TD 1 : Ordres de grandeur

Exercice 1 : Caractéristiques du système solaire

1.1. La distance Terre-Soleil est de 150 millions de kilomètres. En utilisant des arguments dimensionnels, exprimer le rapport R^3/T^2 (où R est le rayon de l'orbite d'une planète et T sa période de révolution autour du soleil) en fonction de G, la constante universelle de la gravitation et $M_\odot$, la masse du soleil (on justifiera et on utilisera le fait que la masse de la planète n'intervient pas).

1.2. On donne les périodes des planètes suivantes, Mercure, Vénus, Jupiter, Uranus et Pluton, respectivement égales à 0.24, 0.61, 11.8, 84.0 et 247.7 années.

1.2.1. En déduire les rayons des orbites et la taille du système solaire.

1.2.2. Utiliser un raisonnement similaire pour déterminer la distance Terre-Lune sachant que les masses du Soleil et de la Terre sont respectivement de 2.10^{30} et 6.10^{24} kg.

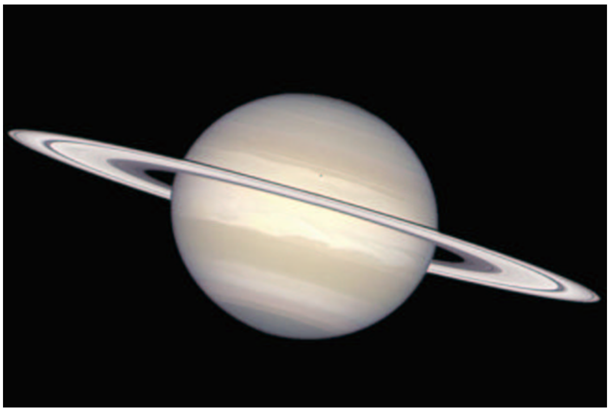

Figure 1.1 : *Une représentation de Saturne (image du 17 août 2003, tirée du site de la NASA Astronomy picture of the day* **http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod***).*

Exercice 2 : Caractéristiques de l'atome d'hydrogène

L'atome d'hydrogène est constitué de deux charges électriques en interaction coulombienne. Il est caractérisé par les masses m_e et m_p de l'électron et du proton, leurs charges $-q$ et q, la constante ε_0 caractéristique de l'interaction électrique (les effets gravitationnels sont négligeables) et la constante de Planck $\hbar$, puisque le traitement doit être quantique. Comme l'énergie est caractérisée par le terme d'interaction $-q^2/4\pi\varepsilon_0 a$, on posera que la taille caractétistique de l'atome, a, est de la forme

$$a = f(q^2, 4\pi\varepsilon_0, m_e, m_p, \hbar). \tag{2.1}$$

2.1. En déduire l'expression

$$a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e q^2} \times \text{ const.} \tag{2.2}$$

du rayon de l'atome d'hydrogène. On justifiera l'absence de m_p dans cette relation en considérant le cas d'un atome au repos. Donner la valeur numérique correspondante.

2.2. Comparer au résultat que l'on obtiendrait en supposant que c'est la gravitation qui est responsable de la cohésion de l'atome (si électron et proton étaient neutres par exemple).

2.3. Donner la forme et la valeur numérique de l'énergie de l'atome.

Exercice 3 : Masse de la galaxie

Par l'observation astronomique, on peut déterminer l'ordre de grandeur de la distance du Soleil au centre de la galaxie, $R_\odot \simeq 30000$ a.l. $\simeq 2.8\ 10^{20}$m (le soleil est situé dans le tiers périphérique de la galaxie) et de la vitesse de récession $v_\odot \simeq 200$ à 300 km.s^{-1} du Soleil autour du centre de la galaxie. Les données relatives à la voie lactée peuvent être considérées caractéristiques de l'ensemble des galaxies.

3.1. En supposant que la galaxie est un objet à l'équilibre gravitationnel obéissant aux lois de la dynamique, on peut exprimer la masse M_g de la galaxie comme une fonction de $R_\odot$, $v_\odot$, $M_\odot$ et G :

$$M_g = f(R_\odot, v_\odot, M_\odot, G). \tag{3.1}$$

3.2. En déduire le nombre approximatif d'étoiles que comporte la voie lactée, moyennant quelques hypothèses simplificatrices à préciser.

Figure 3.1 : *La galaxie spirale M81 (image du 20 juin 2002, tirée du site de la NASA Astronomy picture of the day* **http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod***).*

Exercice 4 : Dommages causés par le vent sur une toiture (facultatif)

On se propose de déterminer l'effet que peut avoir une rafale de vent sur les tuiles d'une toiture mal entretenue. On considère pour cela une tuile mal ajustée (c'est-à-dire simplement posée, mais pas coincée par les tuiles adjacentes), de masse $m = 6$ kg, de surface $S = 5.5 \times 10^{-2}\text{m}^2$. L'effet dominant d'une rafale de vent de vitesse v est simplement de produire une force verticale dirigée vers le haut. Celle-ci dépend de la masse volumique de l'air, $\rho = 1.2$ kg.m^{-3}. En utilisant des arguments dimensionnels, on cherche la vitesse nécessaire pour soulever la tuile.

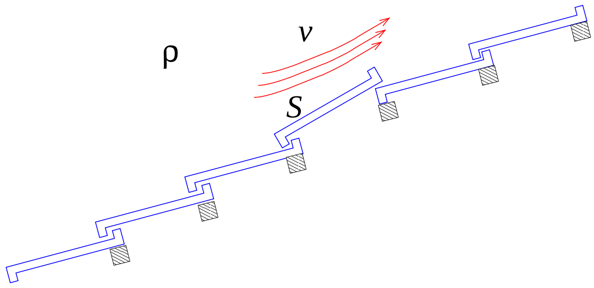

Figure 4.1 : *Schéma d'un toit avec une tuile mal ajustée.*

4.1. Rappeler les dimensions $[F]$ d'une force, puis celles de ρ, v et S.

4.2. On cherche à exprimer la force due au vent par l'expression $F = \text{const} \times \rho^\alpha v^\beta S^\gamma$. Déterminer les exposants α, β et γ.

4.3. En supposant que la constante est égale à 1, exprimer la vitesse du vent v_{min} pour que cette force F compense exactement le poids de la tuile.

4.4. Application numérique : donner la valeur de v_{min} en m.s^{-1} et en km.h^{-1} (on prendra $g = 10$ m.s^{-2}). On pourra remarquer qu'il apparaît dans l'application numérique un terme de la forme $(1000/1.1)^{1/2}$ où $1/1.1 = (1 + 0.1)^{-1} \simeq 1 - 0.1$ au premier ordre.

4.5. Une tuile en terre cuite résiste par exemple au maximum à un vent 100 km.h^{-1}. Une tuile en béton de même surface est à peu près deux fois plus lourde. A quelle vitesse maximale du vent résistera-t-elle ?

Exercice 5 : Distance Terre-Lune

On se propose de déterminer la distance Terre-Lune. On dispose pour cela d'un certain nombre d'informations :

- la période de révolution de la Lune autour de la Terre est de $T_{Lune} = 28$ jours,

- le rayon terrestre est d'environ $R_T = 6400$ km,

- un satellite géostationnaire (c'est-à-dire dont la période de révolution vaut exactement $T_{géost.} = 24$ h) doit être placé à une altitude de $h = 36000$ km.

5.1. Sachant que $GM_T m/r$ est une énergie, déterminer les dimensions de la constante de gravitation universelle G.

5.2. En déduire une expression dimensionnelle entre la distance r d'un corps en orbite autour de la Terre, sa période de révolution T et les constantes G et M_T (masse de la Terre),

$$r = f(G, M_T, T). \tag{5.1}$$

5.3. En comparant les donnés relatives à la Lune et au satellite géostationnaire, en déduire la valeur numérique de la distance Terre-Lune.

Exercice 6 : Température de surface du Soleil et des planètes (facultatif)

On assimile le Soleil à une source thermique de rayon R_S, de température de surface inconnue T_S. On introduit la constante de Stefan, $\sigma = 6.6 \times 10^{-8}$kg.s^{-3}.K^{-4} (le kelvin, K, est l'unité de température), qui mesure l'énergie émise par une source thermique.

6.1. On note P_S la puissance (énergie/temps) émise par la Soleil, $P_S = f(R_S, T_S, \sigma)$. A l'aide des équations aux dimensions, exprimer P_S.

6.2. La Terre reçoit son énergie du rayonnement émis par le Soleil et de ce fait, la température terrestre T_T est essentiellement déterminée par P_S par une relation analogue à celle établie plus haut, $P_S = f(R_T, T_T, \sigma)$, avec $R_T = 150.10^6$km la distance Terre-Soleil.

6.2.1. En déduire que

$$R_S^{1/2} T_S = R_T^{1/2} T_T. \tag{6.1}$$

6.2.2. Evaluer l'ordre de grandeur de la température de surface du Soleil (on donne le rayon solaire $R_S = 700000$ km).

6.3. La planète Mars est située à $R_M = 230.10^6$km du Soleil. Peut-on trouver de l'eau liquide à la surface de Mars ?

TD 2 : Ordres de grandeur (2)

Exercice 1 : Masse de la Terre

L'estimation de la masse de la Terre peut être faite en comparant l'énergie gravitationnelle à l'énergie électrique. La Terre est en effet un objet en équilibre. L'effet de la gravitation, qui tend à effondrer le système, est compensé par la stabilité atomique.

Figure 1.1 : *La planéte Terre (image du 26 avril 2003, tirée du site de la NASA Astronomy picture of the day* **http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod**).

1.1. Montrer que l'énergie gravitationnelle totale de la Terre est de la forme $\mathcal{U}_{\text{grav}} = GM_{\oplus}^2/R_{\oplus}$.

1.2. Il est assez difficile d'estimer l'énergie électrique car la croûte terrestre est solide, mais l'intérieur de la Terre est liquide. On peut toutefois considérer que la stabilité électrique est assurée par l'énergie d'ionisation typique, de l'ordre de l'énergie de l'atome d'hydrogène, $E_{\text{ion.}} = 5$ à 10 eV par atome. Evaluer l'énergie électrique totale pour le volume de la Terre, sachant que la distance entre atomes pour la matière condensée constituant la Terre est de l'ordre de $a = 3$ Å.

1.3. En égalant ces deux contributions, il vient une expression entre rayon et masse :

$$\frac{M_\oplus^2}{R_\oplus^4} = \frac{4}{3}\pi \frac{E_{\text{ion.}}}{Ga^3}. \tag{1.1}$$

Avec $R_\oplus = 6.10^6$m, estimer la masse de la Terre et comparer à la valeur réelle $\simeq 6.10^{24}$kg.

Exercice 2 : Production d'énergie par les animaux (facultatif)

Il est possible d'établir une loi d'échelle entre la masse des animaux et leur production quotidienne de chaleur à partir d'arguments extrêmement simples issus de l'étude de la résistance des matériaux. Si l'on considère une colonne cylindrique de hauteur h et de rayon r, verticale, celle-ci peut se courber sous l'effet d'une contrainte (on parle de flambage), comme par exemple les troncs d'arbres sous l'effet du vent. Tant que la contrainte reste assez faible, on est dans le domaine élastique et la colonne reprend sa forme initiale après suppression de la contrainte. Au-delà d'une contrainte limite en revanche, il y a rupture. On montre en théorie de l'élasticité que pour éviter la rupture sous l'effet du simple poids de la colonne en situation de flambage, il faut que les dimensions de la colonne obéissent à une loi d'échelle $h = \text{const} \times r^{2/3}$ où la constante dépend de la gravité, de la densité de la colonne et de ses caractéristiques élastiques. On peut noter que c'est une constante dimensionnée. Cette relation est remarquablement vérifiée dans la nature, par exemple par la forme des arbres (J. Kane et M. Sternheim, Physique, Masson, Paris 1997, p.203.).

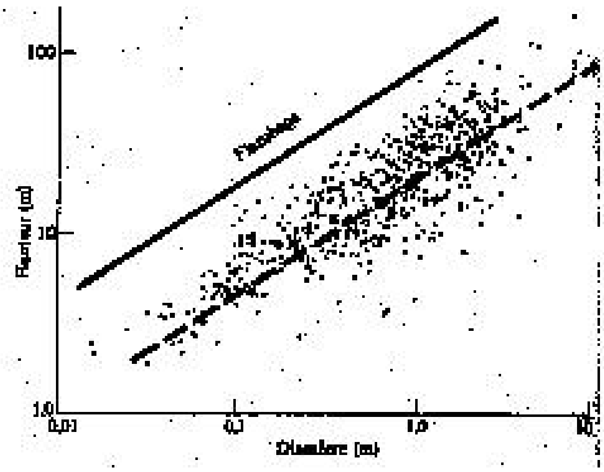

Figure 2.1 : *Loi d'échelle hauteur-diamètre pour des arbres d'Amérique du Nord. Les échelles sont logarithmiques sur les deux axes et la pente est bien de* 2/3.

L'application à la production d'énergie par les animaux repose d'une part sur l'observation dans le cas des mammifères qu'ils sont grossièrement constitués d'éléments cylindriques qui doivent satisfaire la loi $h \sim r^{2/3}$ et d'autre part que la puissance P développée par un muscle de masse m de mammifère est indépendante de l'animal et varie proportionnellement avec sa section S.

2.1. En assimilant un muscle à un cylindre de longueur l et de rayon r, montrer que $P \sim l^3$ et $m \sim l^4$,

2.2. En déduire que la puissance dégagée par un muscle est de la forme $P \sim (l^4)^{3/4} \sim m^{3/4}$.

2.3. Commenter la figure suivante.

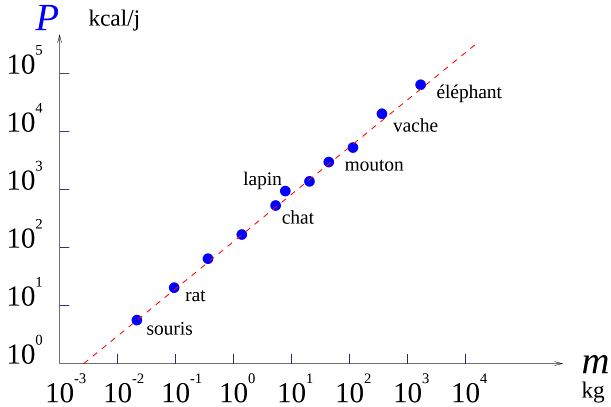

Figure 2.2 : *Loi d'échelle production journalière de chaleur-masse pour les vertébrés à sang chaud (mammifères, oiseaux). Les échelles sont logarithmiques sur les deux axes et la pente vaut* $3/4$*.*

Exercice 3 : Corde de violon

Exprimer la fréquence que peut émettre en vibration une cordre de violon de longueur l, soumis à une force de tension F et de masse par unité de longueur ρ_l. A.N. : $l = 40$ cm, diamètre $d = 1$ mm, densité $\rho = 7.86 \times 10^3 \text{kg.m}^{-3}$ $F = 762$ N.