TD 1 : Relativité restreinte

Exercice 1 : Formalisme tensoriel

1.1. Soient les deux quadrivecteurs

$$\vec{x} = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \vec{e}_\mu = x^\mu \vec{e}_\mu, \qquad \vec{y} = \sum_{\mu=0}^{3} y^\mu \vec{e}_\mu = y^\mu \vec{e}_\mu$$

1.1.1. En introduisant le tenseur métrique de composantes $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu.\vec{e}_\nu$, montrer que le produit scalaire $\vec{x}.\vec{y}$ s'écrit sous la forme

$$\vec{x}.\vec{y} = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x_\nu y^\nu = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

ce qui met en évidence le fait que le produit scalaire est obtenu à partir des composantes covariantes $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ de $\vec{x}$ et des composantes contravariantes y^μ de $\vec{y}$.

1.1.2. On considère le changement de système de coordonnées

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} x_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \\ x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu = \Lambda'^\mu_\nu x^\nu \end{cases}$$

où Λ et Λ' sont deux matrices 4×4 unitaires, i.e. $\Lambda^{-1} = {}^t\Lambda$, si le changement de base est orthonormée. En écrivant que le produit scalaire de deux vecteurs ne doit pas dépendre du système de coordonnées, i.e. que $x_\mu y^\mu = x'_\mu y'^\mu$, montrer que

$$\Lambda'^\mu_\nu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu_\nu = \Lambda^\nu_\mu$$

1.1.3. Montrer, toujours en utilisant l'invariance du produit scalaire $g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = g'_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu$, que le tenseur métrique se transforme comme un tenseur de rang deux.

1.2. On s'intéresse à présent à l'intervalle d'univers

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

1.2.1. Montrer que ds^2 est invariant sous une transformation de Lorentz.

1.2.2. Expliquer pourquoi l'expression de l'intervalle d'univers dans le formalisme tensoriel

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu$$

est dite manifestement covariante.

Exercice 2 : Temps de vie des mésons

2.1. L'interaction des protons de haute énergie du rayon cosmique dans la haute atmosphère produit des muons. La mesure en laboratoire du temps de vie des muons est de $\tau_0 \simeq 2,20.10^{-6}\ s$. Leur vitesse étant proche de la vitesse de la lumière, $v \simeq 0.9994c$, il parcourt donc une distance de l'ordre de $v\tau_0 \simeq 660\ m$ avant de se désintégrer. On ne devrait donc pas les observer au niveau du sol, ce qui est contraire à l'expérience.

2.1.1. Calculer le temps de vie $\tau(v)$ des muons observé depuis le sol.

2.1.2. En déduire la distance parcourue par les muons pour un observateur terrestre avant leur désintégration.

TD 2 : Électrodynamique relativiste

Exercice 1 : Invariance de Lorentz de l'équation des ondes

A la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, on s'est aperçu que, contrairement aux lois de la mécanique, l'équation des ondes n'était pas invariante sous transformation de Galilée. W. Voigt montre en 1897 que l'équation des ondes est invariante sous les transformations de Lorentz qui étaient déjà connues. Cela corrobore les expériences entreprises par Michelson puis Michelson et Morley montrant l'invariance de la vitesse de la lumière lors d'un changement de référentiel galiléen. H. Poincaré montrera la même année que les équations de Maxwell sont invariantes de Lorentz. La théorie de Maxwell est donc la première théorie relativiste avant la relativité restreinte d'Einstein en 1905 !

1.1. On considère l'équation des ondes unidimensionnelle

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(x,t) = 0$$

1.1.1. A partir des transformations de Lorentz (x', t') des coordonnées d'espace-temps (x, t), calculer

$$c\frac{\partial}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial}{\partial t'}$$

en fonction de $c\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$.

1.1.2. Calculer

$$c^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

1.1.3. En déduire l'égalité

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

qui prouve alors l'invariance de l'équation des ondes lors d'une transformation de Lorentz.

1.2. La covariance de l'équation des ondes est manifeste lorsqu'on utilise le formalisme tensoriel.

1.2.1. Montrer que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = c^2\partial_\mu\partial^\mu$$

1.2.2. Expliquer pourquoi $\partial_\mu\partial^\mu$ est manifestement covariant.

Exercice 2 : Équation de propagation des potentiels

2.1. Les équations de propagation des potentiels

$$\Box \varphi = \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \Box \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

peuvent être facilement obtenues en introduisant le quadrivecteur potentiel $A^\mu = \begin{pmatrix} \varphi/c & \vec{A} \end{pmatrix}$ et en utilisant le formalisme tensoriel.

2.1.1. Écrire la condition de jauge de Lorentz dans le formalisme tensoriel.

2.1.2. En insérant la définition du tenseur de Faraday puis la condition de jauge de Lorentz dans le second groupe des équations de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

retrouver l'équation de propagation des potentiels.

Exercice 3 : Effet Doppler

3.1. On considère une onde électromagnétique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$ dans un référentiel $(\mathcal{R})$.

3.1.1. Montrer que la phase de l'onde

$$\phi = \omega t - \vec{k}.\vec{r} = k_\mu x^\mu$$

peut s'écrire sous la forme d'un produit scalaire du quadrivecteur position et d'un quadrivecteur vecteur d'onde dont on donnera les composantes.

3.1.2. Calculer la pulsation ω' et le vecteur d'onde $\vec{k}'$ de l'onde dans un référentiel $(\mathcal{R}')$ en mouvement rectiligne uniforme à une vitesse v par rapport à $(\mathcal{R})$.

TD 3 : Électrodynamique relativiste (2)

Exercice 1 : Lois de transformation des champs électromagnétiques

1.1. On considère un référentiel $(\mathcal{R})$ dans lequel règnent un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$. On souhaite calculer les champs électrique $\vec{E}'$ et magnétique $\vec{B}'$ dans un second référentiel $(\mathcal{R}')$ en mouvement de translation uniforme à une vitesse v par rapport à $(\mathcal{R})$.

1.1.1. En utilisant le fait que le quadripotentiel $A^\mu = \begin{pmatrix} \varphi/c & \vec{A} \end{pmatrix}$ est un quadrivecteur et donc se transforme de manière covariante lors d'une transformation de Lorentz, écrire la loi de transformation de φ et de $\vec{A}$.

1.1.2. En utilisant à présent le fait que le tenseur de Faraday $F^{\mu\nu}$ est un tenseur de rang deux et donc se transforme comme le produit de deux vecteurs $X^\mu Y^\nu$, écrire la loi de transformation des champs électrique et magnétique.

1.2. Un électron au repos dans un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$ est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ homogène. La vitesse de l'électron étant nulle, il ne subit aucune force de Lorentz. Si maintenant, l'électron est mis en mouvement rectiligne uniforme à une vitesse $\vec{v}$, l'invariance de Galilée des lois de la mécanique newtonienne requiert l'absence de force. L'utilisation des lois de la mécanique newtonienne peut se justifier dans la limite des faibles vitesses. Toutefois, puisqu'à présent l'électron se déplace dans le champ magnétique $\vec{B}$, il subit une force de Lorentz non nulle. Il en découle un paradoxe qui est levé par l'électrodynamique relativiste.

1.2.1. Il doit exister une force dans le référentiel mobile suivant l'électron qui compense la force de Lorentz. Supposons que cette force soit due à un champ électrique $\vec{E}$. Donner l'expression de $\vec{E}$ pour que la force soit nulle.

1.2.2. Calculer le rotationnel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}$ et montrer qu'on retrouve la relation de Maxwell-Faraday. On pourra utiliser la relation

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{B} = 0 \;\Leftrightarrow\; (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{B} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

1.2.3. En utilisant la définition $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ du potentiel vecteur, montrer que $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ a un rotationel nul et donc dérive d'un potentiel φ.

1.3. On peut comprendre l'apparition d'un champ électrique dans le référentiel de l'électron en considèrant la transformation des sources du champ électromagnétique lors d'une transformation de Lorentz.

1.3.1. Le champ magnétique $\vec{B}$ est supposé produit par une densité de courant $\vec{j}$. La densité de charge ρ est nulle. En utilisant le fait que $j^\mu = (\, c\rho \quad \vec{j}\,)$ est un quadrivecteur, écrire les densités de courant $\vec{j}'$ et de charge ρ' dans le référentiel en mouvement uniforme à une vitesse v par rapport au premier. Commenter.

1.3.2. Écrire la loi de conservation de la charge dans le formalisme tensoriel.

TD 4 : Variables normales du champ électromagnétique

Exercice 1 :

Pour simplifier les calculs, on pourra se placer dans le système d'unités où $c = 1$.

1.1. Dans le vide, la solution la plus générale de l'équation des ondes est une superposition d'ondes planes de la forme :

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \displaystyle\int d^3\vec{k}\,\vec{E}(\vec{k},t)e^{i\vec{k}.\vec{r}} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \displaystyle\int d^3\vec{k}\,\vec{B}(\vec{k},t)e^{i\vec{k}.\vec{r}} \end{cases}$$

où les amplitudes $\vec{E}(\vec{k},t)$ et $\vec{B}(\vec{k},t)$ sont les transformées de Fourier des champs $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$. De la même manière, le potentiel vecteur et électrique peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \displaystyle\int d^3\vec{k}\,\vec{A}(\vec{k},t)e^{i\vec{k}.\vec{r}} \\ \varphi(\vec{r},t) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \displaystyle\int d^3\vec{k}\,\varphi(\vec{k},t)e^{i\vec{k}.\vec{r}} \end{cases}$$

1.1.1. Écrire la condition imposée aux transformées de Fourier $\vec{E}(\vec{k},t)$, $\vec{B}(\vec{k},t)$, $\vec{A}(\vec{k},t)$, $\varphi(\vec{k},t)$ par la réalité des grandeurs physiques $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$, $\varphi(\vec{r},t)$.

1.1.2. Montrer que le choix de jauge de Coulomb impose l'annulation de la composante longitudinale de $\vec{A}(\vec{k},t)$.

1.1.3. Écrire les amplitudes $\vec{E}(\vec{k},t)$ et $\vec{B}(\vec{k},t)$ des champs en fonction de $\vec{A}_\perp(\vec{k},t)$ et $\varphi(\vec{k},t)$.

1.1.4. Écrire les relations liant $\vec{E}(\vec{k},t)$ et $\vec{B}(\vec{k},t)$ imposée par les équations de Maxwell et montrer que les composantes longitudinales des champs électrique et magnétique s'annulent dans le vide.

1.2. On introduit les **variables normales** du champ électromagnétique

$$\begin{cases} \vec{a}(\vec{k},t) = -\dfrac{i}{\sqrt{2\omega}}\left(\vec{E}_\perp - \dfrac{\vec{k}}{||\vec{k}||} \wedge \vec{B}_\perp\right) \\ \vec{b}(\vec{k},t) = -\dfrac{i}{\sqrt{2\omega}}\left(\vec{E}_\perp + \dfrac{\vec{k}}{||\vec{k}||} \wedge \vec{B}_\perp\right) \end{cases}$$

1.2.1. En combinant les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, calculer

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\vec{E} \pm \frac{\vec{k}}{||\vec{k}||} \wedge \vec{B}\Big)$$

puis en déduire les équations du mouvement des variables normales.

1.2.2. Écrire la solution de ces équations différentielles.

1.2.3. En utilisant la réalité des champs, montrer que $\vec{b}^*(\vec{k},t) = -\vec{a}(-\vec{k},t)$. On utilisera par donc par la suite les variables $\vec{a}(\vec{k},t)$ et $\vec{a}^*(\vec{k},t)$.

1.2.4. En inversant les relations de définition des variables normales, écrire les champs $\vec{E}(\vec{k},t)$ et $\vec{B}(\vec{k},t)$ en fonction de $\vec{a}(\vec{k},t)$ et $\vec{a}^*(\vec{k},t)$.

1.2.5. En déduire l'expression des champs $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$.

1.2.6. Calculer le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r},t)$ en fonction des variables normales.

1.3. On va maintenant calculer l'énergie de l'onde électromagnétique en fonction des variables normales.

1.3.1. Calculer $E_\perp^*(\vec{k},t)E_\perp(\vec{k},t)$ puis $\vec{B}_\perp^*(\vec{k},t).\vec{B}_\perp(\vec{k},t)$ en fonction des variables normales.

1.3.2. Calculer l'énergie propre du champ électromagnétique

$$H = \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\,\Big[E^2(\vec{r},t) + B^2(\vec{r},t)\Big]$$

1.4. On considère finalement le cas général où il existe dans l'espace des sources du champ électromagnétique, i.e. une densité de charge $\rho(\vec{r},t)$ et une densité de courant $\vec{j}(\vec{r},t)$.

1.4.1. En introduisant les transformées de Fourier $\vec{j}(\vec{k},t)$ du courant électrique et $\rho(\vec{k},t)$ de la densité de charge, écrire les équations de Maxwell du second groupe. Noter que les équations du premier groupe sont inchangées.

1.4.2. Montrer que le champ électrique a une composante longitudinale $E_{||}(\vec{k},t)$ non nulle dont on donnera l'expression.

1.4.3. Montrer que cette composante longitudinale du champ électrique conduit à une équation de Poisson dont la solution est

$$\varphi(\vec{r},t) = \int d^3\vec{r'}\,\frac{\rho(\vec{r'},t)}{4\pi||\vec{r}-\vec{r'}||}$$

1.4.4. En déduire l'expression du champ $\vec{E}_{||}(\vec{r},t)$.

1.4.5. Calculer

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\vec{E} \pm \frac{\vec{k}}{||\vec{k}||} \wedge \vec{B}\Big)$$

et en déduire l'équation du mouvement des variables normales.

1.4.6. Montrer que la définition des variables normales restant identique à celle du cas des champs libres, l'énergie associée aux composantes traverses des champs garde la même expression que dans le vide. Le couplage avec les sources du champ ne se manifeste en effet que par une modification de la dynamique des variables normales.

1.4.7. En déduire l'énergie électromagnétique.

TD 5 : Champs et potentiels en jauge de Lorenz

Exercice 1 : Potentiels retardés de Liénard-Wichert

1.1. Le but de cet exercice est de déterminer le potentiel électromagnétique créé par une distribution de charge $\rho(\vec{r},t)$ et de courant $\vec{j}(\vec{r},t)$.

1.1.1. A partir du second groupe des des équations de Maxwell $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$, déterminer les équations de propagation satisfaites respectivement par $\vec{A}$ et φ en jauge de Lorenz.

1.1.2. Intéressons-nous au potentiel φ créé par une charge ponctuelle à l'origine, i.e. $\rho(\vec{r},t) = q\delta(\vec{r})$. Montrer que dans le système de coordonnées sphériques, le potentiel ne dépend que de r.

1.1.3. En déduire que l'équation de propagation se réduit à

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r})$$

On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées sphériques

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

1.1.4. En posant $\chi(r,t) = r\varphi(r,t)$, montrer qu'en tout point $r \neq 0$, l'équation de propagation peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial r}\right)\chi = 0$$

1.1.5. En déduire que le potentiel est une fonction de $t - r/c$.

Exercice 2 : Champs crées par une charge de vitesse constante

2.1. On peut montrer que les potentiels de Liénard-Wichert

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r},t) = \displaystyle\int \frac{\rho\big(\vec{r}',t' = t - ||\vec{r}' - \vec{r}||/c\big)}{4\pi\varepsilon_0||\vec{r} - \vec{r}'||}d^3\vec{r}' \\ \vec{A}(\vec{r},t) = \displaystyle\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}\big(\vec{r}',t' = t - ||\vec{r}' - \vec{r}||/c\big)}{||\vec{r} - \vec{r}'||}d^3\vec{r}' \end{cases}$$

sont solutions des relations de propagation des potentiels. Ces potentiels sont dits retardés car les densités de charge et de courant ne contribuent aux potentiels qu'après le temps nécessaire pour que l'information parcoure à la vitesse c la distance séparant les densités du point de mesure des potentiels.

2.1.1. On considère ici une charge q de trajectoire $\vec{r}(t)$. La densité de charge étant

$$\rho(\vec{r}', t') = q\delta(\vec{r}' - \vec{r}(t'))$$

montrer que le potentiel de Lienard-Wichert peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}, t) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int \frac{\delta\big(t'' - t' + ||\vec{r}(t'') - \vec{r}'||/c\big)}{||\vec{r}(t'') - \vec{r}'||} dt'' \\ \vec{A}(\vec{r}', t') = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int \frac{q\vec{v}(t'')\delta\big(t'' - t' + ||\vec{r}(t'') - \vec{r}'||/c\big)}{||\vec{r}(t'') - \vec{r}'||} dt'' \end{cases}$$

2.1.2. Poser $u = t'' - t' + ||\vec{r}(t'') - \vec{r}'||/c$ dans l'expression précédente. On notera $\{t''_\alpha\}_\alpha$ les solutions de l'équation $u = 0$

2.1.3. Limitons l'étude à une charge q en mouvement de translation uniforme, i.e. $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$. On choisit l'axe (Ox) dans la direction de la vitesse, i.e. $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ et l'origine au point $\vec{r}(0)$, i.e. $\vec{r}_0 = 0$. Écrire les solutions $\{t''_\alpha\}_\alpha$ de l'équation $u = 0$.

2.1.4. Donner l'expression du potentiel créé par la charge.

2.1.5. En déduire l'expression des champs électrique et magnétique.

TD 7 : Rayonnement électromagnétique dipolaire

Exercice 1 :

1.1. On s'intéresse au champ électromagnétique produit à grande distance par une assemblée de charges q_i situées en $\vec{r}_i(t)$.

1.1.1. Écrire le potentiel vecteur retardé $\vec{A}(\vec{r},t)$ créé par l'assemblée de charges à grande distance $r \gg r_i$. On fera apparaître le moment dipolaire $\vec{p}(t)$ de la distribution de charges à l'instant t.

1.1.2. Écrire de la même manière le potentiel scalaire $\varphi(\vec{r},t)$

1.1.3. En déduire l'expression du champ électrique. Etudier les limites électrostatique (vitesse des charges négligeables) et des grandes fréquences d'oscillation de charges.

1.2. On se limite dans la suite à une distribution de charge oscillant dans la direction (Oz) de sorte que le moment dipolaire $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$ mais aussi toutes ses dérivées, en particulier $\dot{\vec{p}} = \sum_i q_i \vec{v}_i$ et $\ddot{\vec{p}} = \sum_i q_i \vec{\gamma}_i$, sont dirigées suivant $\vec{u}_z$.

1.2.1. Donner l'expression du potentiel vecteur en coordonnées sphériques.

1.2.2. En déduire l'expression du champ magnétique. On rappelle l'expression du rotationnel dans le système de coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta F_\varphi\right) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right] \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\varphi\right) \\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\theta\right) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right] \end{pmatrix}$$

1.2.3. Calculer le flux d'énergie électromagnétique transportée par l'onde électromagnétique. En déduire la quantité d'énergie traversant une sphère de rayon r paru unité de temps.

1.2.4. Écrire l'énergie totale rayonnée par une charge unique q d'accélération γ.

1.2.5. Écrire l'énergie moyenne rayonnée par un courant alternatif d'intensité $I(t) = I_0 \cos\omega t$ de pulsation ω sur une longueur ℓ.

TD 8 : Rayonnement quadrupolaire et diffusion

Exercice 1 : Rayonnement quadrupolaire et magnétique

1.1. On considère une assemblée de charges q_i situées aux positions $\vec{r}_i$. Si l'accélération moyenne de ces charges est nulle, i.e. si $\ddot{p} = 0$, la distribution de charge n'émet pas de rayonnement dipolaire. Le rayonnement émis est dit quadrupolaire.

1.1.1. Rappeler l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ en tout point de l'espace.

1.1.2. Montrer qu'au premier ordre en r_i/r, le potentiel vecteur s'écrit

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \underset{r \gg r_i}{\simeq} \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\sum_i q_i \vec{v}_i(t - r/c) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_i q_i \vec{v}_i(t - r/c)\big(\vec{r}_i(t - r/c).\vec{u}_r\big)\right)\right]$$

1.1.3. En utilisant l'expression du double produit vectoriel

$$\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) \wedge \vec{C} = \left(\vec{A}.\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{B}.\vec{C}\right)\vec{A}$$

montrer que le potentiel vecteur peut s'écrire sous la forme

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \underset{r \gg r_i}{\simeq} \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\sum_i q_i \vec{v}_i(t - r/c) + \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left((\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i) \wedge \vec{u}_r\right) + \frac{1}{2c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_i q_i \vec{r}_i(t - r/c)(\vec{r}_i(t - r/c).\vec{u}_r)\right)\right]$$

1.1.4. Expliquer pourquoi on peut ajouter un terme de la forme $f(r)\vec{u}_r$ au potentiel vecteur sans changer la physique du problème.

1.1.5. Ajouter au potentiel vecteur le terme

$$-\frac{\mu_0}{24\pi rc}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_i q_i r_i^2\right)\vec{u}_r$$

1.2. Le potentiel vecteur obtenu

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \underset{r \gg r_i}{\simeq} \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}(t - r/c) + \frac{\mu_0}{4\pi rc}\dot{\vec{m}}(t - r/c) \wedge \vec{u}_r + \frac{\mu_0}{24\pi rc}\ddot{D}_{rr}(t - r/c)\vec{u}_r$$

fait apparaître la dérivée $\dot{\vec{p}}$ du moment dipolaire $\vec{p}$, le moment quadrupolaire et le dernier le moment magnétique $\vec{m} = \sum_i \frac{q_i}{2m_i}\vec{L}_i = \sum_i \frac{q_i}{2}\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$.

1.2.1. Retrouver l'expression du moment quadrupolaire par le développement du potentiel scalaire à grande distance des charges dans la limite non-relativiste.

Exercice 2 : Le bleu du ciel

2.1. On considère une charge q liée à un point choisi pour origine par une force harmonique de pulsation propre ω_0. On utilisera ce modèle simpliste pour décrire l'orbite de l'électron dans les atomes composant l'atmosphère. Le mouvement de la charge est ralentie par une force de frottement de la forme $-\frac{m}{\tau}\dot{x}$. Le système est soumis à l'action du champ électrique d'une onde électromagnétique de pulsation ω. On néglige les forces magnétiques.

2.1.1. Écrire l'équation de la dynamique dans la direction parallèle au champ électrique.

2.1.2. Montrer qu'il existe une solution de la forme $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$.

2.1.3. En déduire la densité de courant $j(x', t) = q\dot{x}\delta\big(x' - x(t)\big)$ induit par le champ électrique.

2.1.4. Écrire l'équation des ondes dans un milieu comportant N atomes et montrer que l'assemblée de charge se comporte comme un milieu diélectrique de constante diélectrique relative complexe.

2.1.5. Expliquer pourquoi le ciel est bleu.