Équation de Laplace

Licence de Physique

Université Henri Poincaré

Christophe Chatelain, 2007

1. Équation de Laplace

1.1. Résolution de l'équation de Laplace

Dans le vide, i.e. en l'absence de charges, l'équation de Poisson se réduit à l'**équation de Laplace**

$$\Delta\varphi = 0$$

1.1.1. Solutions générales de l'équation de Laplace

1.1.1.1. Théorème d'unicité des solutions de l'équation de Poisson

Supposons qu'on connaisse le potentiel φ sur une surface S fermée délimitant un volume V ne contenant pas de charges. Si dans le volume V, on trouve une solution de l'**équation de Laplace** qui satisfasse aux conditions aux limites sur S alors cette solution est l'unique solution du problème.

En effet, en utilisant l'équation de Laplace et le théorème de Stockes, on a

$$\int_S \varphi\vec{\nabla}\varphi.d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\left(\varphi\vec{\nabla}\varphi\right)d^3\vec{r} = \int_V \left(\varphi\Delta\varphi + \left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2\right)d^3\vec{r} = \int_V \left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 d^3\vec{r}$$

Supposons qu'on ait trouvé deux potentiels φ_1 et φ_2 satisfaisant aux conditions aux limites sur S. On doit donc avoir quelque soient les conditions aux limites

$$\int_S (\varphi_1 - \varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)d\vec{S} = \int_V \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)\right)^2 d^3\vec{r}$$

Or φ_1 et φ_2 satisfont les mêmes conditions aux limites donc $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ en tout point de la surface S. Il en découle que $\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0$ en tout point du volume délimité par la surface S, i.e. les potentiels sont égaux à une constante près.

1.1.1.2. Solution de l'équation de Laplace en coordonnées polaires

En coordonnées polaires, l'**équation de Laplace** s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0$$

La séparation des variables

$$\varphi(r,\theta) = \varphi_r(r)\varphi_\theta(\theta)$$

conduit aux deux équations différentielles

$$\frac{r}{\varphi_r(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)=-\frac{1}{\varphi_\theta(\theta)}\frac{d^2\varphi_\theta(\theta)}{d\theta^2}=k^2$$

où le choix de signe de la constante est nécessaire pour que que la transformation $\theta\to\theta+2\pi$ ne change pas la solution. Les conditions aux limites imposent généralement la quantification de la constante k. Les solutions de l'équation de Laplace sont

$$\begin{cases}\varphi_r(r)=Cr^k+Dr^{-k}\\ \varphi_\theta(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta\end{cases}$$

si $k\neq 0$ et

$$\begin{cases}\varphi_r(r)=G+H\ln r\\ \varphi_\theta(\theta)=E+F\theta\end{cases}$$

si $k=0$ de sorte que la solution générale est

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos k_n\theta+B_n\sin k_n\theta\right)&\left(C_nr^{k_n}+D_nr^{-k_n}\right)\\ &\times\left(E+F\theta\right)\left(G+H\ln r\right)\end{aligned}\tag{2}$$

1.1.1.3. Solution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, l'**équation de Laplace** s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0$$

La séparation des variables

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\varphi_r(r)\varphi_{\text{ang}}(\theta,\phi)$$

conduit aux trois équations différentielles

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d\varphi_r(r)}{dr}\right)-l(l+1)\varphi_r(r)=0\\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial\varphi_{\text{ang}}}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2\varphi_{\text{ang}}}{\partial\phi^2}+l(l+1)\varphi_{\text{ang}}(\theta,\phi)=0\end{cases}\tag{3}$$

La forme $l(l+1)$ avec l entier positif ou nul du paramètre de séparation est nécessaire pour que l'équation de Laplace ait des solutions régulières pour $\theta=0$ et $\theta=\pi$. La solution générale de la première des équations (3) est

$$\varphi_r(r)=Ar^l+Br^{-l-1}$$

Les variables de la seconde des équations différentielles (3) sont séparables sous la forme

$$\varphi_{\text{ang}}(\theta,\phi)=\varphi_\theta(\theta)\varphi_\phi(\phi)$$

ce qui conduit à

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_\phi}{d\phi^2} = -m^2\varphi_\phi \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\varphi_\theta}{d\theta}\right) + \left(l(l+1) - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\varphi_\theta = 0 \\ \Leftrightarrow\ \dfrac{d}{du}\left((1-u^2)\dfrac{d\varphi_\theta}{du}\right) + \left(l(l+1) - \dfrac{m^2}{1-u^2}\right)\varphi_\theta = 0 \end{cases}$$

où on a posé $u = \cos\theta$. La première des équations différentielles admet pour solution

$$\varphi_\phi(\phi) = Ee^{im\phi} + Fe^{-im\phi}$$

où m est un entier. Les solutions de la dernière des équations différentielles sont d'après (38) les **polynômes de Legendre associés** $P_l^m(\cos\theta)$. Les solutions de l'**équation de Laplace** sont donc

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_l \sum_{m=-l}^{l} C_{lm}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{4}$$

en coordonnées sphériques. L'absence de divergence impose que $B_l = 0$ si l'origine appartient au domaine et $A_l = 0$ si l'infini en fait partie.

1.1.1.4. Solution de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, l'**équation de Laplace** s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{5}$$

La séparation des variables

$$\varphi(r,\theta,z) = \varphi_r(r)\varphi_\theta(\theta)\varphi_z(z)$$

conduit aux deux équations différentielles

$$\begin{cases} r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d\varphi_r}{dr}\right) + \left(k^2r^2 - n^2\right) = 0 \\ \dfrac{d^2\varphi_\theta}{d\theta^2} + n^2\varphi_\theta = 0 \\ \dfrac{d^2\varphi_z}{dz^2} - k^2\varphi_z = 0 \end{cases}$$

Si les constantes n et k sont réélles, les solutions linéairement indépendantes sont les **fonctions de Bessel** $J_n(kr)$ et $N_n(kr)$. Les solutions de l'équation de Laplace sont alors

$$\begin{cases} \varphi_r(r) = A_nJ_n(kr) + B_nN_n(kr), \quad (k \neq 0) \\ \varphi_r(r) = Ar^n + Br^{-n}, \quad (k = 0) \\ \varphi_\theta(\theta) = C_n\cos n\theta + D_n\sin n\theta, \quad (n \neq 0) \\ \varphi_\theta(\theta) = C\theta + D, \quad (n = 0) \\ \varphi_z(z) = E_ke^{kz} + F_ke^{-kz}, \quad (k \neq 0) \\ \varphi_z(z) = Ez + F, \quad (k = 0) \end{cases}$$

Si $n = k = 0$ alors le potentiel se réduit à

$$\varphi(r,\theta,z) = (A\ln r + B)\,(C\theta + D)\,(Ez + F)$$

Si, pour des raisons physiques, la solution doit être périodique sur l'axe Oz, $k = i\kappa$ doit être complexe et l'équation de Bessel modifiée

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi_r}{dr}\right) - \left(\kappa^2 r^2 + n^2\right) = 0$$

admet pour solutions les fonctions de Bessel modifiées $I_n(\kappa r)$ et $K_n(\kappa r)$.

1.1.2. Applications à des situations physiques

1.1.2.1. Potentiel et champ dans un condensateur diédrique

On considère deux plans infinis formant entre eux un angle α et maintenus à des potentiels φ_1 et φ_2 respectivement. On choisit l'axe (Oz) sur l'intersection des deux plans et on utilise le système de coordonnées cylindriques. A l'intérieur du condensateur, le potentiel est solution de l'**équation de Laplace** (5). Les deux plans étant inifinis, le système est invariant par translation dans la direction (Oz) donc le potentiel ne dépend pas de la coordonnée z. Le système est également invariant par changement d'échelle $r \to br$ de sorte que le potentiel ne dépend pas de r. L'équation de Laplace (5) se réduit alors à

$$\frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi(\theta) = a\theta + b$$

En imposant les conditions aux limites $\varphi(0) = \varphi_1$ et $\varphi(\alpha) = \varphi_2$, on obtient finalement

$$\varphi(\theta) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\alpha}\theta + \varphi_1$$

Le champ électrique est obtenu par dérivation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi = -\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\theta}\vec{u}_\theta = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\alpha}\frac{\vec{u}_\theta}{r}$$

1.1.2.2. Potentiel dans un condensateur en forme de U

On considère un condensateur en forme de U dans la direction (Ox), i.e. deux plans semi-infinis $y = 0$ et $y = L$ raccordés en $x = 0$ par une plaque. La surface située en $x = 0$ est maintenue à un potentiel φ_0 et les surfaces semi-infinies en $y = 0$ et $y = L$ à un potentiel nul. A l'intérieur du condensateur, le potentiel satisfait l'**équation de Laplace** :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

L'invariance du dispositif sous une translation d'axe (Oz) impose que le potentiel ne dépend pas de z. Par séparation des variables, i.e. en posant $\varphi(x,y) = \varphi_x(x)\varphi_y(y)$, l'équation de Laplace se réduit à

$$\frac{1}{\varphi_x}\frac{d^2\varphi_x}{dx^2} - \frac{1}{\varphi_y}\frac{d^2\varphi_y}{dy^2} = \alpha = \mathrm{Cste} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi_x}\dfrac{d^2\varphi_x}{dx^2} = \alpha \\[2ex] \dfrac{1}{\varphi_y}\dfrac{d^2\varphi_y}{dy^2} = -\alpha \end{cases}$$

Les deux équations différentielles (du second ordre à coefficients constants) admettent pour solution générale

$$\varphi_x(x) = A_\alpha e^{\sqrt{\alpha}x} + B_\alpha e^{-\sqrt{\alpha}x}, \qquad \varphi_y(y) = C_\alpha e^{\sqrt{-\alpha}y} + D_\alpha e^{-\sqrt{-\alpha}y}$$

Notons que le signe de *alpha* n'étant pas connu *a-priori*, les solutions sont des fonctions trigonométriques ou hyperboliques. La solution générale de l'équation de Laplace est finalement

$$\varphi(x,y) = \int \left[A_\alpha e^{\sqrt{\alpha}x} + B_\alpha e^{-\sqrt{\alpha}x}\right] \left[C_\alpha e^{\sqrt{-\alpha}y} + D_\alpha e^{-\sqrt{-\alpha}y}\right] d\alpha$$

En imposant la contrainte $\varphi(x, y=0, z) = 0$ quelque soit $x \geq 0$, il vient

$$\varphi(x,0) = \int \left[A_\alpha e^{\sqrt{\alpha}x} + B_\alpha e^{-\sqrt{\alpha}x}\right] [C_\alpha + D_\alpha]\, d\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; C_\alpha + D_\alpha = 0$$

Par conséquent, l'expression du potentiel fait intervenir uniquement des fonctions $\sin\sqrt{\alpha}y$ si $\alpha > 0$ et $\sinh\sqrt{\alpha}y$ si $\alpha < 0$. En imposant à présent la contrainte $\varphi(x, y=L, z) = 0$ quelque soit $x \geq 0$, on arrive à la contrainte

$$\varphi(x,L) = 0 = \int \left[A_\alpha e^{\sqrt{\alpha}x} + B_\alpha e^{-\sqrt{\alpha}x}\right] \times \begin{cases} 2iC_\alpha \sin\sqrt{\alpha}L, & (\alpha > 0) \\ 2C_\alpha \sinh\sqrt{\alpha}L, & (\alpha < 0) \end{cases}$$

Il n'existe pas de solution non-triviale, i.e. $\alpha \neq 0$ ($\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = 0$), à la seconde équation car $\sinh\theta$ ne s'annule que lorsque $\theta = 0$. En revanche, la première admet pour solutions

$$\sin\sqrt{\alpha}L = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\alpha} = \frac{n\pi}{L}$$

où $n \in \mathbb{Z}^*$ (en effet les solutions $n < 0$ ne sont pas indépendantes car $\sin\left(\frac{-n\pi}{L}y\right) = -\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$ et ce changement de signe peut être absorbé dans la constante. On arrive à la forme générale

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2iC_n \left[A_n e^{\frac{n\pi}{L}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{L}x}\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

On doit nécessairement avoir $A_n = 0$ car le potentiel ne peut diverger à l'infini, i.e. infiniment loin de la plaque au potentiel φ_0. Il reste alors

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n e^{-\frac{n\pi}{L}x} \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

où on a posé $E_n = 2iC_nB_n$. Il reste à imposer la contrainte $\varphi(x=0, y) = \varphi_0$. En notant que

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L}y\right) dy = \frac{L}{2}\delta_{n,p}$$

on multiplie les deux membres de la contrainte par sin $\left(\frac{p\pi}{L}y\right)$ et on intégre sur y entre 0 et L :

$$\begin{aligned}
\varphi(x=0,y)=\varphi_0 \;\Leftrightarrow\; & \varphi_0\int_0^L \sin\left(\frac{p\pi}{L}y\right)dy = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{L}y\right)dy \\
\Leftrightarrow\; & \varphi_0\left[-\frac{L}{p\pi}\cos\left(\frac{p\pi}{L}y\right)\right]_0^L = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n\frac{L}{2}\delta_{n,p} \\
\Leftrightarrow\; & -\frac{L\varphi_0}{p\pi}\left((-1)^p-1\right) = \frac{L}{2}E_p
\end{aligned}$$

On arrive à la conclusion que $E_n = \frac{4\varphi_0}{n\pi}$ si n est impair et zéro dans le cas contraire. Il reste finalement

$$\varphi(x,y) = \frac{4\varphi_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,7,\dots}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{L}x}\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

1.1.2.3. Ligne chargée entre deux plans infinis à un potentiel nul

On considère deux plans infinis $y=0$ et $y=a$ maintenus à un potentiel électrique nul. Entre ces deux plans, on place un fil infini dans la direction Oz passant par le point $x=0$ et $y=d$ et portant une densité linéique de charge λ. La distribution de charge est invariante par translation suivant l'axe Oz donc le potentiel électrique ne dépend pas de la coordonnée z.

1.1.2.3.1. Potentiel électrique créé par une ligne chargée

L'**équation de Laplace** s'écrit en coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}=0$$

En introduisant la séparation des variables

$$\varphi(x,y)=\varphi_x(x)\varphi_y(y)$$

l'équation de Laplace se réduit à

$$\frac{1}{\varphi_x(x)}\frac{d^2\varphi_x}{dx^2} = -\frac{1}{\varphi_y(y)}\frac{d^2\varphi_y}{dy^2} = k^2$$

Le choix de signe de la constante est purement arbitraire. On peut montrer que le choix $-k^2$ conduit à la même solution. Les solutions de ces deux équations sont

$$\begin{cases}\varphi_x(x) = Ce^{kx}+De^{-kx}\\ \varphi_y(y) = A\sin ky + B\cos ky\end{cases}$$

Le potentiel s'annule sur les plans $y=0$ et $y=a$ ce qui impose d'une part que $B=0$ et de l'autre la quantification de la constante k : $k=n\frac{\pi}{a}$. De plus, on choisit par convention d'annuler le potentiel à $x \to \pm\infty$ ce qui impose $D = 0$ si $x < 0$ et $C = 0$ si $x > 0$. La solution générale de l'équation de Laplace est par conséquent

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{n\frac{\pi}{a}x} \sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right), & (x < 0) \\ \varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n e^{-n\frac{\pi}{a}x} \sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right), & (x > 0) \end{cases}$$

La continuité du potentiel sur le plan $x = 0$ impose $c_n = d_n$, $\forall n$ car les fonctions sinus forment une famille de fonctions orthogonales. La composante normale du champ électrique est discontinue quand on traverse le plan $x = 0$ qui contient la ligne chargée.

$$\begin{aligned} & E_x(x \to 0+, y) = E_x(x \to 0-, y) + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\delta(y-d) \\ \Leftrightarrow \quad & -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)(x \to 0+, y) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)(x \to 0-, y) + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\delta(y-d) \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{\pi}{a}c_n \sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{\pi}{a}c_n \sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right) + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\delta(y-d) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{2\pi}{a}\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n \sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\delta(y-d) \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par $\sin\left(n'\frac{\pi}{a}y\right)$ et en intégrant sur $[0;a]$, il vient pour le membre de gauche

$$\frac{2\pi}{a}\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n \int_0^a \sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right)\sin\left(n'\frac{\pi}{a}y\right)dy = \frac{2\pi}{a}\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n\frac{a}{2}\delta_{n,n'} = n'\pi c_{n'}$$

et pour le membre de droite

$$\frac{\lambda}{\varepsilon_0}\int_0^a \delta(y-d)\sin\left(n'\frac{\pi}{a}y\right)dy = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\sin\left(n'\frac{\pi}{a}d\right)$$

de sorte qu'il reste

$$c_n = \frac{\lambda}{n\pi\varepsilon_0}\sin\left(n\frac{\pi}{a}d\right)$$

La solution du problème est par conséquent

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{a}d\right)e^{n\frac{\pi}{a}x}\sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right), & (x < 0) \\ \varphi(x,y) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{a}d\right)e^{-n\frac{\pi}{a}x}\sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right), & (x < 0) \end{cases}$$

Le théorème d'unicité montre que cette solution est unique.

1.1.2.3.2. Champ électrique créé par une ligne chargée

Le champ électrique est obtenue par dérivation du potentiel :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -\dfrac{\lambda}{a\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{a}d\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right)e^{n\frac{\pi}{a}x} \\ -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\lambda}{a\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{a}d\right)\cos\left(n\frac{\pi}{a}y\right)e^{n\frac{\pi}{a}x} \\ -\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \end{pmatrix}, \quad (x < 0)$$

L'expression pour $x > 0$ différe seulement par un signe $-$ devant la composante E_x et dans les exponentielles.

1.2. Polarisation de la matière

1.2.1. Théorie de Maxwell dans les milieux polarisables

1.2.1.1. Description microscopique de la polarisation

Un matériau possédant un moment dipolaire spontané ou induit est dit **diélectrique.** $\blacksquare$
Au champ électrique appliqué $\vec{E}_{\text{ex.}}$ s'ajoute le champ généré $\vec{E}_{\text{pol.}}$ par le moment dipolaire macroscopique de la matière :

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{ex.}} + \vec{E}_{\text{pol.}} \tag{6}$$

On définit le moment dipolaire total $\vec{P}$ d'une assemblée de dipôles $\{\vec{p}_i\}$ par un processus de moyenne spatiale sur de petites régions de l'espace (*coarse-graining*) :

$$\vec{P}(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}' \left[\sum_i \vec{p}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)\right] f(\vec{r} - \vec{r}')$$

où $f(\vec{u})$ une fonction maximale en 0 et qui décroît rapidement vers 0 lorsqu'on s'éloigne de l'origine. La polarisation ainsi définie est continue. De la manière, toutes les grandeurs $(\vec{E}, \varphi, \ldots)$ dont il sera question dans la suite sont le résultat de ce processus de moyenne.

1.2.1.2. Charges de polarisation

A grande distance, le potentiel créé par un dipoôle est

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}.\vec{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{7}$$

Par conséquent, le potentiel créé par un diélectrique de moment dipolaire $\vec{P}(\vec{r})$ est

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{pol.}}(\vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{||\vec{r} - \vec{r}'||}\right)\vec{P}(\vec{r})d^3\vec{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \text{div}\left(\frac{\vec{P}(\vec{r})}{||\vec{r} - \vec{r}'||}\right)d^3\vec{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\text{div}\,\vec{P}(\vec{r})}{||\vec{r} - \vec{r}'||}d^3\vec{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\partial V} \frac{\vec{P}(\vec{r}).d\vec{S}}{||\vec{r} - \vec{r}'||} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\text{div}\,\vec{P}(\vec{r})}{||\vec{r} - \vec{r}'||}d^3\vec{r} \end{aligned}$$

où on a utilisé (25) et le théorème de Stockes. Le potentiel créé par le moment dipolaire macroscopique $\vec{P}$ est donc équivalent à la distribution de charges de densité surfacique et volumique

$$\sigma_{\text{pol.}} = \vec{P}.\vec{n}, \qquad \rho_{\text{pol.}} = -\operatorname{div}\vec{P} \tag{9}$$

Pour un diélectrique fini dont les surfaces sont chargées, le champ électrique total est finalement dans la limite électrostatique

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\int_V \frac{\rho_{\text{ex.}}(\vec{r}') + \rho_{\text{pol.}}(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0||\vec{r}-\vec{r}'||}d^3\vec{r}' + \int_{\partial V}\frac{\sigma_{\text{ex.}}+\sigma_{\text{pol.}}}{4\pi\varepsilon_0||\vec{r}-\vec{r}'||}dS\right) \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\int \frac{\rho_{\text{ex.}}(\vec{r}') - \operatorname{div}\vec{P}(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0||\vec{r}-\vec{r}'||}d^3\vec{r}' + \int_{\partial V}\frac{\sigma_{\text{ex.}}+\vec{P}.\vec{n}}{4\pi\varepsilon_0||\vec{r}-\vec{r}'||}dS\right)\end{aligned}$$

1.2.1.3. Équations de Maxwell dans les diélectriques

En utilisant (6) et (9), l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit dans un diélectrique

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho_{\text{tot.}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{\text{ex.}}}{\varepsilon_0} - \frac{\operatorname{div}\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

On introduit le vecteur induction électrique

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

de sorte qu'on peut préserver la forme de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div}\vec{D} = \varepsilon_0\operatorname{div}\vec{E} + \operatorname{div}\vec{P} = \rho_{\text{tot.}} - \rho_{\text{pol.}} = \rho_{\text{ex.}} \tag{13}$$

De manière analogue aux conditions de passage du champ électrique, on a donc une discontinuité de la composante normale de l'induction électrique proportionnelle à la densité de charge excitatrice lors de la traversée d'une surface :

$$D_1^n - D_2^n = \sigma_{\text{ex.}} \tag{14}$$

Le mouvement des charges de polarisation engendre un courant de densité $j_{\text{pol.}}$ satisfaisant la loi de conservation

$$\operatorname{div}\vec{j}_{\text{pol.}} + \frac{\partial\rho_{\text{pol.}}}{\partial t} = 0$$

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} &= \mu_0\vec{j}_{\text{tot.}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0\vec{j}_{\text{ex.}} + \mu_0\vec{j}_{\text{pol.}} + \mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}-\vec{P}) \qquad (15) \\ &= \mu_0\vec{j}_{\text{ex.}} + \mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Les deux autres équations de Maxwell découlant de la définition des potentiels, elles ne sont pas modifiées dans un diélectrique. Par conséquent, comme pour le champ électrique, les composantes tangentielles de l'induction électrique sont continues lors de la traversée d'une surface chargée si le champ magnétique ne présente pas de divergence à la surface. En combinant cette proposition avec (14), il vient

$$\vec{D}_2 = \vec{D}_1 + \sigma_{\text{ex.}}\vec{n}$$

1.2.1.4. Diélectriques linéaires

Dans le cas particulier d'une polarisation linéaire avec les composantes du champ électrique, on pose

$$D_\mu = \varepsilon_0 \sum_{\nu=1}^{3} \varepsilon_{r\mu\nu} E_\nu = \varepsilon_0 \sum_{\nu=1}^{3} \left(\delta_{\mu,\nu} + \chi_{\mu\nu}\right) E_\nu$$

où ε_r est la permittivité relative du milieu diélectrique et χ sa susceptibilité. Si le diélectrique est isotrope, ces tenseurs sont proportionnels à l'identité et on peut écrire

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\chi)\vec{E}$$

Dans le cas d'un diélélectrique isotrope, l'équation de Maxwell-Gauss (13) s'écrit

$$\rho_{\text{ex.}} = \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}\left(\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}\right) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \operatorname{div} \vec{E} + \varepsilon_0 \overrightarrow{\text{grad}}\, \varepsilon_r . \vec{E}$$

et se réduit dans le cas d'un milieu homogène

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{ex.}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\rho_{\text{tot.}}}{\varepsilon_0}$$

Il en découle l'équation de Poisson

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_{\text{ex.}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

L'équation de Maxwell-Ampère (15) prend pour expression

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{ex.}} + \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

1.2.2. Exemples de calculs dans les milieux diélectriques

1.2.2.1. Polarisation d'un cylindre diélectrique par une ligne chargée

On considère un cylindre de constante diélectrique ε_r, de rayon R et d'axe de révolution confondu avec Oz et une ligne de densité linéique de charge λ parallèle à Oz. La distribution de charge est invariante par translation suivant Oz donc le potentiel électrique ne dépend pas de la coordonnée z.

1.2.2.1.1. Potentiel électrique créé par la ligne chargée

Le potentiel électrique créé par une ligne chargée passant par l'origine est (voir les cours de deuxième année)

$$\varphi(r,\theta) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r$$

Dans le cas d'une ligne passant par le point $\vec{r}_0$, la distance séparant le point $\vec{r}$ du fil est

$$R = ||\vec{r} - \vec{r}_0|| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2\vec{r}\vec{r}_0} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\theta}$$

et donc dans le cas $r < r_0$

$$\begin{aligned}
\ln R &= \ln \left[r_0 \left(1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 2\frac{r}{r_0}\cos\theta \right)^{1/2} \right] \\
&= \ln r_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 2\frac{r}{r_0}\cos\theta \right)^n \\
&= \ln r_0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\theta
\end{aligned}$$

Un développement analogue peut être fait dans le cas $r > r_0$ en factorisant r. Il vient le potentiel électrique créé par le fil chargé

$$\varphi(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\theta - \ln r_0\right], & (r < r_0) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos n\theta - \ln r\right], & (r > r_0) \end{cases} \tag{23}$$

1.2.2.1.2. Potentiel total

On ajoute au potentiel créé par le fil (23) la solution générale de l'**équation de Laplace** (2) en coordonnées polaires correspondant au potentiel créé par le cylindre. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(r,\theta) = &\sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos k_n\theta + B_n \sin k_n\theta\right)\left(C_n r^{k_n} + D_n r^{-k_n}\right) \\
&+ (E + F\theta)(G + H\ln r) \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\theta - \ln r_0\right], & (r < r_0) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos n\theta - \ln r\right], & (r > r_0) \end{cases}
\end{aligned}$$

La transformation $\theta \to \theta + 2\pi$ doit laisser le potentiel invariant. k_n doit donc être un entier et $F = 0$. Dans le diélectrique, le potentiel ne peut pas diverger donc $D_n = 0$ alors qu'à l'extérieur, l'absence de divergence du potentiel impose $C_n = 0$. De plus, la distribution de charge est invariante par la transformation $\theta \to -\theta$ donc $B_n = 0$ pour tout n. Enfin, le potentiel est fini dans la limite $r \to +\infty$ donc $H = 0$. Il reste donc

$$\varphi(r,\theta) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\theta - \ln r_0 + \sum_n A_n r^n \cos n\theta + E, & (r < R) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\theta - \ln r_0 + \sum_n B_n r^{-n} \cos n\theta + F, & (R < r < r_0) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos n\theta - \ln r + \sum_n B_n r^{-n} \cos n\theta + F, & (r > r_0) \end{cases}$$

La continuité du potentiel et de la composante normale de l'induction $\vec{D}$ sur le plan $r = R$ impose

$$\begin{cases} \varphi(r \to R-, \theta) = \varphi(r \to R+, \theta) \\ \varepsilon_r \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r \to R-} = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r \to R+} \end{cases}$$

On peut alors montrer qu'on a

$$\varphi(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\theta - \ln r_0 - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0 \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^n + \left(\frac{2}{\varepsilon_r} - 1\right)\left(\frac{R^2}{r_0}\right)^n r^{-n}\right] \cos n\theta - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (R < r < r_0) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^n + \left(\frac{2}{\varepsilon_r} - 1\right)\left(\frac{R^2}{r_0}\right)^n r^{-n}\right] \cos n\theta - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r, \ (r > r_0) \end{cases}$$

A l'extérieur du cylindre, le potentiel est le même que celui créé par un fil infini passant par O et de densité linéique de charge $\lambda\left(\frac{2}{\varepsilon_r} - 1\right)$.

1.2.2.2. Polarisation d'une sphère diélectrique par une charge ponctuelle

On considère une sphère de centre O, de rayon R et de constante diélectrique ε_r et une charge ponctuelle de charge q situé au point $\vec{r_0} = r_0\vec{u}_z$. La distribution de charge est invariante par rotation d'axe Oz donc le potentiel ne dépend pas de ϕ.

Le potentiel créé par la charge électrique s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi(r,\theta) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0||\vec{r} - \vec{r_0}||} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}} \\ &= \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \displaystyle\sum_l \left(\frac{r}{r_0}\right)^l P_l(\cos\theta), & (r < r_0) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \displaystyle\sum_l \left(\frac{r_0}{r}\right)^l P_l(\cos\theta), & (r > r_0) \end{cases} \end{aligned}$$

où apparaît la fonction génératrice (30) des polynômes de Legendre. On peut aussi obtenir cette expression à partir des solutions (4) de l'**équation de Laplace** en coordonnées sphériques. L'indépendance du potentiel avec ϕ imposé par la symétrie conduit à $C_{lm} = 0$ pour tout $m \neq 0$. Pour identifier les constantes $C_{l0}A_l$ et $C_{l0}B_l$, on se place en $\theta = 0$ de sorte que $||\vec{r} - \vec{r_0}|| = |r - r_0|$. On doit alors distinguer le cas $r < r_0$ et $r > r_0$.

Le potentiel créé par la sphère diélectrique satisfait également l'**équation de Laplace** qui admet (4) pour solution en coordonnées sphériques. L'invariance sous la rotation d'angle ϕ impose que le potentiel ne dépende pas de φ et donc que $C_{lm} = 0$ pour tout $m \neq 0$. Rappelons que $P_l^m(x) = P_l(x)$ (§ *1.3.2.2.*). La polarisation de la sphère provoque une accumulation de charges de polarisation à sa surface de sorte que la composante normale du champ électrique, et donc la dérivée du potentiel, y sont discontinues. On doit donc distinguer les régimes $r < R$ et $r > R$. Il reste

$$\varphi(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} E_l r^l P_l(\cos\theta), & (r < R) \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} F_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) & (R < r) \end{cases}$$

où on a posé $E_l = C_{l0}A_l$ et $F_l = C_{l0}B_l$. La continuité du potentiel en $r = R$ impose

$$\sum_l E_l R^l P_l(\cos\theta) = \sum_l F_l R^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$$

En multipliant les deux membres par $P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$ et en intégrant θ de 0 à 2π, les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Legendre (28) conduisent à

$$E_l R^l = F_l R^{-(l+1)} \;\Leftrightarrow\; F_l = E_l R^{2l+1}$$

Le potentiel total est de la forme

$$\varphi(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\sum_l \left(\frac{r}{r_0}\right)^l P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{+\infty} E_l r^l P_l(\cos\theta), & (r < R) \\ \displaystyle\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\sum_l \left(\frac{r}{r_0}\right)^l P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{+\infty} E_l R^{2l+1} r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta), & (R < r < r_0) \\ \displaystyle\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_l \left(\frac{r_0}{r}\right)^l P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{+\infty} E_l R^{2l+1} r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta), & (r > r_0) \end{cases}$$

La continuité des composantes normales de l'induction $\vec{D}$ à la surface de la sphère $r = R$ impose

$$\begin{aligned} \lim_{r\to R^-} \vec{D}.\vec{n} = \lim_{r\to R^+} \vec{D}.\vec{n} \Leftrightarrow \quad & \lim_{r\to R^-} \varepsilon_0\varepsilon_r \vec{E}.\vec{n} = \lim_{r\to R^+} \varepsilon_0 \vec{E}.\vec{n} \\ \Leftrightarrow \quad & \lim_{r\to R^-} -\varepsilon_0\varepsilon_r \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V.\vec{n} = \lim_{r\to R^+} -\varepsilon_0 \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V.\vec{n} \\ \Leftrightarrow \quad & \lim_{r\to R^-} \varepsilon_r \frac{\partial V}{\partial r} = \lim_{r\to R^+} \frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned} \tag{24}$$

puisque le vecteur normal à la surface est $\vec{n} = \vec{u}_r$. On a donc

$$\varepsilon_r \sum_l \left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} l \frac{R^{l-1}}{r_0^{l+1}} + lE_l R^{l-1}\right] P_l(\cos\theta) = \sum_l \left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} l \frac{R^{l-1}}{r_0^{l+1}} - (l+1)E_l R^{l-1}\right] P_l(\cos\theta)$$

Comme dans le cas de la continuité du potentiel, on multiplie les deux membres par $P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$ puis on intégre θ de 0 à 2π. Il reste alors

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_r\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}l\frac{R^{l-1}}{r_0^{l+1}}+lE_lR^{l-1}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}l\frac{R^{l-1}}{r_0^{l+1}}-(l+1)E_lR^{l-1} \\
\Leftrightarrow \quad & (\varepsilon_r l+l+1)\,E_lR^{l-1}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}l(1-\varepsilon_r)\frac{R^{l-1}}{r_0^{l+1}} \\
\Leftrightarrow \quad & E_l=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^{l+1}}l\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r l+l+1}
\end{aligned}$$

Le potentiel total est donc finalement

$$\varphi(r,\theta)=\begin{cases}
\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{2l+1}{\varepsilon_r l+l+1}\left(\frac{r}{r_0}\right)^l P_l(\cos\theta), & (r<R) \\[2ex]
\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\displaystyle\sum_l\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^l-l\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r l+l+1}\frac{R^{2l+1}}{r_0^l r^{l+1}}\right]P_l(\cos\theta), & (R<r<r_0) \\[2ex]
\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\displaystyle\sum_l\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^l-l\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r l+l+1}\frac{R^{2l+1}}{r_0^{l+1}r^l}\right]P_l(\cos\theta), & (r>r_0)
\end{cases}$$

Dans la limite $r\to+\infty$, le premier terme redonne le potentiel créé par une charge ponctuelle et le second est dominé par la contribution du terme $l=1$ (le terme $l=0$ est nul),

$$\varphi(r,\theta)\underset{r\to+\infty}{\simeq}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0||\vec{r}-\vec{r}_0||}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}\frac{R^3}{r_0^2 r}\cos\theta$$

La sphère se comporte donc à grande distance comme un dipôle (7) de moment dipolaire

$$p=-q\left(\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}\right)\frac{R^3}{r_0^2}$$

La limite $\varepsilon_r\to+\infty$ correspond au cas d'une sphère métallique. Le potentiel se réduit alors à

$$\varphi(r,\theta)=\begin{cases}
\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}, & (r<R) \\[2ex]
\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\displaystyle\sum_l\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^l-\frac{R^{2l+1}}{r_0^l r^{l+1}}\right]P_l(\cos\theta), & (R<r<r_0) \\[2ex]
\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\displaystyle\sum_l\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^l-\frac{R^{2l+1}}{r_0^{l+1}r^l}\right]P_l(\cos\theta), & (r>r_0)
\end{cases}$$

Hors de la sphère, on a donc

$$\varphi(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_l\left(\frac{r_0}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)-\frac{qR/r_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_l\left(\frac{R^2}{r_0 r}\right)P_l(\cos\theta)$$

On voit donc apparaître dans le second terme le potentiel créé par les charges de polarisation à la surface de la sphère et équivalent à une charge image $-qR/r_0$ située en $R^2/r_0\vec{u}_z$.

1.2.2.3. Sphère diélectrique plongé dans un champ uniforme

On considère une sphère de centre O, de rayon R et de constante diélectrique ε_r plongé dans un champ électrique uniforme $\vec{E}_{\text{ex.}} = E_{\text{ex.}}\vec{u}_z$. La distribution de charge est invariante par rotation d'axe Oz donc le potentiel ne dépend pas de ϕ. Le potentiel créé par le champ électrique s'écrit

$$\vec{E}_{\text{ex.}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi = E_{\text{ex.}}\vec{u}_z \ \Leftrightarrow\ \varphi(r,\theta) = -E_{\text{ex.}}z = -E_{\text{ex.}}r\cos\theta$$

Le potentiel créé par la sphère diélectrique satisfait également l'**équation de Laplace** qui admet (4) pour solution en coordonnées sphériques. L'invariance sous la rotation d'angle ϕ impose que le potentiel ne dépende pas de φ et donc que $C_{lm} = 0$ pour tout $m \neq 0$. Rappelons que $P_l^m(x) = P_l(x)$ (§ *1.3.2.2.*). La polarisation de la sphère provoque une accumulation de charges de polarisation à sa surface de sorte que la composante normale du champ électrique, et donc la dérivée du potentiel, y sont discontinues. On doit donc distinguer les régimes $r < R$ et $r > R$. Il reste

$$\varphi(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} E_l r^l P_l(\cos\theta), & (r < R) \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} F_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) & (R < r) \end{cases}$$

où on a posé $E_l = C_{l0}A_l$ et $F_l = C_{l0}B_l$. La continuité du potentiel en $r = R$ impose

$$\sum_l E_l R^l P_l(\cos\theta) = \sum_l F_l R^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$$

En multipliant les deux membres par $P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$ et en intégrant θ de 0 à 2π, les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Legendre (28) conduisent à

$$E_l R^l = F_l R^{-(l+1)} \ \Leftrightarrow\ F_l = E_l R^{2l+1}$$

Le potentiel total est donc de la forme

$$\varphi(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \left(-E_{\text{ex.}}r\delta_{l,1} + E_l r^l\right) P_l(\cos\theta), & (r < R) \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \left(-E_{\text{ex.}}r\delta_{l,1} + E_l R^{2l+1} r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta), & (R < r) \end{cases}$$

où on a utilisé fait que $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$. La continuité des composantes normales de l'induction $\vec{D}$ (24) à la surface de la sphère $r = R$ impose

$$\varepsilon_r \sum_{l=0}^{+\infty} \left(-E_{\text{ex.}}\delta_{l,1} + lE_l R^{l-1}\right) P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(-E_{\text{ex.}}\delta_{l,1} - (l+1)E_l R^{l-1}\right) P_l(\cos\theta)$$

Comme dans le cas de la continuité du potentiel, on multiplie les deux membres par $P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$ puis on intégre θ de 0 à 2π. Il reste alors

$$\varepsilon_r \left(-E_{\text{ex.}}\delta_{l,1} + lE_l R^{l-1}\right) = -E_{\text{ex.}}\delta_{l,1} - (l+1)E_l R^{l-1} \ \Leftrightarrow\ E_l = E_{\text{ex.}}\delta_{l,1}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r l + l + 1}R^{l-1}$$

Seul le coefficient $E_1 = E_{\mathrm{ex.}} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$ est non nul de sorte qu'il reste

$$\varphi(r,\theta) = \begin{cases} -\dfrac{3E_{\mathrm{ex.}}}{\varepsilon_r + 2}\cos\theta, \quad (r < R) \\ \\ -E_{\mathrm{ex.}} r\cos\theta + E_{\mathrm{ex.}} \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\dfrac{R^2\cos\theta}{r^2} \end{cases}$$

Le champ à l'intérieur de la sphère est donc uniforme et parallèle au champ excitateur $E_{\mathrm{ex.}}$. A l'extérieur, la sphère se comporte comme un dipôle de moment dipolaire

$$p = 4\pi\varepsilon_0 E_{\mathrm{ex.}} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} R^2$$

1.3. Annexes

1.3.1. Géométrie différentielle

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = 0 \\
&\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, F = 0 \\
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, F = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\, F - \vec{\Delta} F \\
&\mathrm{div}\,(A \wedge B) = B.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, A - A.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, B \\
&\mathrm{div}\,(fF) = f\,\mathrm{div}\, F + F.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \\
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(fF) = f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, F - F \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \\
&\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(A.B) = \left(A.\vec{\nabla}\right) B + \left(B.\vec{\nabla}\right) A + B \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, A + A \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, B \\
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(A \wedge B) = A\,\mathrm{div}\, B - \left(A.\vec{\nabla}\right) B \\
&\mathrm{div}\,\vec{r} = 3
\end{aligned} \tag{25}$$

1.3.2. Quelques polynômes orthogonaux

1.3.2.1. Polynômes de Legendre

Les **polynômes de Legendre** peuvent être définis par la relation

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left((x^2-1)^l\right) = \frac{1}{2^l}\sum_{\nu=0}^{l/2}\frac{(-1)^\nu(2l-2\nu)!}{\nu!(l-\nu)!(l-2\nu)!}x^{l-2\nu} \tag{26}$$

Ils ont donc même parité que l. Les premiers polynômes de Legendre sont

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \qquad P_3(x) = \frac{x}{2}(5x^2-3)$$

On peut montrer qu'on a également l'expression

$$P_l(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^l d\varphi \tag{27}$$

En utilisant la formule de Rodriguez (26), on obtient la relation d'orthogonalisation

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'} \tag{28}$$

On a également

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(x)P_l(x') = 2\delta(x-x')$$

L'équation différentielle dont les polynômes de Legendre sont solutions est

$$\begin{aligned} & (1-x^2)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + l(l+1)P_l(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dx}\big((1-x^2)P_l'(x)\big) + l(l+1)P_l(x) = 0 \end{aligned}$$

La fonction génératrice des polynômes de Legendre est

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(x)t^l \tag{30}$$

pour tout $|t| < 1$ et $|x| \leq 1$. En dérivant cette expression par rapport à t et en identifiant les puissances de t, on obtient la relation de récurrence

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x) \tag{31}$$

En posant $x = 1$, on montre que $P_l(1) = 1$. De même, on a

$$P_{2p+1}(0) = 0 \qquad P_{2p}(0) = (-1)^p \frac{1.3.5.7\ldots(2p+1)}{2^p p!}$$

En dérivant l'expression de la fonction génératrice $G(x,t)$ par rapport à x et en identifiant les termes en t^{l+1}, il vient

$$P_l(x) = P_{l+1}'(x) - 2xP_l'(x) + P_{l-1}'(x) \quad l > 1 \tag{33}$$

En dérivant la relation (31) et en utilisant (33), on a

$$\begin{cases} lP_l(x) + P_{l-1}'(x) - xP_l'(x) = 0 & l > 1 \\ P_{l+1}'(x) = xP_l'(x) + (l+1)P_l(x) & l > 0 \end{cases}$$

En intégrant la première des relations (34), on obtient

$$\int_0^1 P_l(x)dx = \frac{P_{l-1}(0)}{l+1} \quad l > 0 \tag{34}$$

On montre également qu'on a

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x) \tag{35}$$

d'où l'expression équivalente à (35)

$$\int_0^1 P_l(x)dx = \frac{P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)}{2l+1} \qquad l > 1$$

En utilisant la relation de Rodriguez (26), on montre qu'on a

$$\int_0^1 P_0(x)dx = 1 \qquad \int_0^1 P_{2p}(x)dx = \frac{P_{2p-1}(0)}{2p+1} = 0$$

$$\int_0^1 P_{2p+1}(x)dx = \frac{P_{2p}(0)}{2p+2} = \frac{(-1)^p}{2^{p+1(p+1)!}}$$

1.3.2.2. Polynômes de Legendre associés

Les **polynômes de Legendre associés** $P_l^m(x)$ sont les solutions de l'équation différentielle

$$(1-x^2)P''^m_l(x) - 2xP'^m_l(x) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P_l^m(x) = 0 \tag{38}$$

Les premiers polynômes de Legendre associés sont

$$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2}, \quad P_2^2(x) = 3(1-x^2), \quad P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$$

Ils satisfont la relation d'othogonalité

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{l,l'}$$

pour tout $l, l' \geq m$ ainsi que

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)P_l^m(x') = 2\delta(x-x')$$

Ils sont reliés aux dérivées des polynômes de Legendre par la relation

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$$

Notons qu'on ajoute parfois un facteur $(-1)^m$ à cette définition. De manière analogue à (27), on a

$$P_l^m(x) = (-1)^{m/2}\frac{(l+m)!}{l!\pi}\int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^l \cos m\varphi d\varphi$$

Leur fonction génératrice est

$$G(x,t,u) = \frac{1}{\sqrt{1-2t\left(x+u\sqrt{1-x^2}\right)+t^2}} = \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{l} P_l^m(x)t^l u^m$$

Par dérivation, on peut montrer les relations de récurrence

$$P_l^{m+1}(x) - \frac{mx}{\sqrt{1-x^2}}P_l^m(x) + \left(l(l+1)-m(m-1)\right)P_l^{m-1}(x) = 0$$

$$\sqrt{1-x^2}P_l^{m+1}(x) = (1-x^2){P'}_l^m(x) + mxP_l^m(x)$$

$$(2l+1)xP_l^m(x) = (l+m)P_{l-1}^m(x) + (l+1-m)P_{l+1}^m(x)$$

$$xP_l^m(x) = P_{l-1}^m(x) - (l+1-m)\sqrt{1-x^2}P_l^{m-1}(x)$$

$$P_{l+1}^m(x) - P_{l-1}^m(x) = (2l+1)P_l^{m-1}\sqrt{1-x^2}$$

1.3.2.3. Fonctions de Bessel et de Hankel

Les **fonctions de Bessel** $J_n(x)$ et de **Hankel** $H_n(x)$ satisfont la même équation différentielle :

$$x^2J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2-n^2)J_n(x) = 0$$

Leur fonction génératrice est

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\alpha x)\left(\frac{s}{\alpha}\right)^n = e^{\frac{x}{2}\left(s-\frac{\alpha^2}{s}\right)}$$

Notons qu'on a la relation

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Elles satisfont les relations d'orthogonalité

$$\int_0^{+\infty} xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx = \frac{1}{\alpha}\delta(|\alpha|-|\beta|)$$

Si α et β sont des racines de l'équation $J_n(\alpha x) = 0$ alors on a aussi

$$\int_0^a xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx = \frac{a^2}{2}\left(J_{n+1}(\alpha a)\right)^2\delta_{\alpha,\beta}$$

Fonctions de Bessel et de Hankel satisfont les relations de récurrence

$$\frac{d}{dx}\left(x^nJ_n(x)\right) = x^nJ_{n-1}(x)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x)$$

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x}J_n(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right)$$

Les fonctions de Bessel ont pour expression

$$\begin{aligned}
J_n(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^n \oint t^{-(n+1)} e^{t-x^2/4t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Les fonctions de Hankel sont reliées aux fonctions de Bessel par les relations

$$\begin{cases}
H_n^{(1)}(x) = \dfrac{i}{\sin n\pi} \left(e^{-in\pi} J_n(x) - J_{-n}(x)\right) \\
H_n^{(2)}(x) = -\dfrac{i}{\sin n\pi} \left(e^{in\pi} J_n(x) - J_{-n}(x)\right)
\end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases}
J_n(x) = \dfrac{1}{2} \left(H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)\right) \\
J_{-n}(x) = \dfrac{1}{2} \left(e^{in\pi} H_n^{(1)}(x) + e^{-in\pi} H_n^{(2)}(x)\right)
\end{cases}$$

Sommaire