

1. ONDES L2

Programme “officiel”

Outils mathématiques :

Développement en série de Fourier, équations aux dérivées partielles

De la loi fondamentale de la dynamique à l'équation des ondes

Vibrations transversales d'une corde,

Ondes longitudinales sur un ressort,

Ondes acoustiques,

Ondes longitudinales et transversales dans un solide,

Onde plane progressive sinusoidale,

Puissance associée à une onde,

Conditions aux limites, milieux limités, ondes stationnaires

Relation de dispersion et effet Doppler

Vitesses de phase et de groupe

Ondes électromagnétiques dans le vide

Des équations de Maxwell dans le vide à l'équation des ondes

Solutions de type ondes planes, polarisation

Energie électromagnétique et vecteur de Poynting

1.1. L'équation des ondes

1.1. L'équation des ondes

L'équation des ondes est l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t) = 0 \quad (1)$$

où v est un paramètre dont on démontrera qu'il correspond à la vitesse de propagation de l'onde.

1.1.1. Solutions de l'équation des ondes unidimensionnelle

1.1.1.1. Propagation des ondes

L'équation des ondes (1) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x, t) = 0$$

En posant

$$\xi = t - \frac{x}{v}, \quad \eta = t + \frac{x}{v}$$

il vient

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \end{cases}$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{2}{v} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{2}{v} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Finalement, l'équation des équations s'écrit

$$-\frac{4}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f(\xi, \eta) = 0$$

La solution de cette équation est de la forme

$$f(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta) = g\left(t - \frac{x}{v}\right) + h\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Chacun des deux termes $g(\xi)$ et $h(\eta)$ correspond à une onde se propageant à vitesse v dans le sens $x > 0$ et $x < 0$. En effet, l'onde $g(\xi)$ apparaît identique lorsque

$$g(\xi) = g(\xi') \Leftrightarrow t - \frac{x}{v} = t' - \frac{x'}{v} \Leftrightarrow x' = x + v(t' - t)$$

i.e. lorsqu'on se déplace à une vitesse avec elle à la vitesse $+v$. L'onde $h(\eta)$ conduit à

$$h(\eta) = h(\eta') \Leftrightarrow t + \frac{x}{v} = t' + \frac{x'}{v} \Leftrightarrow x' = x - v(t' - t)$$

i.e. elle se déplace à la vitesse $-v$.

1.1.1.2. Décomposition en ondes planes progressives

L'équation des ondes (1) est à variables séparables. Écrivons l'onde sous forme d'un produit :

$$f(x, t) = f_x(x) f_t(t)$$

il vient alors

$$f_t(t) \frac{\partial^2 f_x(x)}{\partial x^2} - \frac{f_x(x)}{v^2} \frac{\partial^2 f_t(t)}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f_x(x)} \frac{\partial^2 f_x(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2 f_t(t)} \frac{\partial^2 f_t(t)}{\partial t^2}$$

Dans le membre de gauche apparaît une fonction uniquement de x alors que le membre de droite ne dépend que de t . La seule manière qu'on ait égalité pour toutes valeurs de x et de t est que les deux membres soient égaux à une constante. On pose ⁽¹⁾

$$\frac{1}{f_x(x)} \frac{d^2 f_x(x)}{dx^2} = \frac{1}{v^2 f_t(t)} \frac{d^2 f_t(t)}{dt^2} = -k^2 \quad (4)$$

Il reste donc deux équations différentielles du second ordre :

$$\frac{1}{f_x(x)} \frac{d^2 f_x(x)}{dx^2} = -k^2 \Leftrightarrow f_x(x) = f_x(0) e^{\pm ikx}$$

et

$$\frac{1}{f_t(t)} \frac{d^2 f_t(t)}{dt^2} = -k^2 v^2 \Leftrightarrow f_t(t) = f_t(0) e^{\pm ikvt}$$

Finalement les solutions ont la forme d'une onde plane :

$$f(x, t) = f_x(x) f_t(t) = f(0) e^{\pm i(kx - \omega t)} \quad (5)$$

où on a introduit la **pulsation**

$$\omega = |k|v > 0 \quad (6)$$

La constante $k \in \mathbb{R}$ est appelée **vecteur d'onde** et la relation (6) **relation de dispersion**. La solution (5) n'est qu'une des solutions possibles. L'ensemble des solutions correspond à toutes les ondes planes avec $k \in \mathbb{R}$. La solution la plus générale est une combinaison linéaire d'ondes planes

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_k e^{i(kx - \omega t)} + B_k e^{-i(kx - \omega t)} \right] dk \quad (7)$$

où A_k et B_k sont des constantes *a-priori* complexes. Dans cette expression, on devrait écrire $\omega(k)$ et non simplement ω pour rappeler que ω dépend du vecteur d'onde d'après

⁽¹⁾ Notons que si on avait choisi la constante $+k^2$ dans l'équation (4), les solutions n'auraient pas été des exponentielles complexes, i.e. des fonctions trigonométriques, mais des exponentielles réelles, i.e. des fonctions hyperboliques. Ces solutions divergent à l'infini et doivent donc être écartées pour des raisons physiques.

1.1. L'équation des ondes

la relation de dispersion (6). On omet en général cette dépendance pour alléger les notations.

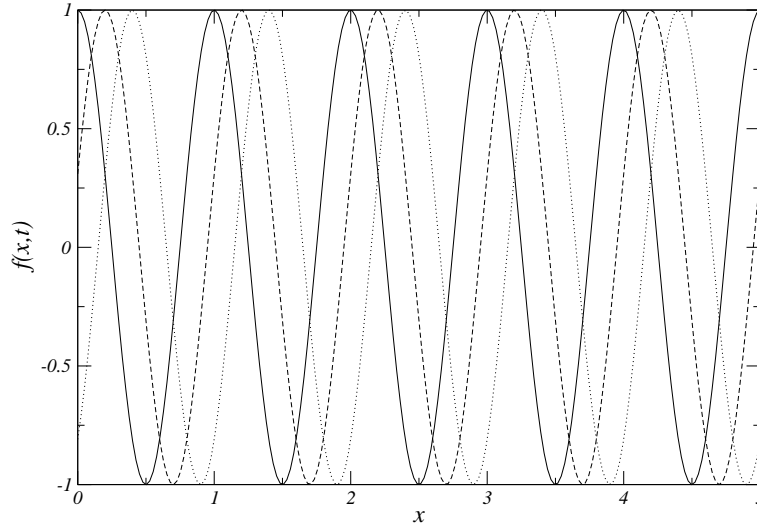


Figure 1 : [Fig 1] Exemple d'onde progressive de la forme

$$f(x, t) = \cos(kx - \omega t)$$

de longueur d'onde $\lambda = 1$ et de vitesse $v = 1$ (i.e. $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi$ et $\omega = kv$) pour trois temps différents $t = 0$ (traits pleins), $t = 0.2$ (pointillés longs) et $t = 0.4$ (pointillés courts). On voit l'onde avancer dans le sens $x > 0$ au cours du temps. L'onde correspond au cas particulier $E_k = 1$ si $k = 2\pi$ et $E_k = 0$ si $k \neq 2\pi$ et $F_k = 0$ pour tout k de l'expression (8).

Si $f(x, t)$ est une grandeur physique, elle doit être réelle. Un choix approprié des constantes A_k et B_k permet de rendre l'expression (7) réelle. Par exemple, lorsque $A_k = B_k = C_k/2$, on a

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_k \cos(kx - \omega t) dk$$

et si $A_k = -B_k = C_k/2i$

$$f(x, t) = \int_0^{\infty} C_k \sin(kx - \omega t) dk$$

On peut également écrire (7) sous la forme manifestement réelle

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [E_k \cos(kx - \omega t) + F_k \sin(kx - \omega t)] dk \quad (8)$$

où $A_k = \frac{1}{2}E_k + \frac{1}{2i}F_k$ et $B_k = \frac{1}{2}E_k - \frac{1}{2i}F_k$. De manière générale, les constantes A_k et B_k , ou de manière équivalente E_k et F_k , sont déterminées à partir de $f(x, 0)$.

1.1.1.3. Décomposition en ondes stationnaires

Par le choix des constantes A_k et B_k , on peut décrire des ondes progressives mais aussi des ondes stationnaires. L'expression (7) peut en effet s'écrire

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [A_k e^{ikx} e^{-i\omega t} + B_k e^{-ikx} e^{i\omega t}] dk \\
 &= \int_0^{\infty} [A_k e^{ikx} e^{-i\omega t} + A_{-k} e^{-ikx} e^{-i\omega t} + B_k e^{-ikx} e^{i\omega t} + B_{-k} e^{ikx} e^{i\omega t}] dk \\
 &= \int_0^{\infty} [A_k (\cos kx + i \sin kx) (\cos \omega t - i \sin \omega t) \\
 &\quad + A_{-k} (\cos kx - i \sin kx) (\cos \omega t - i \sin \omega t) \\
 &\quad + B_k (\cos kx - i \sin kx) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \\
 &\quad + B_{-k} (\cos kx + i \sin kx) (\cos \omega t + i \sin \omega t)] dk \\
 &= \int_0^{\infty} [P_k \cos kx \cos \omega t + Q_k \cos kx \sin \omega t + R_k \sin kx \cos \omega t + S_k \sin kx \sin \omega t] dk
 \end{aligned} \tag{9}$$

où on a posé

$$P_k = A_k + A_{-k} + B_k + B_{-k}, \quad Q_k = -iA_k - iA_{-k} + iB_k + iB_{-k},$$

$$R_k = iA_k - iA_{-k} - iB_k + iB_{-k}, \quad S_k = A_k - A_{-k} + B_k - B_{-k},$$

Chacun des termes de (9) correspond à une onde stationnaire.

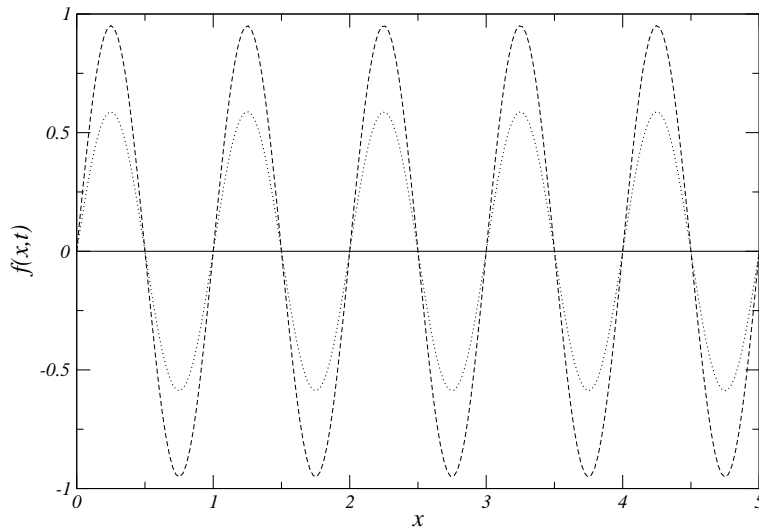


Figure 2 : [Fig 1] Exemple d'onde stationnaire de la forme

$$f(x, t) = \sin(kx) \sin(\omega t)$$

de longueur d'onde $\lambda = 1$ et de vitesse $v = 1$ (i.e. $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi$ et $\omega = kv$) pour trois temps différents $t = 0$ (traits pleins), $t = 0.2$ (pointillés longs) et $t = 0.4$ (pointillés courts). On voit que l'onde n'avance pas au cours du temps, les maxima restent à la même abscisse. L'onde correspond au cas particulier $S_k = 1$ si $k = 2\pi$ et $S_k = 0$ si $k \neq 2\pi$ et $P_k = Q_k = R_k = 0$ pour tout k de l'expression (9).

1.1. L'équation des ondes

1.1.2. L'équation des ondes en dimension $d = 3$

1.1.2.1. Ondes formées par un champ scalaire

L'équation des ondes (1) se généralise en dimension $d = 3$ à

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] f(\vec{r}, t) = 0 \Leftrightarrow \left[\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] f(\vec{r}, t) = 0 \quad (10)$$

où $\vec{r} = (x \ y \ z)$. L'équation est de nouveau à variables séparables. Écrivons l'onde sous forme d'un produit :

$$f(\vec{r}, t) = f_x(x) f_y(y) f_z(z) f_t(t)$$

il vient alors

$$f_y f_z f_t \frac{d^2 f_x}{dx^2} + f_x f_z f_t \frac{d^2 f_y}{dy^2} + f_x f_y f_t \frac{d^2 f_z}{dz^2} - \frac{1}{v^2} f_x f_y f_z \frac{d^2 f_t}{dt^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f_x(x)} \frac{d^2}{dx^2} f_x(x) + \frac{1}{f_y(y)} \frac{d^2}{dy^2} f_y(y) + \frac{1}{f_z(z)} \frac{d^2}{dz^2} f_z(z) - \frac{1}{v^2 f_t(t)} \frac{d^2}{dt^2} f_t(t) = 0$$

Chacun des termes est une fonction à une variable. Pour que la somme soit nulle pour tout x, y, z et t , chacune de ces fonctions ne peut être qu'une constante. On pose

$$\frac{1}{f_x(x)} \frac{d^2}{dx^2} f_x(x) = -k_x^2, \quad \frac{1}{f_y(y)} \frac{d^2}{dy^2} f_y(y) = -k_y^2, \quad \frac{1}{f_z(z)} \frac{d^2}{dz^2} f_z(z) = -k_z^2$$

et par conséquent

$$\frac{1}{v^2 f_t(t)} \frac{d^2}{dt^2} f_t(t) = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

Les solutions de ces quatre équations différentielles sont

$$f_x(x) = f_x(0) e^{\pm i k_x x}, \quad f_y(y) = f_y(0) e^{\pm i k_y y}, \quad f_z(z) = f_z(0) e^{\pm i k_z z}, \quad f_t(t) = f_t(0) e^{\pm i \omega t}$$

où on a posé la pulsation

$$\omega^2 = v^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

Les solutions de l'équation des ondes sont donc les ondes planes

$$f(\vec{r}, t) = f(0, 0) e^{\pm i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} = f(0, 0) e^{\pm i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (11)$$

Les trois constantes k_x, k_y et k_z sont les composantes du vecteur \vec{k} . L'onde plane apparaît identique à elle-même lorsque

$$\begin{aligned} f(\vec{r}', t') = f(\vec{r}, t) &\Leftrightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}' - \omega t' = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \\ &\Leftrightarrow k^2 \vec{r}' - \omega t' \vec{k} = k^2 \vec{r} - \omega t \vec{k} \\ &\Leftrightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \frac{\omega}{k^2} (t' - t) \vec{k} \\ &\Leftrightarrow \vec{r}' = \vec{r} + v (t' - t) \frac{\vec{k}}{k} \end{aligned}$$

où on a utilisé la relation de dispersion (11). L'onde se propage donc dans la direction \vec{k} à la vitesse v . La solution la plus générale est une combinaison linéaire d'ondes planes

$$f(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + B_{\vec{k}} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] d^3 \vec{k} \quad (12)$$

où $A_{\vec{k}}$ et $B_{\vec{k}}$ sont des constantes. Si $f(\vec{r}, t)$ est une grandeur réelle, on peut écrire comme dans le cas unidimensionnel

$$f(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[E_{\vec{k}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + F_{\vec{k}} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right] d^3 \vec{k}$$

où $A_{\vec{k}} = \frac{1}{2} E_{\vec{k}} + \frac{1}{2i} F_{\vec{k}}$ et $B_{\vec{k}} = \frac{1}{2} E_{\vec{k}} - \frac{1}{2i} F_{\vec{k}}$ sont des constantes réelles. Comme dans le cas unidimensionnel, on peut écrire l'onde sous la forme d'un développement en ondes stationnaires.

1.1.2.2. Ondes formées par un champ de vecteurs

On considère un champ de vecteurs $\vec{u}(\vec{r}, t) = (u_x \ u_y \ u_z)$ (champ électrique ou magnétique, champ de déformation dans un solide, ...) satisfaisant l'équation des ondes

$$\left[\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{u}(\vec{r}, t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u_x(\vec{r}, t) = 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u_y(\vec{r}, t) = 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u_z(\vec{r}, t) = 0 \end{cases}$$

Chaque composante satisfait une équation des ondes (10). La solution générale de cette équation étant (12), on a par exemple pour u_x

$$u_x(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_{x, \vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + B_{x, \vec{k}} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] d^3 \vec{k}$$

où $A_{x, \vec{k}}$ et $B_{x, \vec{k}}$ sont des constantes données par les conditions initiales. On a une expression analogue pour les composantes u_y et u_z de sorte qu'on rassembler les trois expressions dans une même expression vectorielle :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\vec{A}_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{B}_{\vec{k}} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] d^3 \vec{k}$$

où $\vec{A}_{\vec{k}} = (A_{x, \vec{k}} \ A_{y, \vec{k}} \ A_{z, \vec{k}})$. Le champ de vecteurs est écrit ici sous la forme d'une superposition d'ondes planes progressives.

1.1.2.3. Polarisation des ondes

Plutôt que d'exprimer les vecteurs $\vec{A}_{\vec{k}}$ et $\vec{B}_{\vec{k}}$ dans la base canonique $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, on choisit une base orthonormée dont l'un des vecteurs est parallèle à \vec{k} . Lorsque $\vec{A}_{\vec{k}}$ ou $\vec{B}_{\vec{k}}$ est parallèle à \vec{k} , on parle d'**onde longitudinale**. Lorsque $\vec{A}_{\vec{k}}$ ou $\vec{B}_{\vec{k}}$ est perpendiculaire à \vec{k} , on parle d'**onde transverse**.

1.1. L'équation des ondes

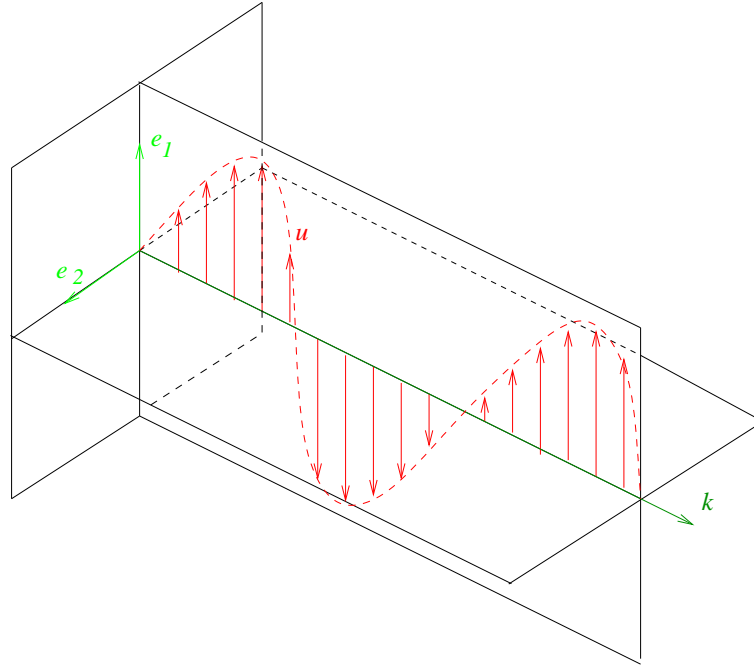


Figure 3 : [Fig 1] Exemple d'onde plane transverse polarisée rectilignement :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = A\vec{e}_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Le champ de vecteurs est en tout point perpendiculaire au vecteur d'onde \vec{k} : l'onde est transverse. Tous les vecteurs $\vec{u}(\vec{r}, t)$ sont parallèles deux à deux : l'onde est polarisée rectilignement.

Lorsque les vecteurs $\vec{u}(\vec{r}, t)$ sont tous parallèles, on parle d'onde plane polarisée rectilignement. Puisqu'il y a deux vecteurs de base \vec{e}_1 et \vec{e}_2 perpendiculaires à \vec{k} , il existe deux polarisations rectilignes :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \left[E_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + F_1 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right] \vec{e}_1 \\ \left[E_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + F_2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right] \vec{e}_2 \end{cases}$$

En superposant ces deux ondes planes polarisées rectilignement, on obtient, sauf cas particulier, une onde circulaire. En effet, écrivons les deux ondes planes polarisées rectilignement sous la forme

$$G_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_1) \vec{e}_1, \quad G_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_2) \vec{e}_2$$

où $G_{1,2} = E_{1,2} \cos \delta_{1,2}$ La quantité $\delta_1 - \delta_2$ est le déphasage entre les deux ondes. Lorsque $\delta_2 - \delta_1 \neq 0$ (à un multiple de π près), la direction de la superposition des deux ondes

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = G_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_1) \vec{e}_1 + G_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_2) \vec{e}_2$$

tourne autour du vecteur d'onde \vec{k} . L'extrémité du vecteur \vec{u} se trouve à tout instant sur une ellipse. On parle de **polarisation elliptique** Si $\delta = \delta_2 - \delta_1$ est un multiple entier de π , l'onde est polarisée linéairement. Si $\delta = \pm\pi/2$, l'onde est polarisée **circulairement**

avec une polarisation circulaire droite dans le cas $\delta = \pi/2$ et gauche lorsque $\delta = -\pi/2$. Dans tous les autres cas, la polarisation est elliptique.

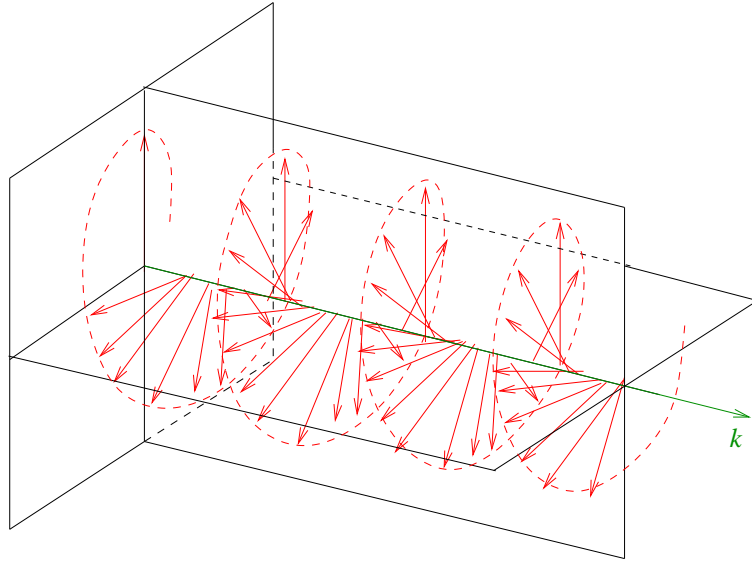


Figure 4 : [Fig 1] Exemple d'onde polarisée circulairement :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = A \left[\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \vec{e}_1 + \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \vec{e}_2 \right]$$

par superposition de deux ondes planes transverses polarisée rectilignement et déphasées.

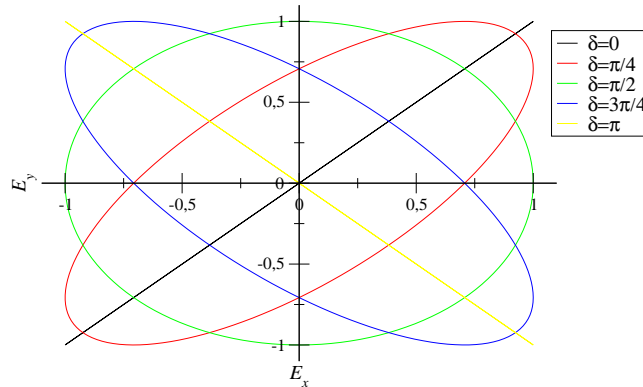


Figure 5 : [Fig 1] Lieu géométrique des composantes $\vec{u} \cdot \vec{e}_1$ et $\vec{u} \cdot \vec{e}_2$ du champ de vecteurs \vec{u} d'une onde électromagnétique de la forme

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = G \left(\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_1) \vec{e}_1 + G_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_2) \vec{e}_2 \right)$$

en fonction du déphasage $\delta = \delta_1 - \delta_2$.

1.2. L'équation des ondes en physique

1.2. L'équation des ondes en physique

1.2.1. La corde vibrante

On considère une corde tendue entre les points O et A distants d'une longueur L . On choisit l'axe (Ox) dans la direction (OA) . La corde est pincée et écartée de sa position d'équilibre avant d'être lâchée au temps $t = 0$. Elle se met alors à vibrer dans le plan (Oxz) . La corde est suffisamment tendue pour que la pesanteur soit négligeable devant les forces de tension. L'équation de la corde au repos est par conséquent $z(x) = 0$ pour $x \in [0; L]$ avec $z(0) = z(L) = 0$.

1.2.1.1. Principe de la dynamique appliqué à la corde vibrante

Pour étudier la dynamique, on va découper (virtuellement) l'intervalle $x \in [0; L]$ en N morceaux de corde de largeur Δx . La corde est alors assimilée aux $N - 1$ points de coordonnées (x_i, z_i) aux extrémités de chacun de ces morceaux de cordes. Ces points sont affectés d'une masse $m = \rho \Delta x$ où ρ est la densité linéique de masse de la corde. Sur chacun de ces points agissent deux forces de tension créées par les deux éléments de corde respectivement à gauche et à droite. L'intensité de ces forces n'est pas connue. En revanche, on sait qu'elles sont dirigées vers les deux éléments de corde à gauche et à droite.

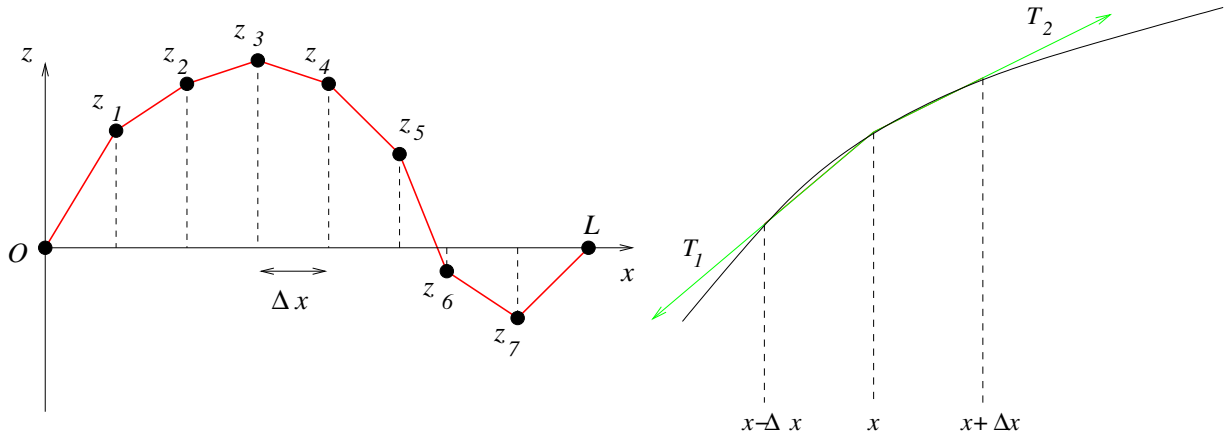


Figure 6 : [Fig 1 Fig 2] A gauche, découpage de la corde en éléments de projection Δx sur (Ox) . A droite, bilan des forces agissant sur l'élément de corde de longueur au repos Δx centré sur le point x .

La tension créée par le point $z(x + \Delta x)$ sur le point $z(x)$ est dirigée suivant le vecteur joignant les points $z(x)$ et $z(x + \Delta x)$:

$$\vec{T}_1 = \frac{T_1}{\ell_1} \begin{pmatrix} -\Delta x \\ z(x - \Delta x, t) - z(x, t) \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_2 = \frac{T_2}{\ell_2} \begin{pmatrix} \Delta x \\ z(x + \Delta x, t) - z(x, t) \end{pmatrix}$$

où les constantes de normation sont

$$\begin{cases} \ell_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + [z(x - \Delta x, t) - z(x, t)]^2} \simeq \Delta x, \\ \ell_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + [z(x + \Delta x, t) - z(x, t)]^2} \simeq \Delta x \end{cases}$$

En développant $z(x \pm \Delta x)$ à l'ordre deux :

$$z(x + \Delta x, t) \simeq z(x, t) \pm \Delta x \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

les forces de tension se réduisent à

$$\vec{T}_1 = T_1 \left(-\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{-1}{2} \Delta x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), \quad \vec{T}_2 = T_2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$$

La masse d'un élément de corde étant $m = \rho \Delta x$ où ρ est la densité linéique de la corde, le principe fondamental de la dynamique impose

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m \vec{\gamma} \Leftrightarrow \left((T_2 - T_1) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{-T_1 + T_2}{2} \Delta x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \rho \Delta x \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right)$$

Puisque la position x est définie comme constante, on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow T_1 = T_2 = T$$

et donc la relation de la dynamique sur l'axe (Oz) s'écrit

$$T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{14}$$

1.2.1.2. Vibrations de la corde

Puisque la corde est fixée aux points O et A , les solutions physiquement acceptables de l'équation des ondes (14) sont les ondes stationnaires de la forme

$$z(x, t) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) \cos (2\pi \nu t)$$

pour que $z(0, t) = 0$ (la corde est fixée en 0). On a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 z(x, t), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = - (2\pi \nu)^2 z(x, t)$$

de sorte qu'en remplaçant dans l'équation des ondes, il vient

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \frac{\rho}{T} (2\pi \nu)^2 \Leftrightarrow \lambda \nu = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

La vitesse de l'onde est donc $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. La contrainte $z(L, t) = 0$ impose

$$z(L) = 0 = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} L \right) \sin (2\pi \nu t) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi$$

où n est un entier pour que le sinus s'annule au bout de la corde, i.e. en $x = L$. En utilisant la relation de dispersion, les fréquences de vibration possibles de la corde sont de la forme

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

La fréquence $\frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ est appelée le fondamental et $\frac{1}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \frac{3}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \dots$ les harmoniques. La forme la plus générale de la solution est finalement

$$z(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} t \right)$$

1.2. L'équation des ondes en physique

1.2.2. Ondes acoustiques dans les solides

On définit le champ de déformations $\vec{u}(\vec{r})$ comme le déplacement moyen des atomes par rapport à leur position d'équilibre dans un élément de volume de taille microscopique centré sur \vec{r} . Le champ \vec{u} n'est donc une donnée pertinente qu'à l'échelle macroscopique. On supposera que \vec{u} est une fonction continue et différentiable des coordonnées. La limite élastique correspond aux faibles déformations.

1.2.2.1. Équation de la dynamique dans un solide

Considérons un élément de volume $d^3\vec{r} = dxdydz$. Il est soumis à la pression exercée par les éléments voisins, i.e. sur chacune de ses faces s'exerce une force de la forme $\vec{\sigma}dS$. On note (x, y, z) le centre du cube et $\vec{\sigma}_z(x, y, z + dz/2)dxdy$ la force qui s'exerce sur la face du haut par exemple. L'indice z signifie qu'elle s'applique sur la surface pour laquelle $d\vec{S} = dS\vec{u}_z$, i.e. celle du haut. Chaque force a évidemment trois composantes, i.e.

$$\vec{\sigma}_z = \sigma_{zx}\vec{u}_x + \sigma_{zy}\vec{u}_y + \sigma_{zz}\vec{u}_z$$

On peut montrer que si l'élément de volume ne tourne pas, i.e. si le couple est nul, on doit avoir $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$ par exemple. σ_{zz} est une force de traction alors que σ_{zx} est une force de cisaillement. La résultante des forces s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{F} = & \overbrace{\vec{\sigma}_z(x, y, z + dz/2)dxdy}^{\text{Face du haut}} - \overbrace{\vec{\sigma}_z(x, y, z - dz/2)dxdy}^{\text{Face du bas}} \\ & + \vec{\sigma}_x(x + dx/2, y, z + dz)dydz - \vec{\sigma}_x(x - dx/2, y, z + dz)dydz \\ & + \vec{\sigma}_y(x, y + dy/2, z + dz)dxdz - \vec{\sigma}_y(x, y - dy/2, z + dz)dxdz \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} F_x = \vec{F} \cdot \vec{u}_x = & [\sigma_{zx}(x, y, z + dz/2) - \sigma_{zx}(x, y, z - dz/2)]dxdy \\ & + [\sigma_{xx}(x + dx/2, y, z) - \sigma_{xx}(x - dx/2, y, z)]dydz \\ & + [\sigma_{yx}(x, y + dy/2, z) - \sigma_{yx}(x, y - dy/2, z)]dxdz \end{aligned}$$

Le cube étant infiniment petit, on a

$$\begin{aligned} & \sigma_{zx}(x, y, z + dz/2) - \sigma_{zx}(x, y, z - dz/2) \\ = & \left[\sigma_{zx}(x, y, z) + \frac{dz}{2} \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zx} + \dots \right] - \left[\sigma_{zx}(x, y, z) - \frac{dz}{2} \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zx} + \dots \right] \\ = & dz \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zx} \end{aligned}$$

de sorte qu'il reste

$$F_x = \left[\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zx} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yx} \right] dxdydz$$

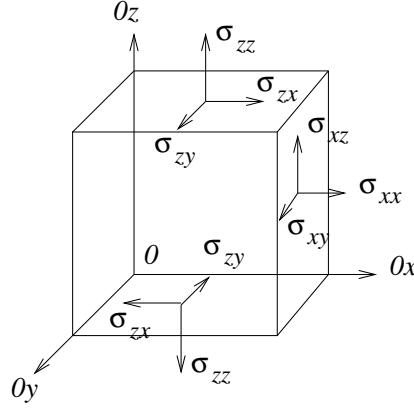


Figure 7 : [Fig 1] Définition des contraintes s'exerçant sur un cube.

Le problème est qu'on ne connaît pas *a-priori* la forme des contraintes σ qui dépendent de manière complexe des interactions entre atomes. Toutefois, si la déformation est petite, on peut supposer que la contrainte est proportionnelle aux variations spatiales de la déformation. C'est l'équivalent de la loi de Hooke pour un ressort où on écrit que la force est proportionnelle à l'allongement. On peut montrer que pour un solide isotrope, on peut poser

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

lorsque les deux indices sont différents et

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

lorsqu'ils sont identiques. μ et λ sont les coefficients de Lamé. On rappelle que u_x est la composante de la déformation \vec{u} suivant \vec{u}_x , i.e. $u_x = \vec{u} \cdot \vec{u}_x$. La résultante des forces suivant \vec{u}_x s'écrit alors

$$\begin{aligned} F_x &= \left[\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zx} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yx} \right] d^3 \vec{r} \\ &= \left[\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] d^3 \vec{r} \\ &= \left[\mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] d^3 \vec{r} \end{aligned}$$

En notant ρ la densité de masse du solide, l'équation de la dynamique suivant \vec{u}_x d'un élément de volume $d^3 \vec{r}$ s'écrit

$$F_x = \rho d^3 \vec{r} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \Leftrightarrow \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

1.2. L'équation des ondes en physique

1.2.2.2. Ondes acoustiques dans un solide

Considérons une déformation homogène dans le plan (Oyz) , i.e. ne dépendant que de la coordonnée x . L'équation de la dynamique (15) s'écrit alors pour la composante u_x , comme

$$\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

c'est à dire sous la forme d'une équation des ondes. Les solutions sont les ondes planes de la forme

$$u_x = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

En injectant cette solution dans l'équation des ondes, il vient la relation de dispersion

$$(\lambda + 2\mu)k_x^2 = \rho\omega^2$$

dont il découle la vitesse des ondes longitudinales :

$$v = \frac{\omega}{k_x} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Pour les composantes u_y et u_z , i.e. pour les ondes transverses, l'équation de la dynamique (15) s'écrit

$$\mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \underbrace{(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)}_{=0} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

dont il découle la relation de dispersion

$$\mu k_y^2 = \rho\omega^2$$

et donc la vitesse des deux ondes transverses :

$$v = \frac{\omega}{k_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

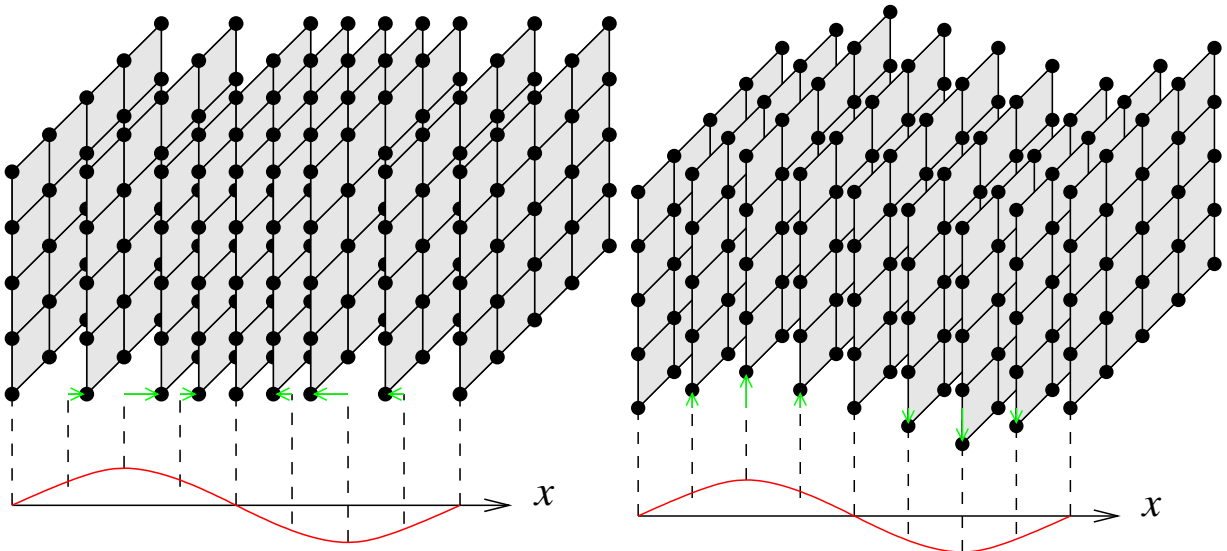


Figure 8 : [Fig 1 Fig 2] Ondes acoustiques longitudinale (à gauche) et transverse (à droite). Le champ de déformation $\vec{u}(x)$ est représenté par les flèches en vert.

1.2.3. Ondes électromagnétiques dans le vide

On rappelle que les équations de Maxwell s'écrivent dans le vide

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

1.2.3.1. Équation des ondes dans le vide

Dans le vide, i.e. en l'absence de densités de courant \vec{j} et de charge ρ , l'équation de Maxwell-Ampère se réduit à

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En insérant cette relation dans l'équation de Maxwell-Faraday, il vient

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Par ailleurs, on a la relation

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{=0} - \vec{\Delta} \vec{E} = -\vec{\Delta} \vec{E}$$

où le premier terme s'annule en l'absence de charge en vertu de l'équation de Maxwell-Gauss. On a donc finalement l'équation des ondes pour le champ électrique :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

Le champ magnétique satisfait la même équation. En insérant cette fois l'équation de Maxwell-Faraday dans celle de Maxwell-Ampère, il vient

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

D'après l'équation de Maxwell-Gauss magnétique, on a par ailleurs

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \underbrace{\operatorname{div} \vec{B}}_{=0} - \vec{\Delta} \vec{B} = -\vec{\Delta} \vec{B}$$

dont il découle

$$\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

1.2. L'équation des ondes en physique

Dans le système de coordonnées cartésiennes, l'équation des ondes est à variables séparables et il vient en dimension $d = 3$

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\vec{E}_1(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_2(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] d^3 \vec{k} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\vec{B}_1(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{B}_2(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] d^3 \vec{k} \end{cases}$$

Les champs apparaissent comme la combinaison linéaire d'ondes planes monochromatiques :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (20)$$

où ω est la pulsation de l'onde et \vec{k} son vecteur d'onde dirigé dans la direction de propagation de l'onde. En coordonnées sphériques, les équations des ondes (17) et (18) sont de la forme

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \vec{E}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \phi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

et admettent pour solution

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \int \left[\vec{E}_1(\vec{k}) \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} + \vec{E}_2(\vec{k}) \frac{e^{-i(kr - \omega t)}}{r} \right] d^3 \vec{k} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \int \left[\vec{B}_1(\vec{k}) \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} + \vec{B}_2(\vec{k}) \frac{e^{-i(kr - \omega t)}}{r} \right] d^3 \vec{k} \end{cases}$$

correspondant à une combinaison linéaire d'ondes sphériques

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{k}) \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{k}) \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \quad (21)$$

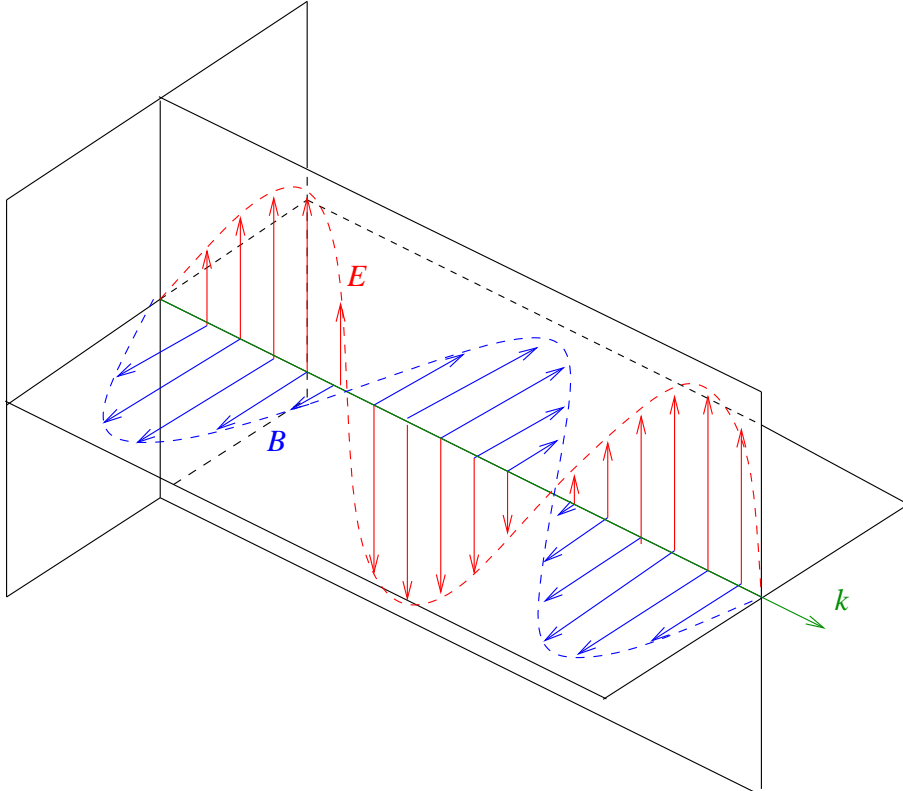


Figure 9 : [Fig 1] Onde électromagnétique plane linéairement polarisée dans le vide.

1.2.3.2. Relation de dispersion et équations de Maxwell dans le vide

En réinsérant les solutions sous forme d'ondes planes (20) ou d'ondes sphériques (21) dans les équations des ondes (17) et (18), il vient la relation de dispersion

$$-k^2 E(\vec{k}) + \frac{\omega^2}{c^2} E(\vec{k}) = 0 \Leftrightarrow \omega = c \|\vec{k}\|$$

De la même manière, les équations de Maxwell prennent une forme particulièrement simple identique pour une onde plane (20) ou une onde sphérique (21) :

$$\begin{aligned} i\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}) &= 0, & i\vec{k} \wedge \vec{E}(\vec{k}) &= -i\omega \vec{B}(\vec{k}), \\ i\vec{k} \cdot \vec{B}(\vec{k}) &= 0, & i\vec{k} \wedge \vec{B}(\vec{k}) &= i\frac{\omega}{c^2} \vec{E}(\vec{k}). \end{aligned}$$

Par conséquent, $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre direct. Les champs électrique et magnétique sont orthogonaux et transverses. Par ailleurs, les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère lient les amplitudes des champs électrique et magnétique :

$$\|\vec{B}\| = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|c^2} \|\vec{E}\| = \frac{1}{c} \|\vec{E}\|$$

1.2. *L'équation des ondes en physique*

SOMMAIRE

1. Ondes L2	1
1.1. L'équation des ondes	2
1.1.1. Solutions de l'équation des ondes unidimensionnelle	2
1.1.1.1. Propagation des ondes	2
1.1.1.2. Décomposition en ondes planes progressives	3
1.1.1.3. Décomposition en ondes stationnaires	5
1.1.2. L'équation des ondes en dimension $d = 3$	6
1.1.2.1. Ondes formées par un champ scalaire	6
1.1.2.2. Ondes formées par un champ de vecteurs	7
1.1.2.3. Polarisation des ondes	7
1.2. L'équation des ondes en physique	9
1.2.1. La corde vibrante	10
1.2.1.1. Principe de la dynamique appliqué à la corde vibrante	10
1.2.1.2. Vibrations de la corde	11
1.2.2. Ondes acoustiques dans les solides	12
1.2.2.1. Équation de la dynamique dans un solide	12
1.2.2.2. Ondes acoustiques dans un solide	14
1.2.3. Ondes électromagnétiques dans le vide	15
1.2.3.1. Équation des ondes dans le vide	15
1.2.3.2. Relation de dispersion et équations de Maxwell dans le vide	17