pour lequel $H = Cte = E$.

Pour une fonction dynamique $X(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ quelconque on déduit aussi le théorème suivant :

---

[6] Une définition naturelle du crochet de Poisson entre une variable scalaire $Y = Y(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ et une variable vectorielle $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \rightleftharpoons \left(X_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)\ X_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)\ \dots\ X_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)\right)^T$ est la suivante :

$$\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{X},Y] := \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}}$$

C'est un vecteur $\boldsymbol{Z}$ dont les composantes sont les crochets de Poisson des X_i avec Y : $[\boldsymbol{X},Y] \rightleftharpoons ([X_1,Y]\ [X_2,Y]\ \dots\ [X_n,Y])^T$. On fera attention à l'ordre des termes dans cette définition en raison de la présence des matrices $(\partial\boldsymbol{X}/\partial\boldsymbol{q})$ et $(\partial\boldsymbol{X}/\partial\boldsymbol{p})$: par exemple, $[Y,\boldsymbol{X}]$ doit être écrit comme :

$$[Y,\boldsymbol{X}] := \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{p}} = -\,[\boldsymbol{X},Y]$$

Ce faisant, on est naturellement incité à proposer aussi la définition suivante du crochet de Poisson entre deux grandeurs vectorielles $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ et $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$:

$$\mathcal{Z} := [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] := \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T = -\,[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}]^T$$

dont le résultat est une matrice $\mathcal{Z}$ au sein de laquelle chaque élément z_{ij} est le crochet de Poisson entre la composante X_i de $\boldsymbol{X}$ et la composante Y_j de $\boldsymbol{Y}$:

$$z_{ij} = \left[X_i,Y_j\right]_{ij}$$

Premier théorème de Poisson : La grandeur dynamique $X(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ est une intégrale première du mouvement si, et seulement si :

$$[X,H]+\frac{\partial X}{\partial t}=0$$

Démonstration : si $X=X(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ est telle que : $[X,H]+\partial X/\partial t=0$, alors, d'après ce qui précède, il est évident que $\dot{X}\doteq 0$: X est donc une intégrale première. Réciproquement, si X est une intégrale première, alors $\dot{X}\doteq 0\doteq[X,H]+\partial X/\partial t$. Mais cette égalité qui a lieu pour une courbe solution est en fait vraie partout puisque une courbe solution au moins passe par chaque point de l'espace des phases. □

Dans le cadre de la recherche systématique d'intégrales premières pour le mouvement, il faut voir ce premier théorème comme la donnée d'une équation aux dérivées partielles pour X dont la solution générale doit fournir toutes les intégrales premières du problème.

Poisson a également démontré un second théorème qui doit permettre, connaissant deux intégrales premières, d'en obtenir une troisième aisément :

Second théorème de Poisson : Soient $X(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ et $Y(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ deux intégrales premières du mouvement. Alors $Z(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=[X,Y]$ est aussi une intégrale première.

Démonstration : soit $Z=[X,Y]$; on écrit l'identité de Jacobi pour X,Y et H :

$$\big[X,[Y,H]\big]+\big[Y,[H,X]\big]+\big[H,[X,Y]\big]=0$$

Comme X et Y sont deux intégrales premières, l'identité devient :

$$[X,-\partial Y/\partial t]+[Y,\partial X/\partial t]+[H,Z]=0$$

En développant les deux premiers crochets de Poisson de cette dernière égalité, et en utilisant le théorème de Schwarz, on obtient facilement :

$$-\partial/\partial t\,([X,Y])+[H,Z]=0$$

Soit :

$$\frac{\partial Z}{\partial t}+[Z,H]=0$$

□

Ce théorème est toutefois un peu décevant en ce sens qu'il fournit souvent des intégrales premières évidentes (0 par exemple) ou des fonctions de X et/ou de Y…

4. Crochets fondamentaux. Moment cinétique. ***Crochets de Poisson fondamentaux*** – On appelle *crochets fondamentaux* les différentes combinaisons de crochets de Poisson que l'on peut obtenir entre les variables q_i et p_i. On vérifie aisément que l'on a :

$$\begin{cases}[q_i,p_j]=\delta_{ij}\\ [q_i,q_j]=0\\ [p_i,p_j]=0\end{cases}\xLeftrightarrow{cf\ note\ p.189}\begin{cases}[\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}]=\mathcal{I}_n\\ [\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}]=\mathcal{O}_n\\ [\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}]=\mathcal{O}_n\end{cases}$$

De ces propriétés, il découle que deux grandeurs physiques X et Y dont le crochet de Poisson est nul peuvent fort bien être utilisées comme deux coordonnées généralisées ou deux moments conjugués, mais on ne pourra pas construire un jeu de variables $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ au sein duquel X serait par exemple une coordonnées généralisée et Y son moment conjugué.
A l'inverse, deux grandeurs physiques X et Y dont le crochet de Poisson est non nul ne peuvent pas être utilisées comme deux coordonnées généralisées ou comme deux moments conjugués au sein d'un jeu de variables $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$.

Moment cinétique – On sait que la quantité physique « moment cinétique » joue un rôle important dans l'étude du mouvement. Dans le cas d'une particule, en coordonnées cartésiennes, on peut écrire ce moment cinétique comme $\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \vec{p}$, avec des notations évidentes. On montre alors sans difficulté que :

$$[\ell_x, \ell_y] = \ell_z \quad (\circlearrowleft)$$

où le symbole $\circlearrowleft$ signifie que l'on dispose de deux relations similaires en effectuant une permutation circulaire sur les 3 indices x, y et z.
Si ℓ est la norme du vecteur moment cinétique, on montre aussi que :

$$[\ell^2, \ell_x] = 0 \quad (\circlearrowleft)$$

5. Invariance du hamiltonien par une TCI et intégrales premières. D'après le 9.5 on a montré que les hamiltoniens

liés entre eux par une transformation canonique infinitésimale (TCI) de type F_2 obéissent à la relation :

$$H' - H = \varepsilon \, \frac{\partial G}{\partial t}$$

où G caractérise la TCI de sorte que : $F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t) = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{P} + \varepsilon \, G(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)$. De façon plus précise on a donc :

$$H'(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t) = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) + \varepsilon \, \frac{\partial G(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)}{\partial t}$$

Comme le changement de variables est donné par : $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} + \varepsilon \, \partial G / \partial \boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P} + \varepsilon \, \partial G / \partial \boldsymbol{q}$, on peut effectuer un développement limité de H au voisinage de son écriture en fonction du nouveau jeu de variables $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$:

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) &= H(\boldsymbol{Q} - \varepsilon \, \partial G / \partial \boldsymbol{P} \, , \boldsymbol{P} + \varepsilon \, \partial G / \partial \boldsymbol{q} \, , t) \\ &= H(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t) + \varepsilon \left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{P}} - \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{P}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{Q}} \right) \end{aligned}$$

Comme ε est devant les quantités dérivées, on peut, à l'envie, écrire :

$$\varepsilon \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}} = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{Q}} \quad ; \quad \varepsilon \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{P}} = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \quad ; \; etc \ldots$$

D'où ce premier résultat qui évalue l'effet du changement de variables $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \longrightarrow (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$ sur H occasionné par la TCI :

$$H(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t) = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) - \varepsilon \, [G, H]$$

ce qui fournit ensuite :

$$H'(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t) = H(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t) + \varepsilon \left\{[G,H] + \frac{\partial G}{\partial t}\right\}$$

De ce résultat, on tire le théorème suivant :

> ***Théorème*** : Si un hamiltonien H est invariant à l'ordre 1 en ε ($H'(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t) = H(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t) + O(\varepsilon^2)$) sous l'effet d'une TCI caractérisée par une fonction dynamique G, alors G est une intégrale première pour la dynamique engendrée par H. La réciproque est vraie également.

Démonstration : si H est invariant à l'ordre 1 en ε sous l'effet de la TCI caractérisée par G, alors le résultat qui précède impose : $[G,H] + \partial G/\partial t = 0$. G est donc bien une intégrale première d'après le premier théorème de Poisson. Inversement : soit G une intégrale première, alors d'après le premier théorème de Poisson $[G,H] + \partial G/\partial t$ est nul partout, ce qui implique que H est invariant à l'ordre 1 en ε sous l'effet de la TCI caractérisée par G. □

Pour terminer ce chapitre introductif sur ces crochets de Poisson, il faut indiquer qu'ils sont en lien très étroit avec la notion de commutateur de la mécanique quantique. Si $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont les deux opérateurs quantiques associés aux deux grandeurs physiques X et Y, alors il existe une connexion entre crochets de Poisson et commutateurs qui peut s'exprimer sous la forme d'un principe de correspondance :

$$[X,Y]_{classique} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{X},\hat{Y}\right]_{quantique}$$

Chapitre 12

VARIABLES ANGLE-ACTION

Dans le cas de systèmes à mouvements périodiques on s'intéresse souvent à vouloir déterminer la ou les périodes qui gouvernent la dynamique sans chercher à connaître tous ses détails ou à résoudre les équations du mouvement. La méthodologie qui va suivre fut inventée par Charles-Eugène Delaunay (1816-1872) au cours de ses recherches sur les mouvements de la lune. Elle consiste à faire un choix particulier de coordonnées généralisées – les variables angle-action – grâce auxquelles les différentes périodes sont obtenues par des dérivations partielles du nouvel hamiltonien. Les variables angle-action sont également utilisées - car très efficaces – dans la théorie classique des perturbations et pour déterminer ce qu'on appelle les invariants adiabatiques d'un problème perturbatif en mécanique classique. Elles ont également joué un rôle déterminant dans la théorie des quanta de Bohr-Sommerfeld avant l'avènement de la mécanique quantique où elles continuent d'y jouer un rôle clef.

1. Variables action : exemple de l'oscillateur harmonique.
On connaît le hamiltonien de l'oscillateur harmonique 1D :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

où k est le coefficient de raideur du ressort équivalent. Comme le système est conservatif, on peut tracer facilement le portrait de phases du problème : l'espace des phases se voit structuré par des courbes-solutions formant un ensemble continu d'ellipses paramétrées par l'énergie E du système. Elles ont pour équation :

$$E \doteq \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

Ces ellipses sont donc centrées sur l'origine de l'espace des phases qui constitue lui-même un point elliptique. Leur demi-grand axe est parallèle à l'axe des x et prend la valeur : $a = \sqrt{2E/k}$; leur demi-petit axe, parallèle à l'axe des p, a pour valeur : $b = \sqrt{2mE}$.
Ce faisant, on peut calculer facilement l'aire, $J = \pi ab$, contenue à l'intérieur d'une telle ellipse :

$$J = \oint p\, dx = \pi ab = 2\pi E \sqrt{m/k}$$

On constate que la pulsation de cet oscillateur, $\omega = \sqrt{k/m}$, est contenue dans la quantité J. En imaginant faire de J une variable dynamique grâce à une certaine transformation canonique, on peut alors espérer obtenir ω en exprimant l'énergie du problème en fonction de J après l'avoir calculée. On voit en effet sur l'exemple que :

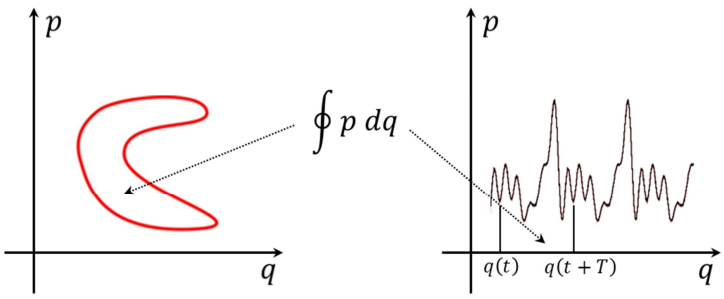
$$\omega \sim \frac{\partial E}{\partial J}$$

C'est en gros le principe de la méthode qui va suivre.

Comme J a les dimensions d'une action (réduite à sa partie spatiale), on adopte la définition générale suivante :

> ***Définition*** : On appelle variables action du problème les quantités :
>
> $$J_i := \frac{1}{2\pi} \oint p_i \, dq_i \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{J} := \frac{1}{2\pi} \oint \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q}$$
>
> où le symbole $\oint$ signifie que l'intégration s'effectue sur une période ou sur une trajectoire-solution fermée de l'espace des phases du système à l'étude.

Pour $n = 1$, il existe deux types de mouvements périodiques dans le plan (q, p) : soit un mouvement dit de *libration* où les variables conjuguées reprennent toujours la même valeur au bout de la période T, soit un mouvement dit de *rotation* où seule l'une des deux variables reprend toujours la même valeur au bout du temps T. Dans tous les cas, J est une aire.



2. Les variables angle-action et leur fonction génératrice.

Fonction génératrice – Afin de faire des $\boldsymbol{J}$ des variables dynamiques, il faut envisager une certaine fonction génératrice qui transforme le jeu initial $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$. On convient de

choisir une fonction de type F_2 qui soit telle que les nouveaux moments conjugués $\boldsymbol{P}$ soient les $\boldsymbol{J}$: $F_2 = F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}, t)$. En outre, comme le système est conservatif, on se dispense *a priori* de rechercher une fonction génératrice où le temps interviendrait explicitement : $F_2 = F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{J})$.
Les équations de la transformation sont alors (revoir **9.2**) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{p} & (1) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{P}} = \dfrac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{J}} = \boldsymbol{Q} & (2) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial t} = 0 = H' - H & (3) \end{cases}$$

La série d'équations (2) définit les nouvelles variables $\boldsymbol{Q}$ et fournit : $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{J})$. Cette dernière relation, injectée dans la série d'équations (1), donne ensuite : $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{J})$. On peut alors utiliser (3) pour obtenir le nouvel hamiltonien, $H' = H$ exprimé en fonction du nouveau jeu de variables $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{J})$.

De l'équation (3) on tire également une équation différentielle de type Hamilton-Jacobi pour F_2. En effet, comme $H' = H \doteq E$ le long des courbes solutions, on peut écrire (3) sous la forme :

$$H\left(\boldsymbol{q}, \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{q}}\right) \doteq E$$

et rechercher F_2 en tant que fonction des $\boldsymbol{q}$ seulement. Une solution complète à cette équation sera obtenue si cette

solution se voit paramétrée par n constantes d'intégration $\boldsymbol{\alpha}$ qui sont survenues lors de la résolution. Ces constantes (dont la première, α_1, est l'énergie E du système puisqu'elle est déjà présente dans l'équation) correspondent à des intégrales premières mais ne s'identifient pas forcément aux $\boldsymbol{J}$: elles en sont des combinaisons diverses et réciproquement, c'est-à-dire que : $F_2 \doteq F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha})$, avec $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J})$ ou encore $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha})$.

Par ailleurs, la différentielle de F_2 s'écrit :

$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot d\boldsymbol{q} + \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{P}} \cdot d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} + \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{J}}\, d\boldsymbol{J}$$

On a donc sur les courbes solutions : $dF_2 \doteq \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q}$, soit :

$$F_2 \doteq \int \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} = \sum_i \int p_i\, dq_i$$

Enfin, pour avoir un procédé systématique de construction des variables angle-action, on réclamera que F_2 soit additivement séparable en les $\boldsymbol{q}$:

$$F_2 \doteq \sum_i W_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_i \int p_i\, dq_i$$

Variables angle-action – On montre d'abord que les variables action définies au paragraphe précédent sont bien des constantes si le problème est supposé périodique, conservatif et séparable. On a en effet :

$$J_i := \frac{1}{2\pi} \oint p_i\, dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\, dq_i \doteq \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dW_i}{dq_i}\, dq_i$$

Comme l'intégrale est à faire soit sur une courbe solution fermée soit sur une période et que W_i ne dépend pas des $q_{j\neq i}$, il s'ensuit que le résultat du calcul ne dépendra plus que des constantes $\boldsymbol{\alpha}$. Les J_i sont donc bien des constantes pour les courbes solutions.

En ce qui concerne les variables $\boldsymbol{Q}$, on peut d'abord remarquer que de façon générale les dimensions du produit $p_i q_i$ sont toujours les mêmes : une énergie multipliée par un temps, c'est-à-dire que ce produit a toujours les dimensions d'un moment cinétique ou d'une quantité d'action. Puisque les $\boldsymbol{J}$ sont des actions, les $\boldsymbol{Q}$ qui leur sont conjuguées n'ont donc pas de dimension, à l'image d'un angle.
On examine maintenant la variation finie ΔQ_i d'un Q_i dans le plan (q_k, p_k) le long (de la projection) d'une courbe solution. Il s'agit là d'un calcul purement géométrique :

$$\Delta Q_i = \oint_{(q_k,p_k)} dQ_i = \oint_{(q_k,p_k)} d\left(\frac{\partial F_2}{\partial J_i}\right)$$

Or :

$$d\left(\frac{\partial F_2}{\partial J_i}\right) = \sum_\ell \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_\ell \partial J_i} dq_\ell + \frac{\partial^2 F_2}{\partial J_\ell \partial J_i} dJ_\ell\right)$$

avec :

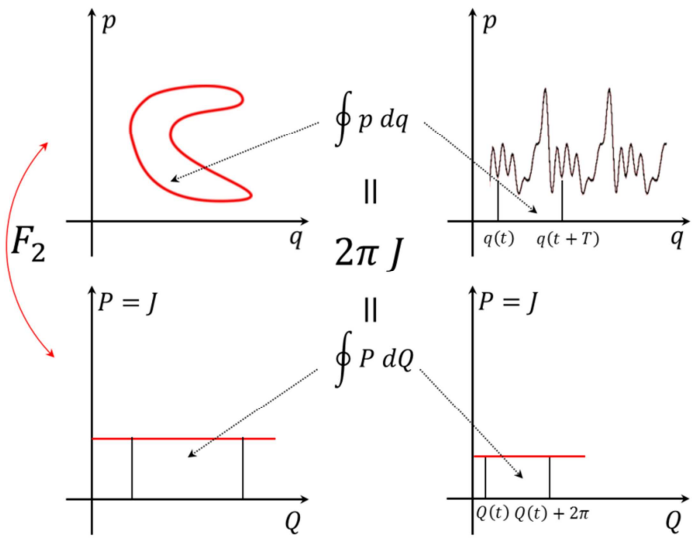
$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_\ell \partial J_i} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial J_i \partial q_\ell} = \frac{\partial}{\partial J_i}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_\ell}\right) = \frac{\partial}{\partial J_i}\left(\frac{dW_\ell}{dq_\ell}\right)$$

Et comme les J_ℓ sont constants sur les courbes solutions et que les $q_{\ell\neq k}$ ne varient pas non plus pendant cette intégration dans le plan (q_k, p_k), il reste :

$$\Delta Q_i = \oint_{(q_k,p_k)} \frac{\partial}{\partial J_i}\left(\frac{dW_k}{dq_k}\right) dq_k = \oint_{(q_k,p_k)} \frac{\partial p_k}{\partial J_i}\, dq_k$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{(q_k,p_k)} p_k\, dq_k = 2\pi\, \frac{\partial J_k}{\partial J_i} = 2\pi\, \delta_{ik}$$

Ainsi, les $Q_{i\neq k}$ n'évoluent pas sur un cycle complet effectué par la variable q_k cependant que la variable $Q_{i=k}$ se voit incrémentée d'une quantité 2π : Les $\boldsymbol{Q}$ se comportent donc bien comme des variables angulaires. On les note souvent $\boldsymbol{w}$ en raison du mot allemand « Winkel » signifiant angle. La situation est résumée par la figure ci-contre qui montre comment la structuration géométrique du plan (q, p) est transformée dans le plan (Q, P) en une structuration cartésienne. On note également que les aires sont préservées par la transformation canonique.



3. Equations du mouvement et conséquence. Les équations de Hamilton pour $H'(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{J})$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{Q}} \doteq \dfrac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{P}} = \dfrac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{J}} \\ \dot{\boldsymbol{P}} = \dot{\boldsymbol{J}} \doteq -\dfrac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{Q}} \end{cases}$$

De la seconde série d'équations, on conclut que H' ne peut pas dépendre des nouvelles coordonnées généralisées $\boldsymbol{Q}$ sans quoi les $\boldsymbol{J}$ ne seraient pas les intégrales premières voulues : $H' = H'(\boldsymbol{J})$. Dans ces conditions, la première série d'équations s'intègre alors directement (puisque les $\boldsymbol{J}$ sont constants) et fournit :

$$\boldsymbol{Q}(t) \doteq \frac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{J}}\ t\ + \boldsymbol{Q_0}$$

De ce résultat, on tire immédiatement que la variation finie ΔQ_i d'un Q_i dans le plan (q_i, p_i) au cours de la période T_i qui lui correspond s'écrit :

$$\Delta Q_i = Q_i(t + T_i) - Q_i(t) = \frac{\partial H'}{\partial J_i}\ T_i$$

Or cette variation finie a été calculée au **2** et vaut 2π. Il faut donc conclure que :

$$\frac{\partial H'}{\partial J_i} = \frac{2\pi}{T_i}$$

Ainsi, les périodes du système sont obtenues grâce aux dérivées partielles du nouvel hamiltonien par rapport aux

variables action du problème. Comme $H' = H \doteq E$, on a coutume de dire que pour trouver les périodes du mouvement, il faut exprimer l'énergie du système en fonction de ses variables action.

5. Résumé de la procédure – Cas d'un potentiel radial. ***Procédure*** – Quatre étapes successives caractérisent le processus permettant de calculer les périodes du système à l'étude.

1. On résoud par la méthode de séparation des variables l'équation de Hamilton-Jacobi associée à la fonction génératrice $F_2 = F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}) \doteq F_2\big(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J})\big)$:

$$H\left(\boldsymbol{q}, \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{q}}\right) \doteq E$$

Ce faisant on obtient :

$$F_2 \doteq \sum_i W_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_i \int p_i \, dq_i$$

où les $\boldsymbol{\alpha}$ sont n constantes survenues au cours de la résolution. L'une d'entre elles, α_1, est l'énergie E du problème puisqu'elle entre directement dans l'équation à résoudre.

2. On calcule ensuite les n variables action du problème à partir de leur définition :

$$J_i := \frac{1}{2\pi} \oint p_i \, dq_i \doteq \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dW_i}{dq_i} \, dq_i$$

Ce faisant, on obtient $J_i(\boldsymbol{\alpha}) = J_i(E, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

3. On utilise les n résultats qui précèdent pour obtenir $E = E(\boldsymbol{J})$.

4. Les différentes pulsations du système sont alors :

$$\omega_i = \frac{\partial E}{\partial J_i}$$

Variables angle-action pour un potentiel radial – Le hamiltonien d'une particule plongée dans un potentiel radial $V(r)$ s'écrit, en coordonnées polaires :

$$H = \frac{{p_r}^2}{2m} + \frac{{p_\theta}^2}{2mr^2} + V(r)$$

où p_r et p_θ sont les moments conjugués des variables r et θ respectivement. On en déduit l'équation de Hamilton-Jacobi pour la fonction génératrice F_2 des variables angle-action :

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_2}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}\right)^2 + V(r) - E \doteq 0$$

La séparation des variables est mise en œuvre en posant :

$$F_2 \doteq W_\theta(\theta, \boldsymbol{\alpha}) + W_r(r, \boldsymbol{\alpha})$$

et on obtient aisément :

$$F_2 \doteq \alpha_2\, \theta \pm \int \sqrt{2m\big(E - V(r)\big) - \alpha_2^2/r^2}\; dr$$

où α_2 est une constante issue de la séparation des variables. α_2 s'identifie ici au moment cinétique ℓ de la particule. On remarque que le couple $(\theta, \alpha_2 = \ell)$ forme déjà un couple de variables angle-action.

Les dérivées partielles de F_2 par rapport à r et θ fournissent ensuite p_r et p_θ respectivement, à partir desquels on obtient les expressions intégrales des variables action du problème :

$$\begin{cases} J_\theta = \dfrac{1}{2\pi} \oint p_\theta \, d\theta \doteq \dfrac{\alpha_2}{2\pi} \oint \, d\theta = \ell \\ J_r = \dfrac{1}{2\pi} \oint p_r \, dr \doteq \dfrac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m\big(E - V(r)\big) - \alpha_2^2/r^2} \, dr \end{cases}$$

On a bien $J_\theta \doteq \ell$ comme attendu. Quant à l'intégrale cyclique à réaliser pour obtenir J_r, elle doit s'écrire comme :

$$2\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m\big(E - V(r)\big) - \alpha_2^2/r^2} \, dr$$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation qui rend nulle l'expression sous la racine carrée. Ces quantités et leur existence ou non dépendent évidemment de la nature du potentiel $V(r)$.

On peut poursuivre le calcul en se focalisant maintenant sur le potentiel coulombien, $V(r) = e^2/4\pi\varepsilon_0 r$, associé au problème classique de l'atome d'hydrogène (dans l'approximation d'un noyau fixe au centre du référentiel, m est alors la masse de l'électron et (r, θ) ses coordonnées polaires). On montre alors facilement que l'existence simultanée de r_1 et r_2 est conditionnée par une énergie négative : c'est finalement la condition pour qu'il y ait un mouvement périodique. Dans ce cas, on peut opérer le calcul de l'intégrale à l'aide des méthodes classiques ou par la méthode des résidus. Ce faisant,

on trouve que les variables action du problème s'expriment comme :

$$\begin{cases} J_\theta \doteq \ell \\ J_r \doteq -\ell + \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\sqrt{-2m/E} \end{cases}$$

On élimine facilement la constante $\alpha_2 = \ell$ pour obtenir finalement :

$$E = -\frac{m\,e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2}\,\frac{1}{(J_\theta + J_r)^2}$$

Le calcul des dérivées partielles de E qui s'ensuit montre que les pulsations ω_θ et ω_r s'avèrent être les mêmes : c'est un cas où on dit que le système est *dégénéré*. Compte tenu de ce fait, le calcul s'arrange pour fournir la pulsation unique des mouvements de l'électron autour de son noyau en fonction de son énergie :

$$\omega = -\frac{16\,m\,\varepsilon_0}{e^2}\left(-\frac{2m}{E}\right)^{-3/2} = 2\pi/T$$

6. Les variables angle-action et la mécanique des quanta. Lorsque Bohr proposa en 1913 la quantification des orbites circulaires de l'atome d'hydrogène, il se fia aux idées de Planck et d'Einstein et partit de l'hypothèse que l'énergie de l'électron pour ces orbites s'écrivait comme : $E = f(n)\,h\nu = E_n$, où f est une fonction inconnue d'un certain nombre entier n, ν la fréquence du mouvement circulaire et h la constante que Planck avait introduite en 1900. Chaque orbite stable était

ainsi caractérisée par ce nombre entier n. Un calcul simple de mécanique classique permit à Bohr d'éliminer v dans cette expression pour obtenir :

$$E_n = -\frac{m\,e^4}{8\hbar^2(4\pi\varepsilon_0)^2}\,\frac{1}{[f(n)]^2}$$

où $\hbar$ est la constante de Planck divisée par 2π. Bohr admit aussi qu'en transitant d'une orbite à l'autre l'électron émettait un photon d'énergie $h\nu$. Il put ainsi comparer ses propres prévisions théoriques pour les fréquences lumineuses émises par l'atome d'hydrogène avec les résultats expérimentaux portant sur les spectres de raies de cet atome qui avaient été analysés par Balmer en 1885. Il y avait accord entre ces prévisions et les formules que Balmer avait découvertes pour $f(n) = -n/2$.
Bohr remarqua également que dans ces conditions le moment cinétique ℓ de l'électron était aussi quantifié sous la forme $\ell = n\,\hbar$ et que cela pouvait être pris comme hypothèse de départ.

Si on compare maintenant la formule obtenue par Bohr pour les énergies et les moments cinétiques des orbites stables avec celles obtenues au paragraphe précédent pour les variables angle-action, on trouve immédiatement :

$$\begin{cases} J_\theta \doteq \ell = n\,\hbar \\ J_r + J_\theta \doteq\ n\,\hbar \end{cases}$$

Ainsi, la quantification proposée par Bohr revient à quantifier les variables action du problème et le fait que le résultat ci-dessus impose $J_r \doteq 0$ est dû au cas particulier du mouvement circulaire (pour lequel $r_1 = r_2$). Historiquement, ce lien avec les variables action fut surtout réalisé et approfondi par Sommerfeld (1915-16) qui étudia le cas des orbites elliptiques. Le modèle de Bohr déboucha donc sur une *mécanique des quanta* qui érigeait en principe la quantification des variables action :

$$J_i \doteq \frac{1}{2\pi} \oint p_i \, dq_i = n_i \, \hbar$$

Cette mécanique de l'atome perdura jusqu'à la naissance de la mécanique quantique. On retrouve la quantification des intégrales d'action lorsque l'on réalise des approximations semi-classiques à partir du calcul quantique.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

Ouvrages classiques

- **L. Landau et E. Lifchitz**, *"Physique théorique, tome 1: Mécanique"*

- **C. Gignoux et B. Silvestre-Brac**, *"De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien"*

- **C. Lanczos**, *"The variational principles of mechanics"*

- **H. Goldstein**, *"Classical Mechanics"*

- **P. Appell**, *"Traité de mécanique rationnelle" (disponible sur le site de la BNF : http://gallica.bnf.fr)*

Approche simple des théories du chaos

- **P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal**, *"L'ordre dans le chaos"*, Hermann éd., coll. Enseignement des sciences (1988)

Niveau avancé

- **W. Dittrich and M. Reuter**, *"Classical and quantum dynamics"*, Springer-Verlag éd. (1994)
- **V. Arnold**, *"Méthodes mathématiques de la mécanique classique"*, MIR-Moscou éd. (1976)
- **W.Yourgrau and S.Mandelstam**, *"Variational principles in dynamics and quantum theory"*, Dover publications (1979)
- **H. Poincaré**, *« Leçons de mécanique céleste, tome I : théorie générale des perturbations planétaires »* (première édition : 1905).

J. Gabay éd. (2003). Volume disponible sur le web sur le site de la bibliothèque nationale : http://gallica.bnf.fr/

Historique – épistémologique

- **P.Duhem**, *"L'évolution de la mécanique"*, édition originale : 1903, (Vrin éd. 1992)
- **E. Mach**, *« La mécanique : exposé historique et critique de son développement »*, édition originale : 1904. J. Gabay éd. (1987)
- **R.Dugas**, *"Histoire de la Mécanique"*, Bibliothèque scientifique (16), Éditions du Griffon, Neuchâtel (Paris Dunod éditeur) (1950). (J. Gabay éd. 1996)
- **M.Jammer**, *"Concepts of force"*, Harvard University press, Cambridge-Massachusetts (1957)
- **G.Châtelet**, *"Les enjeux du mobile"*, collection : Des Travaux, Éditions du Seuil, Paris (1993)