TD 1 : Solution de Schwarzchild et trous noirs

Exercice 1 : Solution de Schwarzchild des équations d'Einstein

1.1. On considère une masse m ponctuelle immobile et placée à l'origine. La distribution de masse étant invariante sous les rotations d'angle θ et ϕ, on s'attend à ce que la métrique soit de symétrie sphérique. On cherche des solutions de la forme

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

où λ et ν sont deux fonctions supposées ne dépendre que de r à déterminer. En dehors de la masse, l'espace est vide. Les équations d'Einstein se réduisent par conséquent à

$$R_{\mu\nu} = 0$$

pour tout $r > 0$.

1.1.1. Écrire les éléments de matrice $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique g.

1.1.2. Écrire les éléments de matrice $g^{\mu\nu}$ de l'inverse du tenseur métrique g^{-1}.

1.1.3. Déterminer les symboles de Christoffel $\Gamma^{\nu}_{\rho\mu}$ en fonction de $\nu(r)$ et $\lambda(r)$ et de leurs dérivées $\nu'(r)$ et $\lambda'(r)$. On pourra noter que les seuls symboles de Christoffel non nuls sont ceux comportant au moins deux indices identiques et des dérivations par rapport à $x_1 = r$ ou $x_2 = \theta$.

1.1.4. En déduire les éléments de matrice du tenseur de Ricci. On notera que seuls les éléments diagonaux sont non nuls.

1.1.5. Les équations d'Einstein imposent l'annulation du tenseur de Ricci.

$$R_{00} = R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$$

En déduire l'expression de λ et ν. On montrera tout d'abord que $\lambda' + \nu' = 0$ ce qui par intégration conduit à $\lambda + \nu = 0$ (justifier !).

1.1.6. Montrer que la métrique s'écrit finalement

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

où on a posé pour simplifier $\mathcal{G} = c = 1$.

Exercice 2 : Trous noirs statiques

2.1. On considère un trou noir statique formé d'une masse m ponctuelle à l'origine. On suppose que l'espace-temps est décrit par la métrique de Schwarzchild. On considère également une particule tombant dans le trou noir. Rappelons que sa masse n'a aucune importance puisque la chute libre des corps est indépendante de leur masse. La particule tombe radialement vers l'origine, i.e. avec $u^2 = u^3 = 0$ ($u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ est le quadrivecteur vitesse) dans le système de coordonnées sphériques.

2.1.1. La théorie de la relativité prédit que la trajectoire de la particule est une géodésique de l'espace-temps. En déduire l'équation différentielle satisfaite par $u^0 = \frac{dx^0}{ds}$ en fonction des dérivées du tenseur métrique (i.e. on n'utilisera pas l'expression finale des symboles de Christoffel mais leur définition).

2.1.2. En mulitpliant l'équation obtenue par g_{00} puis en intégrant, montrer qu'on obtient

$$g_{00} u^0 = k$$

où k est une constante d'intégration. Utiliser la solution de Schwarzchild pour écrire l'expression de $u^0 = \frac{dt}{ds}$.

2.1.3. Par définition du quadri-vecteur vitesse $u^\mu = \frac{p^\mu}{m} = \frac{dx^\mu}{ds}$, on a $u_\mu u^\mu = c^2 = 1$. Utiliser cette relation et l'expression de u^0 pour déterminer u^1.

2.1.4. En calculant

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dr} = \frac{u^0}{u^1}$$

montrer que pour un observateur immobile, le temps semble se ralentir à mesure que la particule approche le trou noir pour s'arrêter complètement au rayon critique $r_c = 2m$ ($r_c = 2\mathcal{G}m/c^2$ dans le système d'unités SI) ou **rayon de Schwarzchild**.

2.1.5. Déterminer le rayon critique du soleil et d'un électron.

2.1.6. Calculer le temps propre τ de la particule, correspondant au temps dans le référentiel où elle est au repos, est donné par $ds = cd\tau$.

Relativité générale **2007**
L3 - Physique

TD 2 : Précession du périhélie de Mercure

Exercice 1 :

1.1. On considère deux masses m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle mutuelle. On se place dans le cas limite d'une masse m_1 infiniment plus lourde que la seconde m_2. Dans le référentiel de masse, cette première masse m_1 apparaît donc immobile à l'origine. Elle déforme l'espace-temps selon les équations d'Einstein dont la solution de symétrie appropriée est la métrique de Schwarzchild :

$$ds^2 = e(r)c^2dt^2 - \frac{1}{e(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2, \qquad e(r) = 1 - \frac{2\mathcal{G}m_1}{c^2r} = 1 - \frac{r_0}{r} \quad (1.1)$$

On se limite au plan $\phi = 0$. La gravitation étant traitée comme un propriété de l'espace-temps et non plus comme une force, la masse m_2 se comporte comme une particule pour la métrique (1.1).

1.1.1. A partir de la définition de l'action $S = -m_2c\int ds$, écrire le lagrangien de la masse m_2.

1.1.2. Déduire des équations de Lagrange la loi de conservation du moment cinétique L_O.

1.1.3. Montrer qu'il découle de cette loi de conservation, la relation

$$\dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2e(r)}{m_2^2r^4 + \frac{L_0^2}{c^2}\left(\frac{1}{e(r)}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right)}$$

1.1.4. Donner l'expression des impulsions généralisées puis du hamiltonien. Montrer que l'énergie est une constante du mouvement.

1.1.5. Montrer que l'expression de l'énergie conduit à la relation

$$r^4 = \frac{c^4e(r)}{E^2}\left[m_2^2r^4 + \frac{L_0^2}{c^2}\left(\frac{1}{e(r)}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right)\right]$$

1.1.6. Comme dans le cas classique, on pose $u = 1/r$ dans l'expression obtenue précédemment. En dérivant ensuite par rapport à θ, montrer qu'on a

$$2u'u'' = \left[r_0\left(u^2 + \frac{m_2^2c^2}{L_0^2}\right) - 2u(1 - ur_0)\right]u' \;\Leftrightarrow\; u'' = \frac{3}{2}r_0u^2 - u + \frac{m_2^2c^2r_0}{2L_0^2} \qquad (1.2)$$

1.2. L'expression de l'énergie est analogue à celle obtenue dans la limite non-relativiste avec un terme supplémentaire en u^3. Ce dernier provoque à l'ordre le plus bas la précession du périhélie. On se propose de traiter ce terme en perturbation.

1.2.1. Déterminer la trajectoire $u_0(t) = 1/r_0(t)$ de la masse m_2 en négligeant le terme u'' dans l'équation du mouvement (1.3).

1.2.2. Introduisons à présent une déviation petite

$$u = u_0 + v$$

par rapport à cette trajectoire. Résoudre l'équation du mouvement (1.3) en se limitant au premier ordre en v.

1.2.3. Montrer finalement que le périhélie précesse et déterminer l'angle de précession à chaque période.