TD 1 : Mécanique lagrangienne

Exercice 1 : Mouvement balistique

1.1. On considère une masse m supposée ponctuelle. A l'instant $t = 0$, la masse est lancée d'un point qu'on choisira pour origine avec une vitesse $\vec{v}(0) = v\big[\cos\alpha\vec{u}_x + \sin\alpha\vec{u}_z]$. La masse est soumise à la force de pesanteur $\vec{F} = -mg\vec{u}_z$.

1.1.1. Combien de degrés de liberté comporte le système ?

1.1.2. Pourquoi prend-t-on le soin de préciser que la masse est ponctuelle ?

1.1.3. Représenter schématiquement la trajectoire de la masse m.

1.1.4. Écrire l'énergie potentielle V de pesanteur de la masse m.

1.1.5. Écrire le lagrangien L du système et en déduire les équations de Lagrange.

1.1.6. Résoudre les équations de Lagrange.

Exercice 2 : Oscillations d'une masse au bout d'un ressort

2.1. On considère une masse m suspendue à l'une des extrémités d'un ressort disposé verticalement. L'autre extrémité du ressort est fixe. La masse est soumise d'une part à la force de rappel du ressort

$$\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0) \times (-\vec{u}_z)$$

où ℓ est la longueur du ressort et ℓ_0 sa longueur au repos et d'autre part à la force de pesanteur $\vec{F}_m = -mg\vec{u}_z$. A l'instant $t = 0$, la masse est écartée de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse.

2.1.1. Représenter les forces agissant sur la masse m.

2.1.2. Quelle serait la longueur du ressort à l'équilibre ?

2.1.3. Représenter schématiquement (sans faire de calcul) la longueur ℓ en fonction du temps.

2.1.4. Combien de degrés de liberté comporte le système ?

2.1.5. Écrire l'énergie potentielle V_r associée à la force de rappel puis l'énergie potentielle V_m associée à la force de pesanteur et enfin l'énergie potentielle totale.

2.1.6. Écrire le lagrangien L du système et en déduire les équations de Lagrange.

2.1.7. Résoudre les équations de Lagrange.

2.1.8. Pourrait-on tenir compte des forces de frottements de l'air sur la masse ? (et si oui, comment ?)

Exercice 3 : Bille roulant sur un plan incliné

3.1. On considère une très petite bille de masse m roulant sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. La bille est lâchée sans vitesse à l'instant $t = 0$. Elle est soumise d'une part à la force de pesanteur $\vec{F} = -mg\vec{u}_z$ et de l'autre à la force de réaction $\vec{R}$ du plan incliné.

On choisira comme coordonnée généralisée $q(t)$ la distance parcourue par la bille sur le plan incliné depuis l'instant $t = 0$.

3.1.1. Sans calcul pouvez vous dire si le mouvement sera uniformément accéléré ou pas ?

3.1.2. Écrire l'énergie potentielle $V(q)$ de pesanteur.

3.1.3. Montrer que le travail de la force de réaction $\vec{R}$ est toujours nul et donc que l'énergie potentielle associée est constante.

3.1.4. Écrire le lagrangien du système puis les équations de Lagrange.

3.1.5. Déterminer la distance parcourue par la bille en fonction du temps.

3.1.6. Cette expérience a été réalisée par Galilée pour étudier les lois du mouvement. Quel était l'intérêt pour lui d'utiliser des plans inclinés avec des angles α petits ?

3.1.7. Que se passe-t-il si le plan incliné est mis en mouvement à une vitesse v_0 constante ?

Exercice 4 : Le pendule simple dans un mobile

4.1. On considère une particule ponctuelle de masse m suspendue au bout d'un fil inextensible de longueur ℓ. On note θ l'angle formé par le fil et la verticale. La masse du fil est supposée négligeable. Le système est plongée dans le champ de pesanteur terrestre d'accélération g. A l'instant $t = 0$, la masse est écartée de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse. On peut montrer que sa trajectoire est alors inscrite dans un plan.

4.1.1. Combien de degrés de liberté possède la masse m ?

4.1.2. Écrire le rayon-vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ puis la vitesse de la masse m dans le repère $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$.

4.1.3. Écrire le lagrangien de la masse m.

4.1.4. En déduire l'équation du mouvement puis la trajectoire dans la limite des faibles oscillations ($\theta \ll 1$).

4.2. Le pendule est à présent accroché au plafond d'un wagon de masse M et pouvant avancer sans frottement sur la voie dans la direction du plan d'oscillation du pendule.

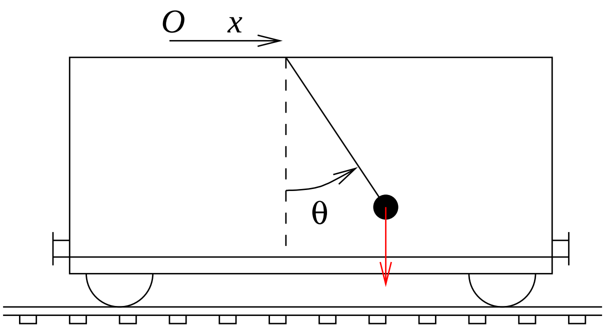

Figure 4.1 : *Pendule simple suspendu au plafond d'un wagon.*

4.2.1. Combien de degrés de liberté possède le système formé du pendule et du wagon.

4.2.2. Écrire le lagrangien du système.

4.2.3. Écrire les équations de Lagrange.

4.2.4. En se plaçant dans l'approximation des petits angles, montrer qu'on retrouve une équation de la dynamique analogue à celle du pendule simple :

$$M\ell\ddot{\theta} = -(M+m)g\theta$$

4.2.5. A partir des résultats de la première question, donner l'expression de $\theta(t)$.

4.2.6. Écrire finalement l'équation satisfaite par la position x du wagon et montrer que le wagon oscille à la même fréquence que le pendule mais en opposition de phase.

TD 2 : Mécanique lagrangienne (2)

Exercice 1 : Bille roulant dans une gouttière

1.1. On considère une bille de masse m plongée dans un champ de pesanteur uniforme $-g\vec{u}_z$ et roulant dans une gouttière donnée de manière générale sous forme paramétrique :

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s).$$

On ne fait dans un premier temps aucune hypothèse sur la forme de la gouttière. La position de la bille est entièrement définie par la donnée de l'abscisse curviligne s que l'on choisira par conséquent comme coordonnée généralisée.

1.1.1. Écrire le rayon-vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ puis la vitesse de la masse m dans le repère $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Exprimer le carré de la vitesse, i.e. v^2, de la bille en fonction de s et $\dot{s}$.

1.1.2. En déduire le lagrangien de la bille.

1.1.3. Écrire l'équation du mouvement de la bille.

1.1.4. Montrer que pour une une gouttière en forme d'hélice :

$$x(s) = r\cos(\alpha s), \qquad y(s) = r\sin(\alpha s), \qquad z(s) = -\beta s$$

le mouvement de la bille est uniformément accéléré.

Exercice 2 : Modes de vibration de la molècule de CO_2

2.1. On se propose d'étudier les modes de vibration de la molècule de CO_2 dans le cadre de la mécanique classique. Pour cela, on modélise les atomes comme des masses ponctuelles alignées sur une droite, l'atome de carbone étant placé au centre, et on note x_1, x_2 et x_3 leur coordonnée.

2.1.1. Montrer que l'invariance par translation impose nécessairement que l'énergie potentielle soit de la forme $V(x_2 - x_1, x_3 - x_2)$. On posera dans la suite $q_1 = x_2 - x_1$ et $q_2 = x_3 - x_2$.

2.1.2. Montrer que dans l'approximation harmonique, l'énergie potentielle s'écrit sous la forme

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}k_1(q_1 - q_1^{(0)})^2 + \frac{1}{2}k_1(q_2 - q_2^{(0)})^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_1^{(0)})(q_2 - q_2^{(0)})$$

avec des constantes k_1 et k_2 dont on donnera l'expression.

2.1.3. Écrire le lagrangien du système en fonction des coordonnées généralisées q_1, q_2 et des vitesses généralisées $\dot{q}_1, \dot{q}_2$. On négligera la vitesse du centre de masse, i.e. on supposera que $\dot{x}_2 \simeq 0$.

2.1.4. Montrer que les équations de Lagrange forment un système d'équations différentielles couplées qui peut s'écrire sous forme matricielle

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} q_1 - q_1^{(0)} \\ q_2 - q_2^{(0)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2m_O}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 - q_1^{(0)} \\ q_2 - q_2^{(0)} \end{pmatrix}$$

2.1.5. Calculer les valeurs propres a_+ et a_- et les vecteurs propres associés $\vec{a}_+$ et $\vec{a}_-$ de la matrice A à droite de l'égalité.

2.1.6. Calculer les composantes du vecteur $\begin{pmatrix} q_1 - q_1^{(0)} & q_2 - q_2^{(0)} \end{pmatrix}$ sur les deux vecteurs propres.

2.1.7. En déduire les équations différentielles satisfaites par ces composantes.

2.1.8. Résoudre et donner $q_1(t)$ et $q_2(t)$.

2.1.9. Représenter schématiquement la trajectoire des atomes de la molécule dans chacun de ses modes de vibration.

Exercice 3 : Modes de vibration d'une chaîne diatomique

3.1. On se propose d'étudier les modes de vibration d'un cristal formé de deux types d'atomes tel que le sel $\mathrm{Na^+Cl^-}$ par exemple. Pour simplifier la discussion, on se limitera au cas unidimensionnel, i.e. d'une chaîne d'ions $\mathrm{Na^+Cl^-Na^+Cl^-Na^+Cl^-}\ldots$. On suppose qu'à l'équilibre mécanique, les ions sont séparés d'une distance a. On note u_n le déplacement du n-ème ion de sodium par rapport à sa position d'équilibre et v_n celui du n-ème ion de chlore. Le n-ème ion de sodium interagit avec les ions voisins, i.e. avec le $n-1$-ème et le n-ème ion de chlore (réciproquement, le n-ème ion de chlore interagit avec le n-ème et le $n+1$-ème ion de sodium. On impose des conditions aux limites périodiques, i.e. on referme la chaîne sur elle-même en posant $u_{N+1} = u_1$.

3.1.1. Combien de degrés de liberté comporte le système ?

3.1.2. Écrire le lagrangien du système dans l'approximation harmonique.

3.1.3. En déduire les équations du mouvement.

3.1.4. Montrer que les ondes de la forme

$$u_n = Ae^{i(kna-\omega t)}, \qquad v_n = Be^{i(kna-\omega t)}$$

sont des solutions particulières des équations du mouvement.

3.1.5. Montrer que les conditions aux limites périodiques imposent que le vecteur d'onde k soit un multiple de $2\pi/a$.

3.1.6. Écrire la relation de dispersion entre le vecteur d'onde et la pulsation des ondes. En déduire la vitesse $v = \omega/k$ des ondes.

TD 3 : Problème de Kepler

Exercice 1 :

On considère le système formé de deux masses respectivement m_1 et m_2 supposées ponctuelles et soumises à une interaction gravitationnelle mutuelle. Ce modèle permet de décrire la trajectoire de la Terre autour du Soleil si on néglige l'interaction des autres planètes, la non-sphéricité du Soleil et les corrections relativistes.

1.1. Considèrons tout d'abord le cas plus général de deux particules ponctuelles de masses respectives m_1 et m_2 en interaction mutuelle décrite par une énergie potentielle $V(||\vec{r}_1 - \vec{r}_2||)$ ne dépendant que de la distance les séparant.

1.1.1. Écrire le lagrangien du système en fonction des rayons vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ des deux particules et des vitesses correspondantes.

1.1.2. Définir la quantité de mouvement totale et montrer qu'elle est une constante du mouvement.

1.1.3. Expliquer pourquoi l'énergie, dont on donnera l'expression, est également une constante du mouvement.

1.1.4. On utilise à présent pour coordonnées généralisées non plus celles des deux particules mais celles du centre de masse et la position relative des deux particules :

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Écrire le lagrangien en fonction de la masse totale $M = m_1 + m_2$ et de la masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.

1.1.5. Définir les impulsions $\vec{P}$ et $\vec{p}$ associées respectivement aux coordonnées $\vec{R}$ et $\vec{r}$.

1.1.6. Montrer que le centre de masse possède un mouvement rectiligne uniforme.

1.1.7. Donner l'expression de l'énergie.

1.2. On traite à présent le cas de masses en interaction gravitationnelle mutuelle, i.e. d'une force

$$\vec{F}_1 = \mathcal{G} m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{||\vec{r}_2 - \vec{r}_1||^3} = -\vec{F}_2$$

La force ne dépendant que de $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, le centre de masse a un mouvement rectiligne uniforme. On ne s'intéressera donc dans la suite qu'à la dynamique de la position relative

$\vec{r}$. La force étant centrale et donc le mouvement plan, on choisira pour coordonnées généralisées les coordonnées polaires $\vec{r} = (\, r \quad \theta\,)$.

1.2.1. Écrire l'énergie potentielle V en fonction de r, θ et φ puis le lagrangien.

1.2.2. Écrire puis interpréter l'équation de la dynamique pour la coordonnée θ. Montrer que cette équation exprime la conservation de l'impulsion p_θ (seconde loi de Kepler).

1.2.3. Écrire puis interpréter l'équation de la dynamique pour la coordonnée r.

1.2.4. Écrire l'expression du hamiltonien.

1.2.5. Montrer que les équations de Hamilton redonnent les deux équations du mouvement déjà établies.

1.2.6. Le hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps, l'énergie E est conservée. La loi de conservation du moment cinétique suggère la relation $r = r(\theta)$. Plutôt que d'intégrer les équations de Lagrange (ou de Hamilton), on va utiliser les lois de conservation de p_θ et E. Écrire l'énergie E en fonction de p_θ et de $u = 1/r$.

1.2.7. On obtient une équation différentielle du second ordre à coefficients constants pour u qu'on intégrera après avoir posé

$$z = \frac{p_\theta}{\sqrt{2\mu}} u - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\mu}}{p_\theta} \mathcal{G} m_1 m_2$$

1.2.8. En déduire l'équation de la trajectoire $r = r(\theta)$.

TD 4 : Mécanique hamiltonienne

Exercice 1 : Le pendule simple

1.1. On considère une particule ponctuelle de masse m suspendue au bout d'un fil inextensible de longueur ℓ. On note θ l'angle formé par le fil et la verticale. La masse du fil est supposée négligeable. Le système est plongé dans le champ de pesanteur terrestre d'accélération g. A l'instant $t = 0$, la masse est écartée de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse. On peut montrer que sa trajectoire est alors inscrite dans un plan.

1.1.1. Combien de degrés de liberté possède la masse m ?

1.1.2. Écrire le lagrangien de la masse m.

1.1.3. En déduire l'équation du mouvement puis la trajectoire dans la limite des faibles oscillations ($\theta \ll 1$).

1.1.4. Écrire l'impulsion p_θ ? Est-ce une constante du mouvement ? Pourquoi ?

1.1.5. Écrire l'énergie E de la particule. L'énergie est-elle une constante du mouvement ? Pourquoi ?

1.1.6. Écrire le hamiltonien $H(\theta, p_\theta, t)$ de la particule et en déduire les équations de Hamilton. Montrer qu'on retrouve d'une part la définition de l'impulsion et de l'autre l'équation du mouvement.

Exercice 2 : Particule dans un champ électromagnétique

2.1. On considère une particule ponctuelle de masse m et de charge q plongée dans un champ électromagnétique de potentiel électrique $\varphi(\vec{r}, t)$ et de potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$. On note $\vec{r}(t) = (\, x \quad y \quad z\,)$ la position de la particule au temps t et $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r} = (\, \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}\,)$ sa vitesse. Le lagrangien non-relativiste du système est

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi(\vec{r}, t) + q\vec{v}.\vec{A}(\vec{r}, t) \tag{2.1}$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique de la particule libre, le second à l'interaction avec le champ électrique et le troisième (le produit **scalaire** de la vitesse et du potentiel vecteur) à l'interaction avec le champ magnétique.

2.1.1. Pour simplifier les calculs, on se limite à des champs électrique et magnétique constants

$$\vec{E} = E\vec{u}_x, \qquad \vec{B} = B\vec{u}_z.$$

Vérifier que le potentiel électrique et le potentiel vecteur peuvent s'écrire, à une constante arbitraire près, sous la forme

$$\varphi = -Ex, \qquad \vec{A} = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Expliciter le lagrangien en fonction des trois coordonnées x, y et z et des trois vitesses $\dot{x}, \dot{y}$ et $\dot{z}$ ainsi que de E et B.

2.1.3. Écrire les trois équations du mouvement de la particule. Montrer qu'on retrouve l'équation fondamentale de la dynamique

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \tag{2.2}$$

2.1.4. Écrire les trois impulsions p_x, p_y et p_z de la particule ? On pourra également introduire le vecteur impulsion $\vec{p} = (\, p_x \quad p_y \quad p_z \,)$. Les trois composantes de l'impulsion de la particule sont-elles des constantes du mouvement ? Pourquoi ?

2.1.5. Écrire l'énergie E de la particule. L'énergie est-elle une constante du mouvement ? Pourquoi ?

2.1.6. Écrire le hamiltonien $H(\vec{r}, \vec{p}, t)$ de la particule et en déduire les équations de Hamilton. Montrer qu'on retrouve d'une part la définition de l'impulsion et de l'autre l'équation du mouvement (1.2).

TD 5 : Relativité restreinte

Exercice 1 : Mécanique analytique relativiste

1.1. La mécanique classique de Newton peut être obtenue dans le cadre formel de la mécanique analytique à partir du principe de moindre action

$$\delta S = 0, \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left[\frac{1}{2}mv^2 - V\right]}_{=L} dt$$

Le lagrangien est invariant sous les transformations de Galilée

$$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t, \qquad t \longrightarrow t' = t$$

où $\vec{v}_0$ est un vecteur constant, qui réalisent un changement de référentiel galiléen. A la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, on s'est aperçu que, contrairement aux lois de la mécanique, l'équation des ondes électromagnétiques n'était pas invariante sous transformation de Galilée. W. Voigt montre en 1897 que l'équation des ondes est invariante sous les transformations de Lorentz qui étaient déjà connues. Cela corrobore les expériences entreprises par Michelson puis Michelson et Morley montrant l'invariance de la vitesse de la lumière lors d'un changement de référentiel galiléen. H. Poincaré montrera la même année que les équations de Maxwell sont invariantes de Lorentz. Pour obtenir une théorie physique unifiée, il faut donc modifier soit l'électromagétisme pour la rendre invariante de Galilée soit la mécanique pour la rendre invariante de Lorentz. La première possibilité échoue. Einstein parvient en 1905 à construire une nouvelle mécanique, invariante de Lorentz et plus de Galilée. Il pose le principe de moindre action :

$$S = -mc \int ds, \qquad ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

pour une particule libre de masse m.

1.1.1. Montrer que le lagrangien de la particule est

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

1.1.2. Montrer que dans la limite des petites vitesses $v \ll c$, on retrouve le lagrangien classique. Donner les premières corrections relativistes au lagrangien classique.

1.1.3. Écrire les équations du mouvement de la particule libre relativiste.

1.1.4. Déterminer l'impulsion $\vec{p}$ et expliquer pourquoi c'est une constante du mouvement.

1.1.5. Déterminer l'énergie H et expliquer pourquoi c'est une constante du mouvement.

1.1.6. Montrer qu'on a la relation

$$H^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4$$

1.1.7. Donner les premières corrections relativistes à l'énergie classique.

1.1.8. Écrire le hamiltonien du système et en déduire les équations de Hamilton.

1.1.9. Écrire l'équation de Hamilton-Jacobi.

1.2. On considère une masse m dans un potentiel harmonique unidimensionnel $V(x)$. On pose le lagrangien

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - V(x), \qquad V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

1.2.1. Montrer que les équations du mouvement de la particule dans le potentiel $V(x)$ peuvent s'écrire de manière générale sous la forme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

1.2.2. Écrire l'énergie totale de la particule. On pourra réutiliser le résultat de la question 1.1.5.

1.2.3. Notons x_0 l'abscisse du point où la vitesse de l'oscillateur s'annule. L'énergie potentielle V étant indépendante du temps, le hamiltonien est une quantité conservée. Écrire l'égalité de l'énergie totale lorsque la particule se trouve au point $x(t)$ et au point x_0 et en déduire l'expression de la vitesse en fonction de la position x.

1.2.4. On se place dans la limite des faibles vitesses, i.e. pour laquelle l'énergie potentielle est petite devant l'énergie de masse mc^2. Écrire l'expression de la vitesse en se limitant à la première correction relativiste.

1.2.5. La période T correspond au temps nécessaire pour parcourir quatre fois la distance $x = 0$ à $x = x_0$. En déduire la première correction relativiste à la période.

TD 6 : Dynamique de la corde vibrante

Exercice 1 :

1.1. Dans un premier temps, on considère un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos ℓ_0 dont l'une des extrémités est fixée. A l'autre extrémité du ressort, on fixe une masse m. On tire sur le ressort et on le lâche à l'instant $t = 0$. Le ressort et la masse étant posés sur une table, ils sont astreints à rester alignés avec l'axe (Ox) de sorte que la force de pesanteur est à tout instant équilibrée par la réaction de la table.

1.1.1. Écrire le lagrangien du système.

1.1.2. Écrire les équations de Lagrange et en déduire la trajectoire de la masse.

1.1.3. Déterminer l'impulsion généralisée puis le hamiltonien du système.

1.1.4. Écrire les équations de Hamilton.

1.2. On considère à présent une corde de longueur au repos L. Les deux extrémités de la corde sont fixées. La corde est suffisamment tendue pour que la pesanteur soit négligeable devant les forces de tension. La corde est pincée et écartée de sa position d'équilibre avant d'être lâchée au temps $t = 0$. Elle se met alors à vibrer dans le plan (Oxz). La corde est décrite mathématiquement par une équation de la forme $z = z(x)$ avec $z(0) = z(L) = 0$.

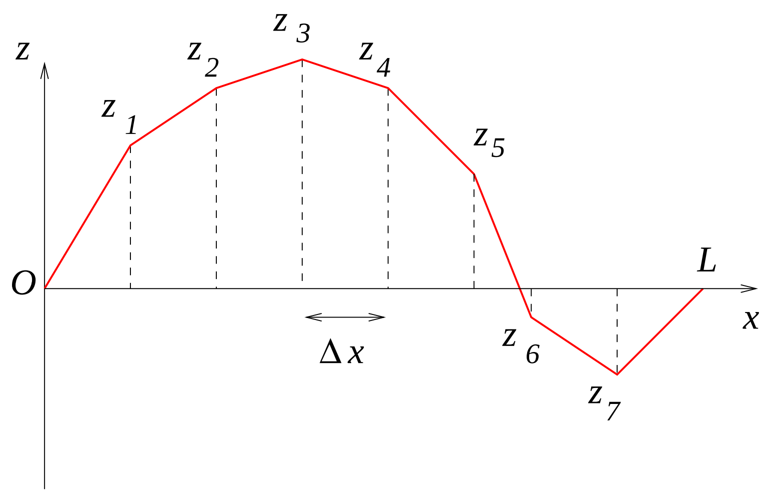

Figure 1.1 : *Découpage de la corde.*

Pour étudier la dynamique, on va découper (virtuellement) l'intervalle $x \in [0; L]$ en N morceaux de corde de largeur Δx (voir figure). La corde est alors assimilée aux $N - 1$

points de coordonnées (x_i, z_i) aux extrémités de chacun de ces morceaux de cordes. Ces points sont affectés d'une masse $m = \rho\Delta x$ où ρ est la densité linéique de masse de la corde. Pour modéliser la tension de la corde, on suppose qu'entre chaque couple de points voisins, la force est de la forme de celle d'un ressort avec une constante de raideur $k/\Delta x$ et une longueur au repos nulle (cas limite d'une corde infiniment tendue).

1.2.1. Quels sont les degrés de libertés de la corde ?

1.2.2. Écrire le lagrangien du système et montrer que le système est équivalent au problème unidimensionnel de N ressorts alignés sur un même axe.

1.2.3. En déduire les équations de Lagrange.

1.2.4. Déterminer les impulsions généralisées et le hamiltonien.

1.3. On repasse à présent dans la limite continue en remplaçant z_i par $z(x_i)$ où $x_i = i \times \Delta x$ et en faisant tendre Δx vers zéro, c'est à dire en découpant la corde en morceaux de plus en plus petits.

1.3.1. En utilisant un développement de Taylor, montrer que

$$z_{i+1} - z_i = \Delta x \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

Écrire une relation équivalente pour $z_{i-1} - z_i$.

1.3.2. Réecrire les équations de Lagrange de la question 1.2.3.

1.3.3. Vérifier que la solution des équations du mouvement est de la forme

$$z(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \sin\left(2\pi\nu t\right)$$

et en déduire la relation de dispersion entre longueur d'onde λ et fréquence ν et la vitesse de l'onde.

1.3.4. Montrer qu'à cause du fait que la corde est fixée à ses deux extrémités, elle ne peut pas vibrer à n'importe quelle fréquence.