

# Chapitre 1

## Historique : vers la Charge Électrostatique.

*Le concept central de l'électrostatique est celui de la charge électrostatique. Comme tout élément scientifique fondamental, cette notion n'est pas apparue soudainement mais, elle est née de l'observation de phénomènes et de l'essai de les comprendre. Ces travaux se sont déroulés pendant plusieurs siècles. D'hypothèses fausses en théories banales, notre compréhension des phénomènes électrostatiques et des lois qui les soutendent est devenue de plus en plus précise. Dans ce premier chapitre, nous allons parcourir très rapidement le chemin effectué par les savants depuis Thalés de Milet<sup>a</sup> jusqu'à la mise en équation de la force électrostatique par Coulomb en 1785.*

<sup>a</sup>Thalés de Milet - 625 av. J.C., Milet (Asie Mineure) - 547 av. J.C., (Grèce)

### 1.1 La Charge Electrostatique.

#### 1.1.1 Thalès : l'expérience fondamentale.

Bien entendu, à l'époque de Thalés de Milet, au V<sup>e</sup> siècle avant J.C., les notions de charge, et a fortiori de force, électrostatiques étaient inconnues (et le resteraient pendant encore plus de 2000 ans). Thalés fut le premier à donner une description de phénomènes électrostatiques qu'il aurait lui-même ramenée d'Égypte. Il rapporte que lorsque l'on frotte un bâton d'ambre <sup>1</sup> avec une peau de chat puis qu'on l'approche de certains matériaux légers tels des morceaux de papiers, ceux-ci sont attirés par le bâton d'ambre. C'est l'expérience de base qui a conduit à élaborer la théorie électrostatique.

Regardons de plus près cette expérience très simple, représentée sur la figure 1.1.1, mais dont les mécanismes physiques essentiels ont résisté à la compréhension des savants pendant plusieurs siècles. Frottons un bâton en verre avec un chiffon en soie. Lorsque nous l'approchons de petites billes faites dans un matériau léger comme des morceaux de liège, nous observons alors que les billes sont attirées par le bâton. Dès que les morceaux de liège sont en contact avec le bâton, ils sont repoussés. On dit que le bâton en verre est alors *électrisé*.



**Définition 1** : Un corps est **électrisé** s'il peut attirer ou repousser d'autres corps. <sup>2</sup>

<sup>1</sup>L'ambre est une résine fossilisée qui se dit "àlektron" en grec et dont sont dérivés les mots "électron" et "électricité" par William Gilbert en 1600.

<sup>2</sup>Cette définition exclut bien entendu les phénomènes gravitationnels qui sont purement attractifs et ne sont pas

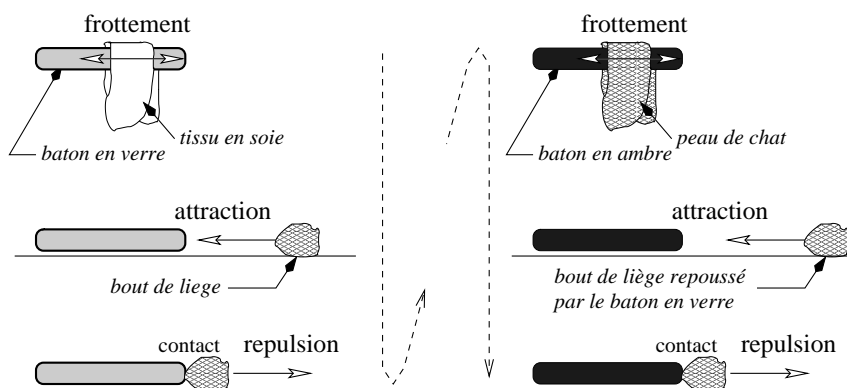


Figure 1.1: La première expérience d'électrostatique.

Dans un deuxième temps, électrisons un bâton d'ambre en le frottant sur une peau de chat. Approchons le bâton des billes de liège. Celles-ci sont à nouveau attirées par le bâton d'ambre, puis elles sont repoussées dès qu'elles entrent en contact avec lui.

Enfin, si on reprend le bâton de verre avec lequel nous avons démarré l'expérience, que nous l'électrisons à nouveau, le même phénomène d'attraction et de répulsion se reproduira.

Donc, la définition initiale de l'électrostatique est la suivante :



**Définition 2** : L'**électrostatique** est l'étude des phénomènes d'attraction (et aussi de répulsion) entre deux matériaux après que l'un ait subi des frottements.

La première tentative d'explication de cette expérience fut donnée par Plutarque. Il postule que le matériau frotté émet une *effluve* qui déplace l'air. Le courant d'air se déplace loin du matériau puis revient en ramenant les objets sur son passage. Cette théorie ne s'appuie sur aucune observation de l'effluve (et pour cause) et pose plus de questions qu'elle n'en apporte de réponses.

### 1.1.2 Gilbert : Les conducteurs et les isolants.

Même si l'attraction des corps légers est connue depuis l'antiquité, le moyen âge n'a vu aucune évolution des recherches effectuées concernant ce phénomène et l'étude scientifique de l'électrostatique n'a véritablement commencé qu'au XVI<sup>e</sup> siècle avec les travaux de William Gilbert<sup>3</sup>. Il a été le premier à séparer les corps en deux groupes : les conducteurs et les isolants et il a aussi inventé l'électroscope dont nous verrons le fonctionnement plus loin.

Il publia en 1600, le premier traité connu portant sur les phénomènes d'électrisation, *De Magnete* qui traitait aussi bien de l'électrostatique que du magnétisme. Dans ce document, il essaye d'expliquer l'origine de l'attraction par des corps électrisés. Tout d'abord, la notion d'action à distance n'était pas acceptable<sup>4</sup> pour les savants du XVI<sup>e</sup> siècle. Donc il a spéculé que lorsqu'un matériau est chauffé, il s'échauffe et la chaleur dégage une *effluve*, comme l'a postulé Plutarque, qui rejoint l'autre matériau et les attire mutuellement. Il a fait de nombreuses expériences pour prouver sa théorie. Il a aussi cherché une relation entre la force attractive et la distance des matériaux et il a montré qu'elle décroît avec la distance. Il explique alors ce phénomène par sa théorie en avançant que l'effluve se diffuse dans tout l'espace et son flux à travers les corps devient faible à longue distance.

Cette théorie est fautive, de plus elle n'explique rien concernant la répulsion. Cependant elle a servi de base à d'autres travaux et a permis à d'autres savants d'arriver à des conclusions justes pour expliquer l'électrostatique.

décelables entre deux corps à notre échelle. De plus ces phénomènes étaient inconnus à l'époque de Thalès.

<sup>3</sup>William Gilbert - 1544, Colchester (GB) - 1603, Londres (GB)

<sup>4</sup>Il fallait donc trouver quel était le support mécanique entre le bâton et la boule de matière attirée

### 1.1.3 Von Guericke : les machines.

Les expériences de Gilbert furent reprises par l'allemand Otto von Guericke<sup>5</sup> au milieu du XVI<sup>e</sup> siècle. Les expériences de Gilbert se déroulaient toujours dans l'air. Cependant, l'attraction ou la répulsion entre corps électrisés se manifeste beaucoup mieux dans le vide que dans l'air qui induit une force de frottement et freine donc les mouvements. Donc, Otto von Guericke inventa une machine à faire le vide afin d'améliorer la qualité des observations. Il a réalisé de nombreuses expériences concernant ce que l'on appelle actuellement l'électricité statique. Enfin, en 1663, il a inventé le premier générateur électrique qui produisait de l'électricité statique par friction. Il a simplement repris l'idée du frottement d'un corps solide sur une peau qu'il a mécanisée. Ce

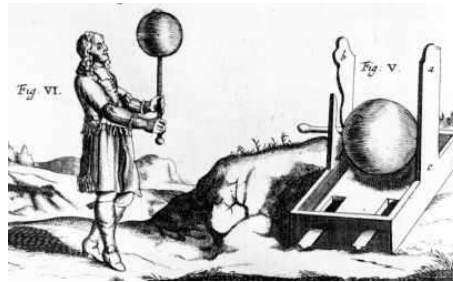


Figure 1.2: Le premier générateur électrostatique : la machine de Guericke.

dispositif a permis d'effectuer des expériences produisant des phénomènes aux effets plus facilement observable qu'avec un simple bâton frotté. Ce générateur était constitué d'une grosse boule de soufre coulée dans un globe en verre. Ce globe était monté sur une manivelle. Lorsque l'axe de la manivelle reposait sur son socle le globe frottait sur une lame de cuir. Ainsi en tournant la manivelle, il était possible d'électriser le globe de soufre par frottement sur le cuir. Après l'électrisation, on pouvait retirer la manivelle et la boule du socle et utiliser le globe comme source pour des expériences d'électricité statique. Ces expériences l'on amené à approfondir les notions de conducteur et d'isolant. On peut noter qu'il semble que Otto von Guericke n'a pas eu conscience que les effets qu'il a générés étaient dû à l'électricité statique.

### 1.1.4 Gray : Les observations.

Un peu plus tard, Stephen Gray<sup>6</sup> apporta une contribution significative à l'explication des phénomènes électrostatiques. Il montre en 1729 que l'électricité (ou la vertu électrique selon ses termes) peut être transportée d'un corps à un autre par un fil métallique.

Il fit des expériences, avec son ami Jean Desagulier, dans lesquelles ils électrisaient par frottement un tube de verre. Puis, ils connectaient ce tube à un morceau de liège par l'intermédiaire d'un fil métallique. Ils ont constaté que le morceau de liège avait alors les propriétés des matériaux

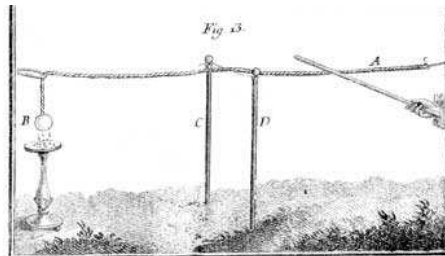


Figure 1.3: La première expérience de conduction de l'électricité par Stephen Gray.

<sup>5</sup>Otto von Guericke - 1602, Magdeburg (D) - 1686, Hambourg (D)

<sup>6</sup>Stephen Gray - 1666, Canterbury(GB) - 1736, (GB)

électrisés, c'est à dire qu'il était capable d'attirer d'autres objets.



**Propriété 1** : **L'électrisation d'un corps est donc transmissible à un autre corps.**

De plus, ils ont constaté que tous les corps ne conduisaient pas l'électricité : en remplaçant le fil métallique par des fils réalisés avec d'autres matériaux, ils découvrent que certains corps peuvent conduire l'électricité alors que certains autres ne le peuvent pas. Les expériences effectuées avec un fil de soie à la place du fil métallique ne conduisent pas à l'électrisation du morceau de liège.

Ils ont aussi remarqué que la transmission ne se faisait pas si la ligne métallique était en contact avec la Terre. Il a compris alors que la Terre conduisait la vertu électrique loin de l'objet.

Enfin, ils ont aussi constaté qu'un objet métallique tenu en main ne montrait pas de signe d'électrisation. En revanche, s'il était posé sur un matériau isolant, il devenait électrisable. Il en a déduit que le corps humain est donc aussi un matériau conducteur qui guide l'électricité vers la Terre donc loin du morceau de Liège.

Après ces réalisations, Gray a compris qu'on pouvait électriser n'importe quel matériau sur Terre.

Finalement, les principales conclusions de Gray concernant l'électricité furent les suivantes :



**Propriété 2** :

- les conducteurs électriques peuvent être électrisés s'ils sont isolés
- les isolants électriques peuvent toujours être électrisés
- l'électricité est un courant qui circule dans un conducteur

Il a aussi mis en évidence les propriétés particulières suivantes concernant la conduction :



**Propriété 3** :

- la Terre est un conducteur
- le corps humain est conducteur
- l'eau est un conducteur
- les isolants dont les surfaces sont mouillées sont conducteurs.

Toutes ces conclusions se sont avérées exactes. Cependant, même si Gray a bel est bien compris que la *vertu électrique* pouvait s'écouler ou être retenue sur certains corps, il n'a pas expliqué ce qu'était cette vertu.

### 1.1.5 Du Fay : la théorie à deux fluides.

C'est ensuite Du Fay<sup>7</sup>, qui fit considérablement avancer la compréhension des phénomènes électrostatiques. D'une part, Du Fay a prouvé que tous les corps sont plus ou moins conducteurs. Il suffit pour cela de les chauffer plus ou moins et de les frotter ensuite sur n'importe quelle sorte de tissus. Il observe que les conducteurs sont conducteurs à température ambiante et que les isolants le deviennent à haute température.

D'autre part, il a postulé qu'il existait deux sortes d'électricité. En 1733, Du Fay annonce que l'électricité est en fait constituée d'un fluide *vitreux* ou positif et d'un fluide *résineux* ou négatif et il postule que deux corps porteurs d'électricité de même nature se repoussent et deux corps porteurs d'électricité opposées s'attirent. Il postule aussi que les isolants ont la même quantité des deux électricités.

Du Fay reprend alors l'expérience fondamentale avec les bâtons d'ambre et de verre et l'explique. Du Fay donne comme explication de ces phénomènes que, en général, la matière est neutre parce qu'elle contient autant des deux fluides (vitreux et résineux). Cependant si la friction sépare les fluides dans le bâton en verre, alors celui-ci devient porteur de fluide vitreux et il peut alors attirer des corps qui sont porteurs du fluide résineux. Quand le contact se fait entre les morceaux de liège et le bâton, le fluide du bâton est transmis aux morceaux de liège. Tous les éléments portent alors du fluide vitreux et se repoussent tous mutuellement. Si maintenant, on électrise un bâton d'ambre, il devient porteur de fluide résineux. Il va donc attirer les morceaux de liège électrisés par

<sup>7</sup> Charles François de Cisternay Du Fay - 1698, Paris(F) - 1739, ??? (F)

l'expérience précédente. Ce raisonnement est connu comme étant la *théorie à deux fluides*. Cette théorie est inexacte mais elle a permis de poser les éléments décisifs qui permettront plus tard à Benjamin Franklin de donner la vision correcte du phénomène.

### 1.1.6 van Musschenbroek : le premier condensateur.

Au milieu du XVIII<sup>e</sup>, en 1745, a eu lieu une découverte importante à l'université de Leyde. Trois savants hollandais, Musschenbroeck<sup>8</sup>, Allaman et Cunoeus, ont rempli une bouteille en verre avec de l'eau et on plongé dans l'eau un fil métallique relié à un générateur (c.a.d. une machine de Guericke). Il ont ensuite déconnecté la machine de la bouteille. Lorsque l'un des expérimentateur a voulu saisir la bouteille, il a reçu une violente décharge dans la bras. Ensuite, l'abbé Nollet remplaça l'eau par une feuille métallique interne à laquelle est attachée une tige métallique ressortant de la bouteille et il ajouta une feuille externe. Ce fut l'invention du premier condensateur. Cette

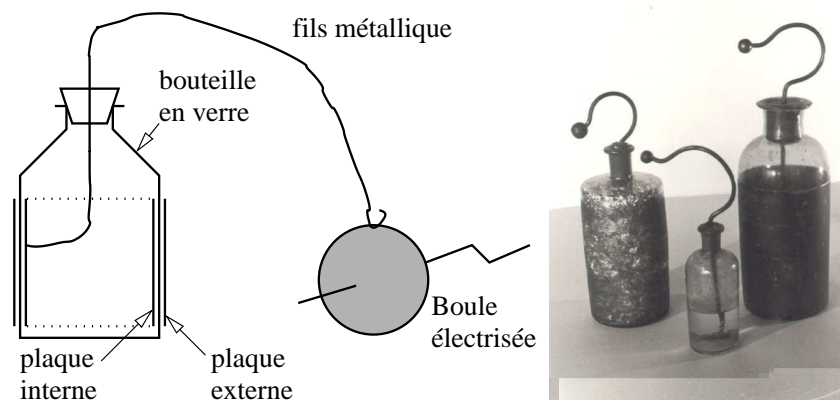


Figure 1.4: Le premier condensateur : la bouteille de Leyde.

bouteille est le premier réservoir d'électricité de l'histoire. On peut la décharger en touchant la tige métallique centrale reliée à la feuille intérieure.

### 1.1.7 Franklin : la théorie à un fluide.

A cette époque, tout le monde se posait la question de savoir s'il existait deux fluides électriques (selon Du Fay) ou bien s'il n'en existait qu'un seul qui serait la manifestation des natures résineuse et vitreuse de l'électricité. La majorité de la communauté scientifique de l'époque se ralliait au premier point de vue.


En 1747, Benjamin Franklin<sup>9</sup> a présenté sa théorie du fluide unique. Il imagina l'électricité comme étant un type de fluide invisible présent dans toute la matière. Il a posé, en principe, que le frottement de surfaces isolantes faisait changer ce fluide d'endroit et qu'un écoulement de ce fluide constitue un courant électrique. Il a également posé en principe que quand la matière contenait trop peu de ce fluide elle était négativement chargée et quand il était excédentaire, la matière était positivement chargée. Dans l'esprit de la théorie à deux fluide de Du Fay, il identifia le terme positif avec le type de charge acquis par une tige de verre frottée sur de la soie, et négatif avec celui acquis par une tige en ambre frottée avec de la fourrure.

Il a donc posé que :

<sup>8</sup>Petrus van Musschenbroek - 1692, Leyde(NH) - 1761, Leyde(NH)

<sup>9</sup>Benjamin Franklin - 1706, Boston (US) - 1790, Philadelphie (US)

- La matière contient des charges positives et des charges négatives.


 **Propriété 4** : • Le courant électrique est dû au déplacement des charges négatives.

- Les charges positives restent fixes.

De plus, il a posé qu'un corps chargé négativement et un autre positivement s'attirent et que deux corps chargés négativement ou deux corps chargés positivement se repoussent.

L'interprétation moderne des expériences avec le bâton de verre et celui d'ambre est très proche de celle de Benjamin Franklin. Il a ensuite posé que ce fluide était constitué de particules qui sont les *charges électriques*. Aujourd'hui nous savons que ces charges sont des électrons et en fait que le fluide est chargé négativement.

Il a défini la charge nette portée par un système :

 **Définition 3** : La charge nette portée par un système est la somme des charges positives moins la somme des valeurs absolues des charges négatives

Finalement, il a été amené naturellement à poser le *principe de la conservation de la charge électrique* :

**Principe** : Dans un système isolé, la charge nette est une constante.

Ce principe (comme tout principe) ne peut pas être démontré. Il tire sa validité du fait qu'on ne lui connaît pas de violation. Il constitue aujourd'hui encore une pierre angulaire de la physique.

## 1.2 Explication de l'expérience d'attraction par friction.

A la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, les expériences de Jean Perrin<sup>10</sup> ont définitivement conduit à une interprétation corpusculaire de la matière. Nous savons maintenant que la matière qui nous entoure est constituée de 106 éléments chimiques différents : les atomes. Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, l'expérience de Rutherford<sup>11</sup> dont les détails dépassent le niveau de ce cours, a mis en évidence la structure interne de ces atomes et il a démontré l'existence d'un noyau atomique central chargé positivement et d'un cortège d'électrons gravitant autour du noyau. L'ensemble, noyau et électrons, est électriquement neutre. Le noyau est formé de protons chargés et de neutrons non chargés. Il y a donc autant de protons que d'électrons dans un atome. Les atomes peuvent mettre des électrons en commun pour former des liaisons chimiques (ou covalente). L'ensemble des atomes ainsi liés constitue une molécule.

Lorsque l'on met les deux matériaux en contact, des liaisons chimiques se forment entre des parties des deux surfaces. C'est le phénomène d'adhésion. Quand, la liaison est cassée, certains des atomes qui étaient liés ont tendance à garder des électrons supplémentaires et d'autres ont tendance à se laisser facilement arracher leurs électrons. C'est ce phénomène qui est responsable de la création de charge nette dans un matériau. Ce phénomène se déroule sans friction, juste en mettant les matériaux en contact, cependant dans ce cas son effet est très faible. L'effet est énormément renforcé en frottant les matériaux parce que dans ce cas, ils se touchent et se séparent localement un nombre gigantesque de fois. L'un des corps arrache un nombre important d'électrons à l'autre. Le corps qui possède un excès d'électrons devient chargé négativement. Le corps qui a perdu des électrons est chargé positivement.

Revenons à l'expérience avec le bâton d'ambre et le bâton de verre.

- Le tissu en soie avec lequel on frotte le bâton de verre lui arrache des électrons. Donc le tissu est chargé négativement et le bâton est chargé positivement.
- Par un phénomène de polarisation (que nous n'étudierons pas ici) le bout de liège, neutre est attiré vers le bâton.

<sup>10</sup>Jean Perrin, - 1870, Lille - 1942, New York (US). Prix Nobel de Physique en 1926. Ses cendres ont été transportées au Panthéon le 18 novembre 1948.

<sup>11</sup>Ernest Rutherford, - 1871, Nelson (NZ) - 1937, Cambridge (GB). Prix Nobel de Chimie en 1908.

- Au moment du contact, le liège donne des électrons au verre pour rétablir partiellement son déficit de charges. Il n'en donne pas suffisamment pour établir la neutralité électrique du verre (cela lui "couterait" trop cher).
- Les deux corps sont alors chargés positivement et se repoussent.
- Ensuite, la peau de chat avec laquelle on frotte le bâton d'ambre perd des électrons. L'ambre est alors chargée négativement.
- Elle attire le bout de liège qui lui est chargé positivement.
- Au contact, le petit bout de liège accepte les électrons surnuméraires de l'ambre qui compense largement son manque de charges. Il devient alors chargé négativement comme l'ambre (qui ne s'est pas intégralement déchargé).
- Les deux corps se repoussent alors.

Une question de taille subsiste dans l'explication qualitative donnée au dessus. Pourquoi est ce que :

- le bâton de verre frotté par la soie est chargé positivement
- le bâton d'ambre frotté par la peau de chat est chargé négativement ?

Une réponse rigoureuse à cette question nécessite d'étudier les structures moléculaires des matière en contact et leur interaction au niveau quantique. Cette description ne sera pas abordée non plus dans ce cours d'introduction à l'électrostatique. Cependant, cet effet de charge d'un matériau (et de décharge de l'autre), appelé effet triboélectrique peut être étudié qualitativement à l'aide de la table triboélectrique donnée ci dessous.

Liste triboélectrique					
1	Peau humaine	10	Soie	19	Or - Platine
2	Cuir	11	Aluminium	20	Polyester
3	Peau de lapin	12	Papier	21	Styrène
4	Verre	13	Coton	22	Polyuréthane
5	Cheveux humain	14	Bois	23	Polyéthylène
6	Nylon	15	Ambre	24	PVC
7	Laine	16	Caoutchouc	25	Silicone
8	Plomb (!)	17	Nickel - Cuivre	26	Téflon
9	Peau de chat	18	Argent - Laiton		

Cette table empirique s'utilise de la façon suivante. Quand deux éléments sont frottés l'un contre l'autre, celui qui est le plus bas dans la liste arrache des électrons à celui qui est le plus haut. Ainsi le verre (n° 4) donne des électrons à la soie (n° 10) et se charge donc positivement tandis que l'ambre (n° 15) arrache des électrons à la peau de chat (n° 9) et se charge négativement.

**Ex. 1 - 1 :** Charge et décharge d'une machine de Guericke.

*Considérons une machine de Guericke constituée d'une sphère en verre qui frotte sur une peau de chat.*

- 1.1. *Quel est le signe de charge porté par la machine ?*
- 1.2. *Dans quel sens s'est effectué le transfert d'électrons.*
- 1.3. *Quel est l'effet de la machine sur un ion positif dans l'air*
- 1.4. *même question pour un ion négatif ?*
- 1.5. *Que devient la charge de la machine ?*
- 1.6. *Que peut-on faire pour conserver la charge plus longtemps ?*

### 1.3 Distribution de charges.

Dès que la théorie à un fluide a été acceptée, il a fallut comprendre les caractéristiques des isolants et des conducteurs dans le cadre de cette théorie.

Rappelons que Gray a montré que l'électrisation peut être transmise d'un corps à un autre par l'intermédiaire d'un fil. Dans ce cas le matériau qui constitue le fil est classé dans les conducteurs. Si ce n'est pas le cas, il est isolant. Dans la théorie du fluide électrique de Franklin, cela revient à dire que les électrons peuvent passer du bâton électriser au bâton neutre s'ils sont reliés par un fil conducteur. Au contraire, les électrons ne peuvent pas circuler dans un matériau isolant.

Donc, on peut voir les propriétés microscopiques des isolants et des conducteurs comme expliqué ci dessous.

### 1.3.1 Les isolants

La caractéristique des matériaux isolants est que les charges ne sont pas libres de s'y mouvoir. Considérons une boule de matière isolante et neutre électriquement et mettons la en contact avec un bâton électrisé portant des charges négative. Dès que le bâton entre en contact avec la matière, les charges vont migrer pour se répartir sur la surface de contact et y rester (puisqu'elle ne peuvent pas bouger dans un isolant). Elles sont localisées. Pour être plus précis, les temps caractéristiques des déplacements des charges dans le matériau isolant sont très long devant les temps de mesures de grandeurs électrostatiques avec des appareils classiques. C'est pourquoi, on peut considérer que cette propriété est toujours vraie.

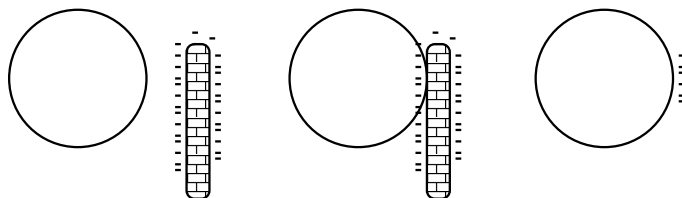


Figure 1.5: Répartition des charges dans un isolant



**Propriété 5 : La distribution des charges dans un isolant est statique.**

Les charges sont donc localisées à l'endroit où elles ont été déposées.

### 1.3.2 Les conducteurs

La caractéristique des matériaux conducteurs est que les charges sont libres de s'y mouvoir. Considérons une boule de matière conductrice et neutre électriquement. Mettons la en contact avec un bâton électrisé portant des électrons. Dès que le bâton entre en contact avec la matière, les charges vont migrer pour se répartir sur la surface de contact. Chaque électron ressent une force électrostatique de répulsion due à la présence de toutes les autres charges. Ici le phénomène est différent de ce que nous avons observé pour la matière isolante. Comme les charges sont libres de bouger dans le matériau, elle vont donc se répartir en surface afin de minimiser les contraintes mécaniques de répulsion (dus aux forces). A ce moment le conducteur est à l'équilibre. Le temps caractéristique pour accéder à l'équilibre est très petit (il dépend de la taille du matériau). Il est de l'ordre quelque picosecondes. On peut donc considérer la propriété suivante comme toujours vraie :

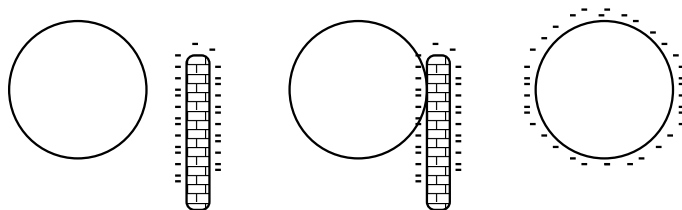


Figure 1.6: Répartition des charges dans un conducteur



**Propriété 6 : Dans un conducteur les charges sont distribuées en surfaces.**

Toutefois, il ne faut pas croire pour autant que dans un conducteur à l'équilibre, les charges électrostatiques sont statiques. En effet, les électrons sont soumis à l'agitation thermique. Quand un électron libre de bouger rencontre le nuage électronique d'un atome du matériau, il est dévié. Si le matériau est solide ces collisions se produisent environ  $10^{18}$  fois par secondes. Cependant, si on moyenne ces trajectoires après un grand nombre de collisions alors les vitesses des électrons peuvent être décrite par une moyenne temporelle nulle. Si on considère une moyenne sur 1 000 trajectoires, la distribution des charges dans un conducteur est considérée comme statique sur des temps caractéristiques plus long que  $10^{-15}$  secondes.

**Propriété 7 : La distribution des charges dans un conducteur est considérée statique bien que chaque charge soit en mouvement permanent.****Propriété 8 : Les charges se répartissent en surface d'un conducteur**

## 1.4 Les distributions discrète et continue.

### 1.4.1 Distribution discrète.

Nous savons maintenant grossièrement comment se répartissent les charges dans un isolant ou dans un conducteur. Mais pour résoudre un problème, il faut savoir comment représenter la distribution des charges dans le matériau.

A l'échelle microscopique la structure de la matière apparait discontinue. En effet, un atome a un rayon de l'ordre de quelques Angströms ( $10^{-10}$  mètre). Un nucléon (proton ou neutron) a une extension spatiale de l'ordre du femtomètre ( $10^{-15}$  mètre). L'extension spatiale d'un électron est supposée être nulle<sup>12</sup>. Les lois de l'électrostatique sont valables tant que les distances auxquelles on regarde les phénomènes sont grandes devant la taille des objets chargés qu'on regarde.

Donc on peut assimiler les charges élémentaires d'un système à des points matériels chargés tout restant dans le domaine de validité de l'électrostatique. Nous pouvons alors définir une distribution  $\Omega$  comme étant, un ensemble de  $N$  charges  $q_i$  localisée (c.a.d. dont la position est fixée) en  $\vec{r}_i$  dans l'espace :  $\Omega = \{q_i, \vec{r}_i\}_{i=1}^N$  on façon générale, si on étudie une distribution de charges en plaçant le point d'observation à une distance du même ordre de grandeur que l'extension spatiale des charges ou que la distance entre deux charges, il faut considérer la distribution de charges comme étant discrète et donc connaître la position de chaque charge.

### 1.4.2 Distribution continue

en revanche, lorsqu'on traite un problème macroscopique, on peut rarement donner la position de chacune des charges électrostatiques concernées. Par exemple mettons en contact une boule ou un disque ou un fil métallique non chargés avec un bâton électrisé négativement. Une quantité d'électrons gigantesque (de l'ordre du nombre d'Avogadro) peut être transférée du bâton à la boule ou au fil. Nous savons que ces charges se répartissent sur la surface du métal mais il est impossible de connaître les positions de chaque particules car le calcul de la répartition d'un grand nombre de charges sur la surface est un problème très compliqué et que, de plus, ces charges sont mobiles sur cette surface.

D'autre part, on ne pourrait calculer le champ électrostatique que si on connaissait une relation simple entre les positions des charges de sorte à pouvoir écrire le champ comme une somme de termes d'un suite mathématique et là encore rien ne dit qu'on pourrait effectuer cette somme simplement.


<sup>12</sup>Ceci est vrai en mécanique quantique. En mécanique classique, on peut calculer un rayon "classique" de l'électron qui vaut  $1.68 \cdot 10^{-15}$  mètre. Ce résultat conduit à des aberrations lorsqu'on veut calculer la vitesse d'un point à la surface de l'électron en rotation : on obtient  $v = 1.7 \cdot 10^{11}$  m/s  $\gg c$ .

En fait, on peut facilement contourner cet inconvénient en faisant un calcul de moyenne basé sur la notion de distribution en remarquant que dans ce genre de problème, on ne cherche pas à connaître la physique du système dans l'environnement proche des charges. Ici, les dimensions caractéristique du problème sont grandes devant les distance entre charges.

### 1.4.3 Densité linéique

Si nous considérons, un fil métallique très long, de longueur  $L$ , extrêmement fin et que son diamètre tend vers 0. Nous transférons  $n_e$  électrons sur ce fil. Il porte donc une charge  $Q = -n_e|e|$  répartie uniformément sur la longueur du fil (parce qu'il est conducteur). Cela signifie que n'importe quel petit élément du fil de longueur  $dl$ , où qu'il soit sur le fil, porte la même quantité de charges notée  $\delta q$ . On ne sait pas et on ne cherche pas à savoir comment sont réparties les charges dans la petite longueur  $dl$ . Il suffit simplement de savoir que  $dl$  est suffisamment grand pour ne pas y voir de fluctuations de la quantité de charges et suffisamment petit pour pouvoir appliquer un traitement intégral au problème. On voit donc aisément qu'on a  $\delta q = Q dl/L$ .

On définit alors la distribution linéique de charges :

 **Définition 4** :  $\lambda = \frac{\delta q}{dl}$  (en  $C/m$ )


Si  $dl$  est suffisamment petit cette quantité ne dépend pas de  $dl$ . En effet si  $dl$  est multiplié par 2,  $\delta q$  l'est aussi. Cette fonction  $\lambda$  donne le profil de la répartition de charge le long du fil. Ici la répartition est uniforme donc  $\lambda$  est constante et vaut  $\lambda = Q/L$ .

**Ex. 1 - 2** : Distribution linéique.

Quelle est la distribution linéique de charges portée par un fil métallique de 1cm. sur lequel  $10^{20}$  électrons ont été transférés.

### 1.4.4 Densité surfacique

De la même façon, si on dépose une quantité de charges  $Q$  sur une surface  $S$ . Ce qui signifie en pratique que les charges se sont déposés sur une épaisseur  $h$  très faible à l'échelle macroscopique. On peut définir la densité surfacique comme :

 **Définition 5** :  $\sigma = \frac{\delta q}{dS}$  (en  $C/m^2$ )

C'est la charge portée par une surface élémentaire  $dS$  petite à l'échelle macroscopique.

**Ex. 1 - 3** : Coordonnées cylindriques

Considérons un point  $M$  repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  dans le repère orthonormé  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

**3.1.** Représenter le trièdre  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  au point  $M$ .

**3.2.** Considérons un déplacement élémentaire du point  $M$ . Les nouvelles coordonnées sont  $r + dr, \theta + d\theta, z + dz$ . Représenter les éléments différentiels  $dl_r, dl_\theta, dl_z$  selon  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

**3.3.** Exprimer les éléments différentiels  $dl_r, dl_\theta, dl_z$  en fonction de  $r, dr, \theta, d\theta, z, dz$ .

**3.4.** Calculer le volume d'un cylindre de longueur  $L$  et de rayon  $a$ .

**3.5.** Calculer la surface du cylindre de longueur  $L$  et de rayon  $a$

**Ex. 1 - 4 :** Cylindre chargé en volume.

Considérons un cylindre de rayon  $a$  et de longueur  $L$ , portant une densité de charge surfacique  $\sigma = \sigma_0 \cos(\theta)$ . Quelle est la charge totale portée par le cylindre.

**Ex. 1 - 5 :** Sphère chargée


On considère une sphère de rayon  $a$  portant une densité de charges surfacique  $\sigma < 0$ .

5.1. Quelle est la charge totale portée par cette sphère ?

5.2. Combien y a-t-il d'électrons réparti sur cette sphère ?

**1.4.5 Densité volumique**

Finalement si les charges peuvent se répartir en volume dans un matériau, on définit la densité de charge volumique par :

 **Définition 6 :**  $\rho = \frac{\delta q}{d\tau}$  (en  $C/m^3$ )

où  $d\tau$  est un élément de volume élémentaire.

Si la répartition des charges, en longueur, en surface ou en volume n'est pas uniforme, les quantités  $\lambda$ ,  $\sigma$  et  $\rho$  ne sont plus constantes. Elle dépendent de l'endroit où on regarde les charges.

**Ex. 1 - 6 :** Boule conductrice

On transfère  $10^{20}$  électrons sur une boule conductrice de rayon  $a$ . Quelles sont les densités volumique et surfacique de charges de la boule ?

**Ex. 1 - 7 :** Atome simplifié.

Un atome de numéro atomique  $Z$  peut être représenté de façon simplifiée comme une boule de rayon  $a$  dans laquelle les électrons sont répartis de façon uniforme. Donner la densité volumique de charge de l'atome.

**Ex. 1 - 8 :** Coordonnées sphériques

Considérons un point  $M$  repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  dans le repère orthonormé  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

8.1. Représenter le trièdre  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$  au point  $M$ .

8.2. Considérons un déplacement élémentaire du point  $M$ . Les nouvelles coordonnées sont  $r + dr, \theta + d\theta, z + dz$ . Représenter les éléments différentiels  $dl_r, dl_\theta, dl_\phi$  selon  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ .

8.3. Exprimer les éléments différentiels  $dl_r, dl_\theta, dl_\phi$  en fonction de  $r, \theta, \phi, dr, d\theta, d\phi$ .

8.4. Calculer le volume d'une boule de rayon  $a$ .

8.5. Calculer la surface d'une sphère de rayon  $a$ .

**Ex. 1 - 9 :** Répartition non uniforme.

Une boule de rayon  $R$  porte une densité de charges volumique dépendant du rayon :  $\rho(r) = ar^2$ . Quelle est la charge totale portée par la boule ?

**Ex. 1 - 10 :** Potentiel de Yukawa.

Hideki Yukawa a démontré que l'atome d'hydrogène pouvait être représenté par un proton immobile et un électron (mobile) dont la probabilité de présence autour de l'atome pouvait être écrite  $\rho(r) = br \exp(-ar^2)$ . Sachant que la probabilité de présence est maximum pour le rayon de l'atome (noté  $R$ ), calculer  $a$  et  $b$ .

## 1.5 La force de Coulomb.

Une des questions fondamentales que se pose la physique est : "connaissant l'état d'un système un instant donné, que comment évolue ce système dans le futur" ou bien quel était son état dans le passé<sup>13</sup> La réponse à cette question passe par l'étude mécanique du système. Il faut donc écrire le principe fondamental de la dynamique pour toutes les parties du système. Si chaque instant on connaît la position et la vitesse de chaque masse  $m$  et qu'on sait calculer  $\vec{a}_G = \vec{F}_{\text{ext}}/m$ , où  $\vec{a}_G$  est l'accélération que subit la masse sous l'action de la force externe  $\vec{F}_{\text{ext}}$ , on peut déduire la trajectoire du système entier. Tout le problème est de connaître  $\vec{F}_{\text{ext}}$ <sup>14</sup> Ce problème a été résolu pour l'interaction gravitationnelle par Newton en 1687. Dès que le concept de charge électrostatique a été admis les savants ont cherché à exprimer quantitativement la force électrostatique ressentie par une charge en présence d'une autre.

En 1785, Coulomb<sup>15</sup> lit son mémoire intitulé, *Construction et usage d'une balance électrique fondée sur la propriété qu'ont les fils de métal d'avoir une force proportionnelle à l'angle de torsion*, devant les membres de l'Académie des Sciences. L'usage que Coulomb fait de sa balance se lit dans le sous-titre : *Détermination expérimentale de la loi suivant laquelle les éléments des corps électrisés du même genre d'électricité se repoussent mutuellement*. La balance de Coulomb est

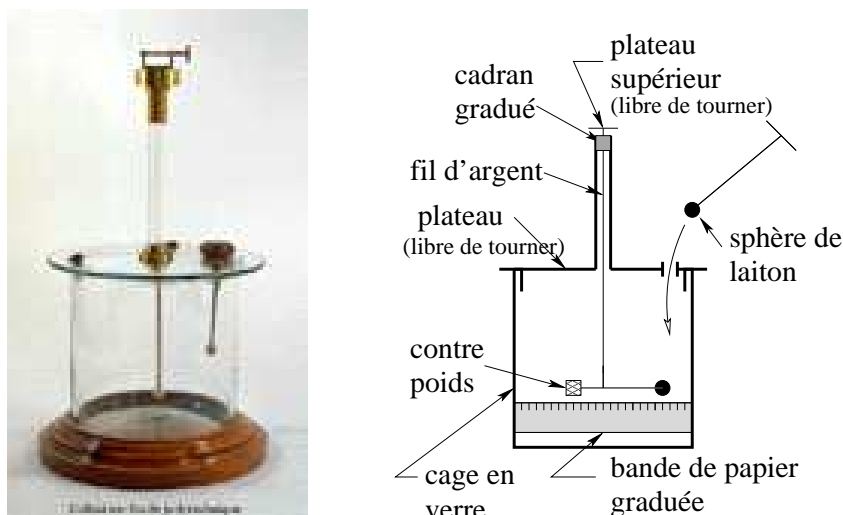


Figure 1.7: La première expérience quantitative : la balance de Coulomb.

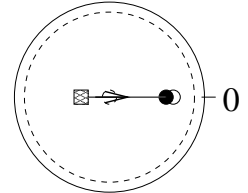
<sup>13</sup>Une autre question est de connaître les états stables de ce système. Cette question sera abordée au chapitre ??.

<sup>14</sup>en fait ici on néglige de parler du chaos classique engendré par la sensibilité des équations aux conditions initiales

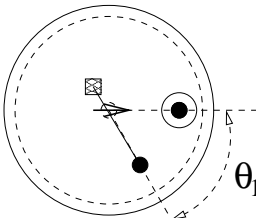
<sup>15</sup>Charles-Augustin de Coulomb - 1736, Angoulême - 1806, Paris

composée d'une cage de verre fermée par un couvercle circulaire en verre qui est donc libre de tourner. Ce couvercle est percé d'un trou excentré par lequel on pourra introduire une sphère de laiton électrisée. De plus, il est surmonté d'une colonne en verre solidaire. Cette colonne est fermée en haut par un petit plateau supérieur qui lui aussi peut tourner. Un petit index porté par le plateau et un cadran porté par le haut de la colonne permet d'avoir un point de repère de l'orientation du plateau. Un fil d'argent très fin est accroché sous le plateau supérieur de sorte à ce qu'une rotation du plateau entraîne le fil. Finalement, une aiguille est attachée à l'extrémité basse de ce fil avec un contrepoids et un boule de sureau.

**1:** Une bande de papier graduée encercle la cage de verre et sert à effectuer les réglages initiaux. Le trou du couvercle est amené à hauteur du zéro de la bande en faisant tourner le couvercle. De même pour l'aiguille et la boule de sureau en faisant tourner le plateau supérieur.



réglage initial



introduction de la  
sphère de laiton &  
**contact** → **répulsion**  
torsion du fil =  $\theta_1$

Pour cette distance, il y a équilibre entre la force électrostatique et la force de torsion du fil :

$$F_{el}(d) = F_{Tors}(\theta_1) \quad (1.1)$$

La force de torsion d'un fil est proportionnelle à l'angle de torsion :  $F_{Tors}(\theta_1) = C\theta_1$  où  $C$  est la constante de torsion du fil. D'où, il écrit simplement :

$$F_{el}(d) = C\theta_1 \quad (1.2)$$

**3:** Coulomb tord maintenant le fil d'argent en sens inverse de  $\theta_1$  à l'aide du plateau supérieur, jusqu'à ce que la boule de sureau atteigne une position  $\theta_1/2$ . La distance entre les deux boules est réduite de moitié. Il note l'angle de torsion du fil,  $\theta_2$ , à l'aide de l'index du plateau supérieur. La torsion totale du fil devient  $\theta_2 + \theta_1/2$ . A l'équilibre on a alors :

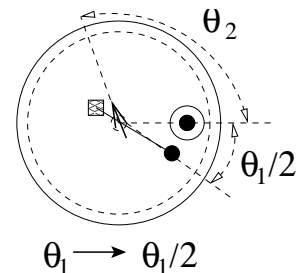
$$F_{Tors}(\theta_2 + \theta_1/2) = F_{el}(d/2) \quad (1.3)$$

d'où, il trouve :

$$F_{el}(d/2) = C(\theta_2 + \theta_1/2) \quad (1.4)$$

Il suppose que  $F_{el}(d) \propto 1/d^n$ , où  $n$  est l'exposant qu'il cherchait<sup>16</sup> En reprenant les relations des forces électrostatiques avec les angles de torsion, on a :

$$\frac{F_{el}(d/2)}{F_{el}(d)} = \frac{\theta_2 + \theta_1/2}{\theta_1} = \frac{d^n}{(d/2)^n} = 2^n \quad (1.5)$$

torsion du fil =  $\theta_2 + \theta_1/2$ 

<sup>16</sup>En fait Coulomb a posé  $n = 2$  et a cherché à vérifier si cette loi était correcte ou pas.

Bien entendu, coulomb a trouvé avec son dispositif la loi bien connue en  $1/d^2$ .

**4:** Mais il ne s'est pas arrêté là. Il ne savait pas comment la loi dépendait de la quantité de charges portée par chaque boule. Il s'est demandé si la force électrostatique était fonction de  $Q$   $q$  de  $Q^2$   $q^2$ .... Il a résolu le problème simplement, en ressortant la sphère de laiton et en la mettant en contact avec une autre exactement identique. Le laiton étant conducteur, les charges bougent librement. Il a alors considéré, à juste titre qu'il avait divisé la charge portée la sphère par 2. Cela n'aurait pas été le cas avec un matériau isolant. Il a refait les expériences avec la même boule de laiton dans le même état d'électrisation. Il a trouvé que la force était divisée par 2.

Les résultats expérimentaux dont il disposait étaient les suivants. La force électrostatique :

- décroît en  $1/r^2$
- est proportionnelle à  $Q$  et à  $q$
- attractive si  $Q q < 0$  et répulsive si  $Q q > 0$

On a alors la force exercée par une charge  $q$  sur une charge  $q'$  :

$$\text{Principe : } \boxed{\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q q'}{r^2} \vec{u}_r} \quad (1.6)$$

avec  $\vec{u}_r$  est un vecteur unitaire dirigé de  $Q$  vers  $q$  et  $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ . La valeur de  $\epsilon_0$  est de  $1/(36\pi 10^9) = 8.85 \cdot 10^{-12}$  MKSA.

**Ex. 1 - 11 :** Permittivité diélectrique du vide

Donner la dimension de  $\epsilon_0$  en MKSA.

**Ex. 1 - 12 :** Interactions électrostatique et gravitationnelle.

**12.1.** Déterminer le rapport entre la force électrostatique qu'exerce un électron sur un autre et la force gravitationnelle.

**12.2.** Quand faut-il prendre en compte la force gravitationnelle ?


La formule de la force électrostatique peut être vue comme un principe indémontrable que résulte de l'observation. Il est à la base de l'électrostatique. Toutes les autres grandeurs que nous utiliserons par la suite ne sont que des définitions qui reposent toujours sur cette pierre fondamentale de la physique. Ce principe permet aussi de définir la charge  $q$ .

## 1.6 Invariances

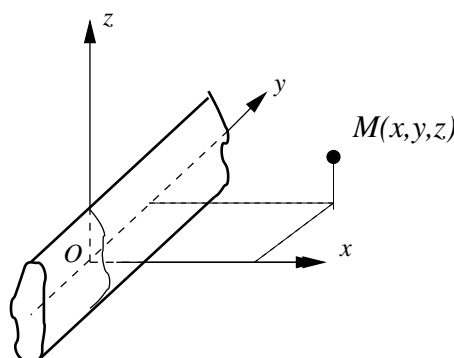
### 1.6.1 Invariances par Translation.

Une distribution est invariante par translation selon un axe si la densité de charge est la même en un point  $C$  et en n'importe quel point  $C'$  résultant d'une translation de  $C$  parallèlement à l'axe.

**La densité de charges d'une distribution invariante par translation selon**

-  **Propriété 9 :**
- $Ox$  est telle que  $\rho(x, y, z) = \rho(y, z)$
  - $Oy$  est telle que  $\rho(x, y, z) = \rho(x, z)$
  - $Oz$  est telle que  $\rho(x, y, z) = \rho(x, y)$

Sur la figure ci dessus la densité de charges est indépendante par translation selon  $Oy$ . On place maintenant une charge objet  $q'$  en un point  $M(x, y, z)$  de l'espace et on cherche à déterminer la forme mathématique de la force que la distribution exerce sur cette charge. On peut tout à fait

Figure 1.8: Distribution de charge invariante par translation selon  $Oy$ 

translater la distribution de charges source selon son axe d'invariance (ici  $Oy$ ) et le problème reste identique. Ce qui veut dire que translater aussi le point  $M$  selon  $Oy$  d'une quantité opposée à celle dont on a translater la distribution et garder la forme de force identique, Ce qui conduit dans le cas au dessus à  $\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x, z)$ . Cette propriété est générale :



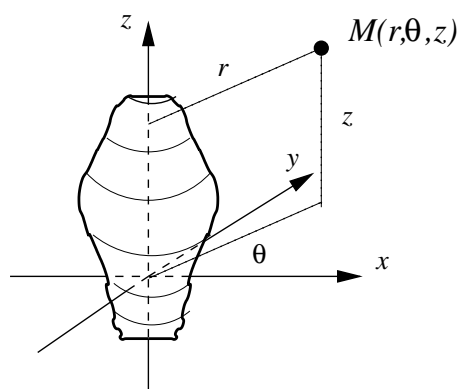
**Propriété 10** : La force électrostatique exercée sur une charge objet par une distribution invariante par translation selon certains axes ne dépend pas des variables associées à ces axes.

### 1.6.2 Invariances par Rotation.

Une distribution est invariante par rotation autour d'un axe si la densité de charge est la même en un point  $C$  et en n'importe quel point  $C'$  résultant d'une rotation  $C'$  autour de l'axe.



**Propriété 11** : La densité de charges d'une distribution invariante par rotation autour de l'axe  $Oz$  est telle que  $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta)$

Figure 1.9: Distribution de charge invariante par translation selon  $Oy$ 

Sur la figure ci dessus la densité de charges est indépendante par rotation autour de l'axe  $Oz$ . Dans ce genre de problème, on a tout intérêt à utiliser des coordonnées cylindriques. On place maintenant une charge objet  $q'$  en un point  $M(r, \theta, z)$  de l'espace et on cherche à déterminer la forme mathématique de la force que la distribution exerce sur cette charge. On peut tout à fait appliquer une rotation d'une valeur quelconque  $\Delta\theta$  à la distribution de charges objet sans modifier le problème. La force qui s'exerce sur la charge objet et la même. Ceci est équivalent à appliquer une rotation d'un angle  $-\Delta\theta$  à la charge située au point  $M$  qui devient  $M'(r, \theta - \Delta\theta, z)$ . Donc le *module* de la force que ressent une charge électrostatique en  $M$  est la même que celui que ressent

une charge électrostatique en  $M'$  (mais bien entendu son *orientation* est différente.



**Propriété 12** : **La force électrostatique exercée sur une charge objet par une distribution invariante par rotation autour de certains axes ne dépend pas des variables associées à ces rotations.**

**Ex. 1 - 13** : Invariances

Considérons une boule chargée en volume telle que la distribution de charge soit  $\rho(r, \theta) = a r \cos(\theta)$ .

Quel est le système de coordonnées le mieux adapté pour traiter ce problème ?

Quelle sont les invariances du problème ?

## 1.7 Symétrie

### 1.7.1 Principe de Curie.

Pierre Curie<sup>17</sup> a publié en 1894 un mémoire intitulé "Sur la symétrie dans les phénomènes physiques" dans lequel il énonce les deux propositions suivantes :

- "Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits."

- "Lorsque certains effets révèlent une cause de dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance." (proposition inverse de la précédente)

On verra par la suite que ce principe est très utile pour simplifier les formes mathématiques des solutions attendues pour certains problèmes en électrostatique.

**principe** : la symétrie des causes se retrouve dans les effets

Il faut entendre par cause le système étudié, et par effet la grandeur physique mesurée.

### 1.7.2 Symétrie plane

Considérons une distribution de charges, notée  $\Omega$ , et un plan  $\pi$  de l'espace. Le plan  $\Pi$  est plan de symétrie de la distribution de charge si tous les points de l'espace vérifient la propriété suivante :



**Propriété 13** : **le plan  $\Pi$  est plan de symétrie de la distribution  $\Omega$  si à tout point  $C$  de la distribution ayant pour projection  $H$  sur le plan  $\Pi$  on peut associer le point  $C'$  donné par  $\vec{CC'} = 2\vec{CH}$  tel que  $\rho(C) = \rho(C')$**

En règle générale, lorsqu'on remarque un plan de symétrie (ou plusieurs) dans une distribution, il est judicieux de placer l'origine du repère sur ce plan ainsi que deux axes du repère qu'on utilisera. La figure ci-dessus représente une pyramide à base carrée supposée chargée de façon uniforme en volume. Le repère cartésien est placé de sorte à ce que le plan  $yOz$  soit le plan de symétrie du problème. On a alors :

$$\rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) \quad \forall x, y, z \quad (1.7)$$

**Ex. 1 - 14** : Plan de symétrie.

Donner des plans de symétrie d'une boule, d'un parallépipède, d'un tétraèdre, d'une tore et d'un cylindre.

<sup>17</sup>Pierre Curie - 1859 Paris - 1906 Paris - Prix Nobel de Physique en 1903 (avec Marie Curie et Henri Becquerel).





Figure 1.10: Pyramide à base carrée présentant quatre plans symétrie.

**Ex. 1 - 15 :** Plan de symétrie d'une distribution.

Considérons une boule chargée en volume telle que la distribution de charge soit  $\rho(r, \theta) = a r \cos(\theta)$ . Considérons un point  $M$  quelconque repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , dans le repère orthonormé  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , auquel est affecté le trièdre  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ .

Quels sont les plans de symétrie du problème passant par  $M$  ?

**1.7.3 Antisymétrie plane**

Considérons une nouvelle distribution de charges telle que pour tous les points  $C$  de la distribution, le point  $C'$  tel que  $\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{CH}$  porte une distribution de charges opposées alors le plan  $\Pi$  est plan d'antisymétrie. Ce qui se traduit par :

$$\rho(X, Y, Z) = -\rho(-X, Y, Z) \quad (1.8)$$

**Ex. 1 - 16 :** Plan d'antisymétrie.

Reprendre l'énoncé précédent et déterminer s'il existe un plan de symétrie du problème et sous quelle condition ?

**1.7.4 La force et la symétrie plane.**

Considérons une charge  $q$  située au point  $M(x, y, z)$ . Pour calculer la force exercée sur  $q$ , on découpe la distribution en élément infinitésimaux et on somme les contributions.

Considérons un élément de volume  $d\tau$  de la distribution  $\Omega$  autour du point  $C(X, Y, Z)$ . Cet élément de volume porte une charge  $\delta Q = \rho d\tau$ . Comme le plan  $\Pi = (yOz)$  est plan de symétrie, il existe toujours un point  $C'$  symétrique de  $C$  par rapport à  $\Pi$  (donc  $C' = (-X, Y, Z)$ ) tel que le volume infinitésimal  $d\tau$  autour de  $C'$  porte aussi la charge  $\delta Q = \rho d\tau$ . De plus, on a donc :

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = (x - X)\vec{i} + (y - Y)\vec{j} + (z - Z)\vec{k} \quad (1.9)$$

$$\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC'} = (x + X)\vec{i} + (y - Y)\vec{j} + (z - Z)\vec{k} \quad (1.10)$$

de plus notons :

$$r = |CM| \quad \text{et} \quad r' = |C'M| \quad (1.11)$$

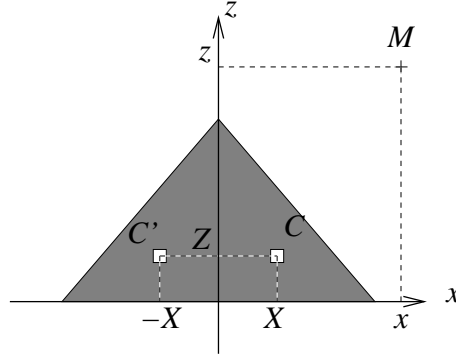


Figure 1.11: Motif présentant une symétrie.

Ces deux éléments créent une force élémentaire sur la charge  $q$  en  $M$  :

$$\begin{aligned} d\vec{F}(M) &= \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\overrightarrow{CM}}{CM^3} + \frac{\overrightarrow{C'M}}{C'M^3} \right) \\ &= \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left[ x \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) - X \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \right] \vec{i} + (y - Y) \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) \vec{j} + (z - Z) \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) \vec{k} \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Considérons maintenant une charge  $q' = q$  située au point  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à  $\Pi$ . Ici, les coordonnées de  $M'$  sont donc  $(-x, y, z)$ . On a maintenant :

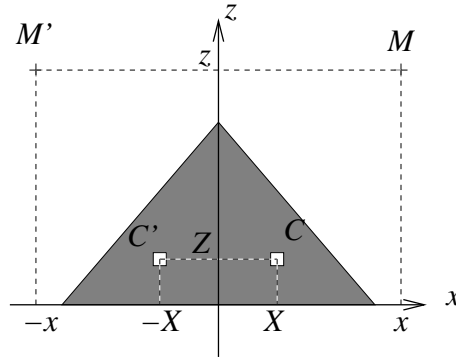


Figure 1.12: Motif présentant une symétrie.

$$\overrightarrow{CM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OC} = -(x + X)\vec{i} + (y - Y)\vec{j} + (z - Z)\vec{k} = \text{sym}_{yOz} \overrightarrow{C'M} \quad (1.13)$$

$$\overrightarrow{C'M'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OC'} = -(x - X)\vec{i} + (y - Y)\vec{j} + (z - Z)\vec{k} = \text{sym}_{yOz} \overrightarrow{CM} \quad (1.14)$$

On a donc :

$$r = CM = C'M' \quad \text{et} \quad r' = CM' = C'M \quad (1.15)$$

Les deux éléments de volume créent une force élémentaire en sur la charge  $q$  en  $M'$

$$\begin{aligned} d\vec{F}(M') &= \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\overrightarrow{CM'}}{CM'^3} + \frac{\overrightarrow{C'M'}}{C'M'^3} \right) \\ &= \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ - \left[ x \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) - X \left( \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} \right) \right] \vec{i} + (y - Y) \left( \frac{1}{r'^3} + \frac{1}{r^3} \right) \vec{j} \right. \\ &\quad \left. + (z - Z) \left( \frac{1}{r'^3} + \frac{1}{r^3} \right) \vec{k} \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Nous pouvons comparer les composantes selon  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  de  $d\vec{F}(M)$  et  $d\vec{F}(M')$  et nous obtenons :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_x(M) &= -d\vec{F}_x(M') \\ d\vec{F}_y(M) &= d\vec{F}_y(M') \\ d\vec{F}_z(M) &= d\vec{F}_z(M') \end{aligned} \quad (1.17)$$

ce qu'on peut récrire :

$$d\vec{F}(M) = \text{sym}_{yOz} d\vec{F}(M') \quad (1.18)$$

Cette élément différentiel de force est symétrique par rapport au plan  $\Pi$  à celui trouvé plus haut. Si on somme sur toute la distribution, on on somme des élément donnant des forces symétriques en  $M$  et en  $M'$ . Donc, on a la propriété suivante :



**Propriété 14** : **localisées en des positions symétriques par rapport à un plan de symétrie de la distribution est symétrique.**

Le corrolaire de cette propriété est :



**Propriété 15** : **Si une charge  $q'$  est sur le plan de symétrie d'une distribution, alors la force qui s'exerce sur  $q'$  est dans le plan de symétrie.**

### 1.7.5 La force et l'antisymétrie plane.

Si nous reprenons la démonstration ci dessus avec les mêmes notations, nous avons :

$$\begin{aligned} d\vec{F}(M) &= \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\overrightarrow{CM}}{CM^3} - \frac{\overrightarrow{C'M}}{C'M^3} \right) \\ &= \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left[ x \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) - X \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) \right] \vec{i} + (y - Y) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \vec{j} \right. \\ &\quad \left. + (z - Z) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \vec{k} \right] \end{aligned} \quad (1.19)$$

et pour l'élément différentiel de force en  $M'$  :

$$\begin{aligned} d\vec{F}(M') &= \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\overrightarrow{CM'}}{CM'^3} - \frac{\overrightarrow{C'M'}}{C'M'^3} \right) \\ &= \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left[ x \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) - X \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) \right] \vec{i} - (y - Y) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \vec{j} \right. \\ &\quad \left. - (z - Z) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \vec{k} \right] \end{aligned} \quad (1.20)$$

Nous voyons que ce résultat mène de façon générale à :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_x(M) &= d\vec{F}_x(M') \\ d\vec{F}_y(M) &= -d\vec{F}_y(M') \\ d\vec{F}_z(M) &= -d\vec{F}_z(M') \end{aligned} \quad (1.21)$$

Donc sur le plan de symétrie ( $X = 0$ ), nous avons  $d\vec{F}(M) = -d\vec{F}(M')$ . Ce qui conduit à la propriété suivante :



**Propriété 16** : **Si une charge  $q'$  objet est sur le plan d'antisymétrie d'une distribution, alors la force qui s'exerce sur  $q'$  est perpendiculaire au plan d'antisymétrie.**

---

## En résumé

---

- La charge électrostatique est le concept de base de l'électrostatique
- Il existe des charges positives et des charges négatives.
- Deux charges de même signes se repoussent
- Deux charges de signes contraires s'attirent
- La charge totale d'un système de charges est la somme des charges.
- La force de coulomb exercé par une charge  $q$  sur une charge  $Q$  distante de  $r$  est

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \vec{u}_r$$

- La quantité de charge élémentaire d'une distribution de charge continue autour d'un point  $C$  s'écrit :
  - $\delta q(C) = \lambda(C) dl$  si la distribution est linéique
  - $\delta q(C) = \sigma(C) dS$  si la distribution est surfacique
  - $\delta q(C) = \rho(C) d\tau$  si la distribution est volumique
-

## Chapitre 2

# Le Champ Électrostatique.

*Le concept de force tel que nous l'avons utilisé précédemment nécessite de faire interagir une charge (source) localisée dans l'espace sur une autre charge (objet) localisée en un autre point. Nous allons introduire dans ce chapitre la notion de champ électrique créé par une distribution de charges sources. La forme du champ sera déduite de celle de la force électrique. Nous montrerons l'intérêt de calculer une telle fonction mathématique et donnerons quelques exemples pour des distributions particulières.*

### 2.1 Définition du champ électrostatique créé par une charge.

Nous avons vu au chapitre précédent que la forme de la force électrostatique qu'une charge  $Q$  exerce sur une charge  $q$  est proportionnelle à  $Q$  et à  $q$ . Dans cette équation, on voit qu'on peut séparer la charge objet  $q$ , sur laquelle s'exerce la force, d'une charge source  $Q$  qui "créent" la force. On peut alors définir une quantité qui s'avèrera très utile par la suite qui est le champ électrostatique créé par la charge source  $Q$  partout dans l'espace. En un point  $\vec{r}$ , le champ vaut en :

☞ **Définition 7** : 
$$\vec{E}_Q(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{Q \rightarrow q}}{q}$$

où  $q$  est une charge localisée au point  $\vec{r}$ . Le champ s'exprime en  $V/m$  (Volt par mètre).

**Ex. 2 - 17** : Champ créé par un proton dans un atome.

*Considérons le modèle classique de l'atome d'hydrogène, de rayon  $a_0$ , dans lequel l'électron "gravite" autour du proton à une distance  $r \approx a_0 = 0.56 \text{ \AA}$ .*

**17.1.** *Quel est la valeur du champ électrique créé par le proton sur les points de l'orbite de l'électron ?*

**17.2.** *Quelle est la force ressentie par l'électron ?*

Donc le champ électrostatique créé par une charge  $Q$  en un point  $\vec{r}$  est, par définition, la force que ressentirait une charge unité ( $q = 1C$ ) placée en  $\vec{r}$ . La force électrostatique qu'exerce une charge source  $Q$  placée en  $O$  (origine du repère orthonormé) sur une charge objet  $q$  placée en  $\vec{r}$  à

la forme mathématique suivante :

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \quad (2.1)$$

$$= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.2)$$

Donc le champ électrostatique créé par la charge source  $Q$  est :

$$\boxed{\vec{E}_Q(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}} \quad (2.3)$$

Le champ électrostatique créé par une charge unique localisée dans l'espace a donc les propriétés suivantes :


**Le champ électrostatique créé par une charge unique**

- est continu sauf sur la charge source où il diverge
- est radial
- tend vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini
- est dirigé vers l'extérieur si  $Q > 0$
- est dirigé vers l'intérieur si  $Q < 0$

 **Propriété 17** :

## 2.2 Définition du champ électrostatique créé par une distribution de charges discrètes.

Notons  $\Omega$ , un ensemble de charges  $Q_i$  localisée (c.a.d. dont la position est fixée) en  $\vec{r}_i$  dans l'espace. Par extension de la définition du champ créé par une charge, on définit le champ créé par un ensemble  $\Omega$  de charges source :

 **Définition 8** :

$$\boxed{\vec{E}_\Omega(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{\Omega \rightarrow q}}{q}}$$

Un principe fondamental de la physique stipule que les forces externes agissant sur un corps sont additives. Ceci vaut aussi pour l'électrostatique bien sur. On peut écrire la force exercée par la distribution  $\Omega$  sur une charge  $q$  localisée en  $\vec{r}$ .

$$\text{Principe : } \vec{F}_{\Omega \rightarrow q} = \sum_{Q_i \in \Omega} \vec{F}_{Q_i \rightarrow q} \quad (2.4)$$

Nous reprenons la formule de la force électrostatique et nous avons :

$$\vec{F}_{\Omega \rightarrow q} = \sum_{Q_i \in \Omega} \frac{qQ_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_{Q_i}}{|\vec{r} - \vec{r}_{Q_i}|^3} \quad (2.5)$$

$$= q \sum_{Q_i \in \Omega} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_{Q_i}}{|\vec{r} - \vec{r}_{Q_i}|^3} \quad (2.6)$$

Par définition, les quantités sous le signe somme sont les champs créé par chacune des charges sources à l'endroit où est la charge objet. Donc

$$\vec{F}_{\Omega \rightarrow q} = q \sum_{Q_i \in \Omega} \vec{E}_{Q_i}(\vec{r}) \quad (2.7)$$

Avec les eqs. ?? et 2.7, on obtient, avec les deux équation ci dessus, le théorème d'additivité des champs :

**THÉORÈME :** additivité des champs 
$$\vec{E}_\Omega(\vec{r}) = \sum_{Q_i \in \Omega} \vec{E}_{Q_i}(\vec{r})$$

Comme la somme de fonctions continues est une fonction continue alors on a les propriétés suivantes pour le champ électrostatique :

- il diverge sur les charges sources.
- il est continu



**Propriété 18 :**

- il a des dérivées spatiales continues
- il tend vers 0 quand  $\vec{r} \rightarrow \infty$ , s'il n'y a pas de charges à l'infini.

**Ex. 2 - 18 :** Champ créé par deux charges égales

Considérons deux charges égales  $Q$  fixées en  $x = \pm a$ .

18.1. Trouver les lieux où le champ créé par ce système est nul.

18.2. Comment évolue une charge  $q$  placée sans vitesse initiale en l'un de ces point ?

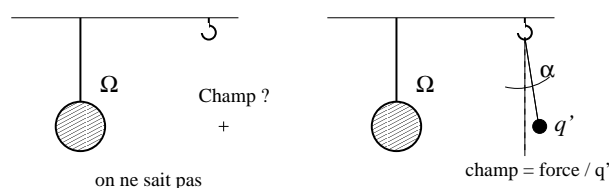
**Ex. 2 - 19 :** Champ créé par deux charges

Considérons une charge  $Q$  fixée en  $x = 0$  est une charge  $2Q$  fixée en  $x = a$ .

19.1. Trouver les points de l'axe  $x$  où le champ créé par ce système est nul.

19.2. Combien le (ou les) point(s) sur l'axe

Il faut bien comprendre que le champ électrique n'a réellement pas de sens physique. il s'agit d'un outil mathématique pour pouvoir travailler plus aisément avec les équations de l'électrostatique (ce que nous verrons dans la suite). Physiquement, il est impossible de détecter un champ à un endroit de l'espace sans y placer une charge objet sur laquelle le champ exerce une force de Coulomb. Il est alors possible de mesurer cette force et en divisant par la valeur de la charge objet, on retrouve la valeur du champ. Il s'agit bien là d'une mesure indirecte du champ par le biais de la force électrostatique.



**Ex. 2 - 20 :** Charge dans des champ électrique et gravitationnel.

Considérons une charge  $q$  de masse  $m$  accrochée au dispositif décrit au dessus. La longueur du pendule est  $l$  et la distance entre le point d'accroche des deux fils est notée  $D$ . La distribution de charge  $\Omega$  est notée  $Q$ . Trouver l'angle  $\alpha$ .

## 2.3 Lignes de champ.

Considérons une distribution de charges sources localisées dans l'espace. Nous pouvons, au moins en théorie, déterminer le champ électrostatique créé par cette distribution en tout point de l'espace.

Plaçons une charge objet  $q > 0$ , sans vitesse initiale en un point  $M_0$  à  $t = 0$  ( $t$  est la variable de temps). La charge ressent une force de Coulomb,  $\vec{F}_{\Omega \rightarrow q} = q\vec{E}_{\Omega}(M_0)$ , qui la met en mouvement. Elle suit une trajectoire, notée  $M(t)$ , qui est donnée par le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a}(t) = q\vec{E}_{\Omega}(M(t))$$

ce qui donne en intégrant :

$$\vec{v}(t) = \frac{q}{m}\vec{E}_{\Omega}(M(t)) + \vec{v}(0) \quad \text{avec } \vec{v}(0) = \vec{0}$$

Cette égalité montre que la vitesse est colinéaire au champ quelque soit  $t$ . La trajectoire est tangentielle au champ électrostatique en tout point. Comme le champ et ses dérivées sont continus, hors des charges sources, alors la trajectoire des charges est continue et ne présente pas de point d'inflexion. On peut aussi remarquer dans ce qui est écrit au dessus que la trajectoire ne dépend pas de la valeur de la charge  $q$  (mais pas la vitesse à laquelle cette trajectoire est parcourue).

Si on place maintenant une charge  $q < 0$ , sans vitesse initiale au point  $M_0$  à  $t = 0$ , la trajectoire suivie par cette charge complète celle décrite au dessus.



**Définition 9** : L'union de ces deux demi trajectoires est une trajectoire continue : c'est une **ligne de champ**.



**Propriété 19** : Deux lignes de champ ne se coupent jamais.

Si cela arrivait en un point que nous notons  $Z$ , alors cela signifierait qu'en  $Z$  le champ électrostatique serait défini par deux vecteurs différents. Cela n'a pas de sens.



**Propriété 20** : Une ligne de champ n'est jamais fermée.

On donnera aussi une démonstration mathématique de ce phénomène dans le chapitre???. On peut aussi comprendre cette propriété en constatant que si une ligne de champ était fermée, une charge objet dans cette ligne de champ suivrait un mouvement en boucle *perpétuel sans apport d'énergie*. Ce qui est impossible.

**Ex. 2 - 21** : Ligne de champ d'une charge.

On considère une charge  $Q$  placé en  $O$ .

**21.1.** Quelles sont les lignes de champ créées par la charge  $Q$ .

**21.2.** Est-ce que la norme du champ est constante sur chacune de ces lignes ?

## 2.4 Champ créé par des distributions ponctuelles de charges

### 2.4.1 Champ créé par deux charges égales

Considérons deux charges électrostatiques de même signe et de même valeurs :  $+|q|$  localisées dans l'espace en deux points notés  $C$  et  $C'$  repéré par  $x = \pm a$ . Nous allons calculer le champ électrostatique en divers régions de l'espace.

sur l'axe  $Oy$ .

Par définition, tous les points  $M$  du plan médiateur de  $CC'$  sont équidistants de  $C$  et de  $C'$ . Supposons que le point  $M$  est sur l'axe  $Oy$  en  $y$  (si ce n'est pas le cas, il suffit de faire tourner le repère  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  autour de  $\vec{i}$  pour que ça le devienne). Nous notons la distance entre une charge et le point objet où on calcule le champ  $d = CM = C'M = (a^2 + y^2)^{3/2}$ .

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{q_C}(M) + \vec{E}_{q_{C'}}(M)$$



$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{CM}}{CM^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{C'M}}{C'M^3}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^3} (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{C'M})$$

Sur la figure ci dessous, on peut voir facilement que  $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{C'M}$  est sur l'axe  $Oy$  et vaut  $2y\vec{j}$  ce que l'on peut démontrer facilement en notant :  $\overrightarrow{CM} = -a\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\overrightarrow{C'M} = a\vec{i} + y\vec{j}$  et en additionnant les deux quantités. On trouve donc pour le champ sur l'axe  $Oy$  :

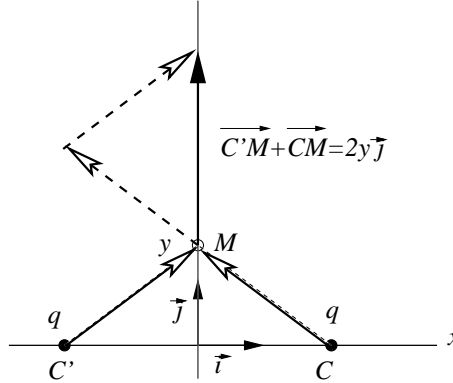


Figure 2.2: Champ électrostatique créé par deux charges égales sur le plan médiateur

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j}$$

- On remarque que ce champ s'annule bien lorsque  $y \rightarrow \pm\infty$ . Ce fait est tout à fait général s'il n'y a pas de charges à l'infini.

- La fonction est impaire :  $\vec{E}(-y) = -\vec{E}(y)$  ce qui est dû à la symétrie du problème par rapport à  $Ox$ . Nous reviendrons sur cet aspect plus tard.

### Sur l'axe $Ox$ .

Le point  $M$  est maintenant en  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ . On a donc  $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = (x-a)\vec{i}$  et  $\overrightarrow{C'M} = (x+a)\vec{i}$ . Donc le champ sur  $Ox$  est donné par :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{q_C}(M) + \vec{E}_{q_{C'}}(M)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2} \right) \vec{i}$$

Tout comme la fonction selon  $Oy$ , on a trouvé ici une fonction impaire qui s'annule à l'infini.

### En tout point $M = (x, y)$ .

Le point  $M$  est maintenant en  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . On a donc :

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = (x-a)\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC'} = (x+a)\vec{i} + y\vec{j}$$

D'où le champ  $\vec{E}(M)$  :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(x-a)\vec{i} + y\vec{j}}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{(x+a)\vec{i} + y\vec{j}}{((x+a)^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

Nous avons calculé la valeur du vecteur champ électrique en tout point  $(x, y)$  et nous avons reporté ces résultats sur la figure ci dessous.

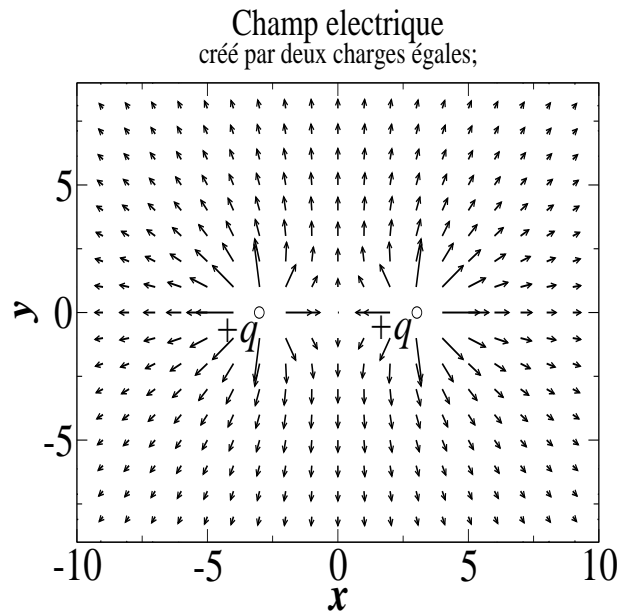



Figure 2.3: Champ électrostatique créé par deux charges égales.


**Ligne de champ.**

Nous avons déjà dit que le champ en lui même n'était pas une grandeur physique et que pour l'observer, il fallait regarder son effet sur une charge électrostatique objet. Donc, plaçons, "par la pensée", une charge positive  $q$  à un endroit quelconque  $\vec{r}$ , dans le champ ci dessus. Cette charge ressent une force de coulomb égale  $q\vec{E}(\vec{r})$ . D'après le principe fondamental de la dynamique, cette force met la charge en mouvement. Comme le champ est dirigé vers l'extérieur en tout point et que la charge est positive, la force de coulomb est dirigée vers l'extérieur quelque soit la position d'origine. La charge  $q > 0$  sera donc repoussée jusqu'à l'infini.

On pouvait facilement anticiper ce résultat puisque toutes les charges ont le même signe ; elles doivent donc toutes se repousser. <sup>1</sup>

Si maintenant, nous plaçons une charge négative dans le champ, la force que celle ci ressent est opposée au champ. Si cette charge objet est dans le demi-espace défini par  $x > 0$ , elle est attirée par la charge source en  $x = a$ . Si elle est dans le demi-espace  $x < 0$ , elle est attirée vers la charge source en  $x = -a$ .

 **Propriété 21** : Si les charges sources sont toutes positives, les lignes de champ vont des charges vers l'infini.

 **Propriété 22** : Si les charges sources sont toutes négatives, les lignes de champ vont de l'infini vers les charges.

**2.4.2 Champ créé par deux charges opposées.**

De la même façon que précédemment, on allons calculer le champ électrique créé par deux charges opposées. Supposons que nous avons une charge  $+|q|$  au point  $C$  de coordonnée  $x = a$  et une charge  $-|q|$  au point  $C'$  de coordonnée  $x = -a$ . En reprenant les mêmes notations que précédemment, on a maintenant :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^3} (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{C'M})$$

<sup>1</sup>Nous négligeons ici, le principe d'action réaction qui voudrait que les charges sources ressentent aussi l'action de la charge objet et subisse une force qui devrait les mettre en mouvement.

ce qui conduit de façon général à :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(x-a)\vec{i} + y\vec{j}}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{(x+a)\vec{i} + y\vec{j}}{((x+a)^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

**Sur l'axe  $Oy$ .**

, la contribution du champ selon l'axe  $Oy$  s'annule et on a :

$$\vec{E}(M) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \vec{i}$$

qui est dirigé selon  $-x$ . De plus cette quantité tend bien vers 0 quand  $y \rightarrow \infty$

**Sur l'axe  $Ox$ .**

La contribution sur l'axe  $Ox$ , qui l'axe de symétrie du système est :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x-a}{|x-a|^{3/2}} - \frac{x+a}{|x+a|^{3/2}} \right) \vec{i}$$

- quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$ , cette fonction tend bien vers 0
- quand  $x = 0$ , on obtient bien la même chose qu'au dessus.

**En tout point  $M(x, y)$**

Le champ électrostatique qui règne partout dans l'espace est tracé sur la figure ci dessous. Il a été calculé numériquement en tout point du plan.

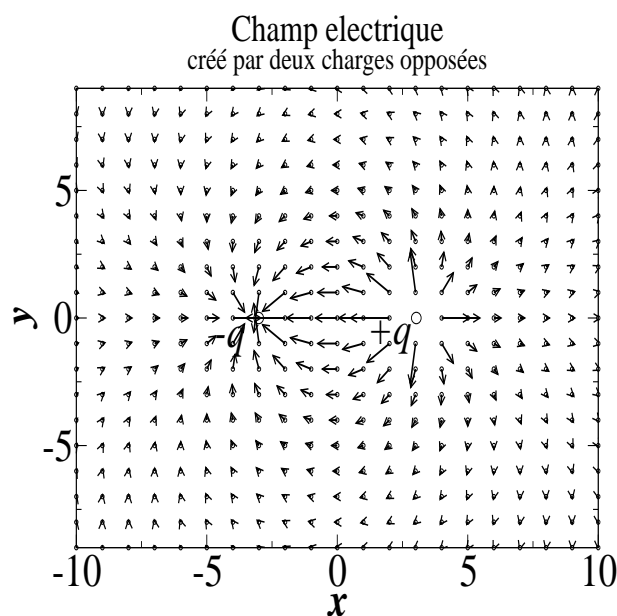


Figure 2.4: Champ électrostatique créé par deux charges opposées.

**Ligne de champ.**

Choisissons un point  $M(x, y)$  quelconque dans le plan mais pas sur l'axe  $Ox$ .

Plaçons en  $M$  une charge  $q > 0$ . Cette charge ressent une force de Coulomb dirigée dans le sens de la ligne de champ en  $M$ . Elle est donc mise en mouvement dans le sens de la ligne de champ. Nous constatons que sa trajectoire l'emmènera sur  $-Q$ .

En ce même point  $M(x, y)$ , plaçons maintenant une charge  $q' < 0$ . La charge  $q'$  ressent une force opposée aux lignes de champ. Nous voyons qu'en remontant les lignes de champ, la trajectoire de cette charge fini sur  $+Q$ .

L'axe  $Ox$  est ici particulier : c'est l'axe de symétrie du problème. Si une charge  $q > 0$  est placée sur l'axe  $Ox$  en  $x > a$ , la force qu'elle ressent est dirigée selon  $Ox$ . Elle a une trajectoire qui tend à expulser les charges jusqu'à l'infini.

Si à la place de la charge  $q > 0$ , on place une charge  $q' < 0$ , celle ci adoptera une trajectoire qui l'emmènera sur  $+Q$ .

On donc la deux lignes de champ particulières qui sont sur l'axe de symétrie du système :

- l'une va de  $-\infty$  à  $-Q$
- l'autre va de  $\infty$  à  $+Q$

## 2.5 Champ créé par quatre charges.

Nous considérons maintenant quatre charges situées sur les coins d'un carré d'arête  $2a$ . Nous plaçons deux charges  $+|q|$  en  $C_1 = (-a, -a)$  et  $C_3 = (a, a)$  et deux charges  $-|q|$  en  $C_2 = (-a, a)$  et  $C_4 = (a, -a)$ . Nous calculons le champ créé par cette distribution en  $M = (x, y)$ . Déterminons les vecteurs utiles au calcul:

$$\overrightarrow{C_1M} = (x + a) \vec{i} + (y + a) \vec{j}$$

$$\overrightarrow{C_2M} = (x + a) \vec{i} + (y - a) \vec{j}$$

$$\overrightarrow{C_3M} = (x - a) \vec{i} + (y - a) \vec{j}$$

$$\overrightarrow{C_4M} = (x - a) \vec{i} + (y + a) \vec{j}$$


Et nous en déduisons une forme analytique du champ :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(x + a) \vec{i} + (y + a) \vec{j}}{((x + a)^2 + (y + a)^2)^{3/2}} - \frac{(x + a) \vec{i} + (y - a) \vec{j}}{((x + a)^2 + (y - a)^2)^{3/2}} + \frac{(x - a) \vec{i} + (y - a) \vec{j}}{((x - a)^2 + (y - a)^2)^{3/2}} - \frac{(x - a) \vec{i} + (y + a) \vec{j}}{((x - a)^2 + (y + a)^2)^{3/2}} \right)$$

On peut éventuellement calculer la valeur du champ sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  facilement, mais ce n'est pas notre problème ici. Nous avons calculé et tracé le champ partout dans l'espace sur la figure ci dessous.

Les remarques faites pour le cas précédent (avec deux charges de signes opposées) restent valables dans ce cas. Elles peuvent être énoncées de la façon suivante :

**Si les charges sources sont positives et négatives,**  
 - les lignes de champ, hors axes de symétrie, vont des charges positives vers les charges négatives.  
 - les lignes de champ, sur les axes de symétrie, vont des charges vers l'infini

 **Propriété 23** :

### Lignes de champ

Nous voyons ici encore que les observations faites pour le cas précédent restent valables.

- Les lignes de champ sur les axes de symétrie diverge entre  $-\infty$  et la première charge rencontrée ainsi qu'entre la dernière charge et  $+\infty$ .

- Sinon, elles naissent sur les charges positives et finissent sur les charges négatives.

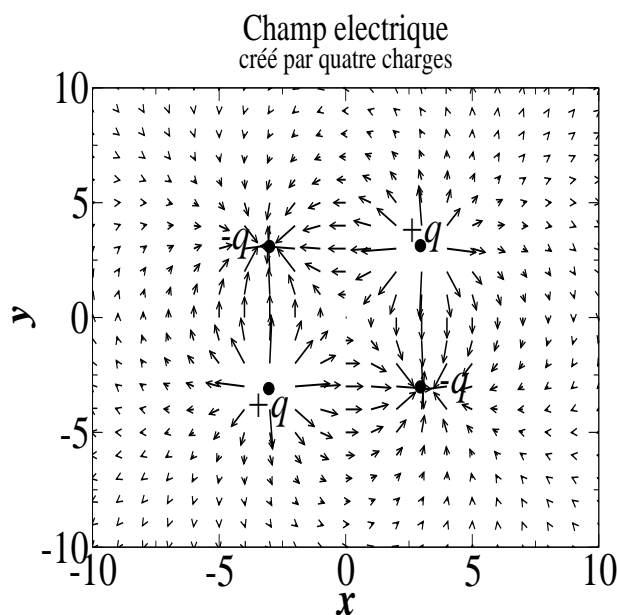


Figure 2.5: Champ électrostatique créé par quatre charges.

## 2.6 Champs électrique créé par une distribution linéique uniforme.

Nous considérons, ici un fil métallique très long, de longueur  $L$ . Ce fil est extrêmement fin et nous considérons que son diamètre tend vers 0. Il porte une charge nette  $Q$  répartie uniformément sur la longueur du fil. Nous avons vu que d'après la définition de la distribution linéique de charges, la quantité élémentaire de charges portée par  $dz$  est :  $\delta q = \lambda dz$  Cette quantité de charge créé, la quantité élémentaire de champ électrostatique en  $M(r, \theta, z)$  :

$$d\vec{E}(r, z) = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} \quad (2.8)$$

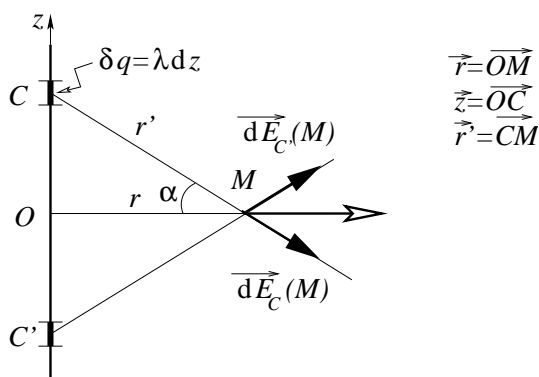


Figure 2.6: Fil infini portant une densité linéique de charges.

On a  $\overrightarrow{OC} = z\vec{k}$  et  $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$ . Donc on déduit le vecteur entre les charges en  $z$  et le point où on calcule le champ :

$$\vec{r}' = \overrightarrow{CM} = \rho\vec{u}_\rho - z\vec{k}$$

Cette quantité est bien indépendante de  $\theta$  puisque le problème admet une symétrie par rotation autour de  $Oz$ . D'où, on peut récrire l'élément différentiel de champ dû aux charges  $\delta Q$  en contenue dans le segment de longueur infinitésimale  $dz$  localisée en  $z$  :

$$d\vec{E}(z, r) = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{r\vec{u}_r - z\vec{k}}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.9)$$

$$\vec{E}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{E}(z, r) \quad (2.10)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\vec{u}_r - z\vec{k}}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz \quad (2.11)$$

$$= \frac{\lambda\vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz}_{I_r} - \frac{\lambda\vec{k}}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz}_{I_z} \quad (2.12)$$

$$= \quad (2.13)$$

La fonction à intégrer dans  $I_1$  est impaire :  $\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{-z}{(r^2+(-z)^2)^{3/2}}$ . Son intégrale selon  $z$  entre des bornes opposées donne donc 0.

Pour calculer intégrale  $I_2$ , remarquons auparavant les relations trigonométriques suivantes sur la figure 2.6 :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{r}{(r^2+z^2)^{1/2}} \\ \tan \alpha &= \frac{z}{r} \Rightarrow dz = r \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

L'intégrale se réécrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{r} d\alpha \quad (2.14)$$

$$= \frac{2}{r} \quad (2.15)$$

### Résultat pour le champ

On trouve donc pour le champ électrostatique :

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad (2.16)$$

Ce résultat est en bon accord avec les considération de symétrie et d'invariance que nous avons posées au chapitre 1.

Le champ appartient aux plans de symétrie que sont :

- le plan contenant le fil (plan de la feuille)
- le plan perpendiculaire au fil

Donc les vecteurs  $\vec{E}(M)$  sont selon  $\vec{u}_r$ .

Le champ est fonction de la seule variable qui ne présente pas d'invariance

- le problème est invariant par translation selon  $Oz$
- le problème est invariant par rotation autour de  $Oz$
- le problème est dépendant de  $r$

Donc le module de  $\vec{E}(M)$  ne doit dépendre que de  $r$ .

## 2.7 Champs électrique créé par une distribution surfacique uniforme.

Nous considérons maintenant un disque métallique, de rayon  $a$ , neutre sur lequel nous transférons une quantité de charge  $Q$ . Le disque porte alors une densité de charge surfacique :

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$$

Nous allons calculer le champ électrostatique sur l'axe du disque.

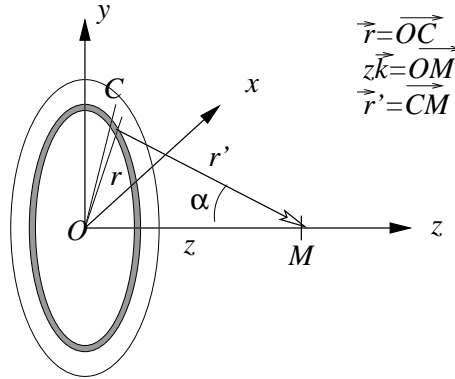


Figure 2.7: disque portant une densité surfacique de charges.

Tout les plans contenant l'axe du disque sont des plans de symétrie. Le champ (qui appartient à tous les plan de symétrie du problème) est donc selon  $Oz$  (l'axe du disque). De plus comme le point  $M$  est sur l'axe on a le module de  $\vec{E}(M)$  qui ne dépend que de  $z$  :

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{k}$$

Donc la contribution intéressante pour calculer le champ électrostatique est seulement la projection de  $\vec{E}(M)$  sur  $Oz$  ; autrement dit il suffit d'intégrer les contributions,  $E(M) \cos \alpha$ , dus à chaque élément de surface  $dS$  :

$$E(z) = \int_{\text{disque}} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cos \alpha \quad (2.17)$$

avec

$$dS = r dr d\theta$$

que l'on peut tout de suite intégrer selon  $\theta$  puisque nous avons une symétrie de rotation autour de  $Oz$  :

$$dS = 2\pi r dr$$

Nous choisissons  $\alpha$  comme variable d'intégration et nous avons les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} r' &= \frac{z}{\cos \alpha} \\ r &= z \tan \alpha \Rightarrow dr = z \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

On injecte les nouvelles variables dans l'intégrale :

$$E(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\alpha_0} \underbrace{\frac{\cos^2 \alpha}{z^2}}_{\frac{1}{r'^2}} \underbrace{2\pi z^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} d\alpha}_{dS} \cos \alpha \quad (2.18)$$

ce qui donne

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_0) \quad (2.19)$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \quad (2.20)$$

Cette solution est valable pour  $z > 0$ .

Le plan  $z = 0$  est plan de symétrie du problème. On doit donc avoir

$$E(-z) = -E(z)$$

Donc la solution globale du champ sur l'axe est :

- si  $z > 0$  alors,  $E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$
- si  $z < 0$  alors,  $E(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$

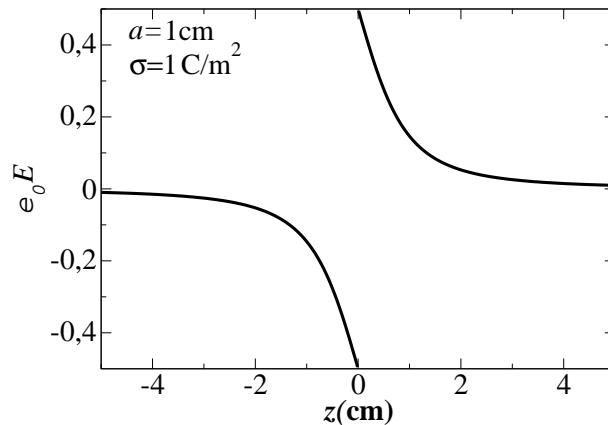


Figure 2.8: Champ électrique créé par un disque chargé en surface.

La figure ci dessus montre la valeur du champ électrique (multipliée par  $\epsilon_0$ ) en fonction de  $z$  (en centrimètres) créé par un disque de 1 cm de diamètre portant une densité de charge surfacique  $\sigma = 1\text{C/m}^2$ .

Ce champ décroît très rapidement vers 0 en fonction de  $z$ , ce qui est cohérent avec le fait que, puisqu'il n'y a pas de charges à l'infini, le champ électrique doit tendre vers 0 quand  $z$  tend vers l'infini.

D'autre part, on constate une discontinuité du champ en  $z = 0$ , c'est à dire sur le disque chargé en surface. Nous commenterons plus loin l'origine physique de cette discontinuité.

## 2.8 Expérience de Millikan. Mesure de $|e|$ .

L'expérience de Millikan a permis au début en 1909 de mettre en évidence la nature quantique de l'électron autrement que sa charge est indivisible. Il reçu le prix Nobel de physique pour cette expérience en 1923. La quantité de charges portée par un système est donc quantifiée au sens quelle est forcément un multiple de  $|e|$ .

Le dispositif utilisé par Millikan est constitué de deux parties. Des gouttes d'huile, sont injectées dans la partie supérieure par une buse. Le frottement des gouttes sur le corps de la buse est suffisant pour les électriser. Ces gouttes tombent ensuite dans cette enceinte sous l'effet de la gravité.

L'équation du mouvement de ces particules est donnée par :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{archi}} + \vec{F}_{\text{frot}}$$

où

- $P = mg = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho g$  est le poids
- $F_{\text{archi}} = -m_{\text{air}}g = -\frac{4}{3}\pi a^3 \rho' g$  est la poussée d'Archimède avec  $a$  le rayon de la goutte,  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$  la densité de l'huile,  $\rho'$  la densité de l'air.
- $F_{\text{frot}} = -6\pi\eta a v$  est la force de frottement avec la viscosité de l'air :  $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ N.s.m}^{-2}$

L'équation fondamentale de la dynamique se réécrit facilement :



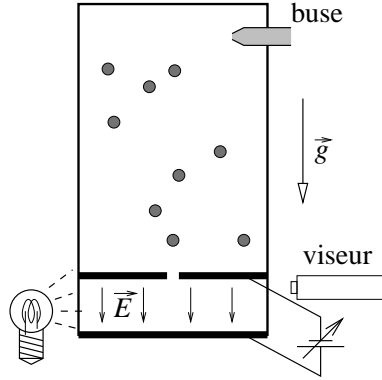


Figure 2.9: Expérience de Millikan.

$$T \frac{dv}{dt} + v = v_0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T = \frac{1}{6} \frac{a^2 \rho}{\eta} \\ v_0 = \frac{1}{6} \frac{a^2 (\rho - \rho')}{\eta} g \end{cases}$$

La solution de cette équation différentielle est simplement :

$$v(t) = v_0 [1 - \exp(-t/T)]$$

Si les gouttes ont un rayon de  $10^{-5}$  mètre, on a  $T =$ . Cette valeur est donc facilement atteinte et on a toujours  $t \gg T$  quand les gouttes atteignent le fond de l'enceinte où elles ont toujours la propriété :  $v = v_0$ .

A ce moment, Millikan mesurait la vitesse des gouttes en projetant leur ombre et il les observait avec un microscope dont la lentille portait une échelle graduée tout en mesurant leur temps de passage devant cette lentille. Ayant mesuré  $v_0$ , il en déduisait facilement le rayon de chaque goutte :

$$a = \sqrt{\frac{6\eta v_0}{(\rho - \rho')g}}$$

Le fond de cette enceinte supérieure étant percé d'un trou certaines gouttes passent dans une partie inférieure où les gouttes continuent de chuter mais entre les électrodes que sont les parois de cette enceinte inférieure. Les électrodes créent un champ  $\vec{E}$  dirigé vers le bas. Les détails concernant la création de champ seront vu dans les chapitres suivants. Aux bilan des forces précédent, il faut ajouter la force de Coulomb :  $\vec{F}_C = q\vec{E}$  dans l'équation fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho - \rho') g - 6\pi \eta a v + qE$$

On cherche alors à régler le champ électrique de façon à immobiliser la goutte dans sa chute, ce qui revient à poser dans l'équation au dessus,  $v = 0$  et  $dv/dt = 0$ . Donc la valeur de  $E$  qui permet d'immobiliser la goutte correspond à :

$$q = -\frac{4}{3} \pi a^3 (\rho - \rho') \frac{g}{E}$$

La mesure précédente ayant permis de déterminer  $E$ , on a donc  $q$ . On peut encore injecter le résultat trouvé pour  $a$  dans l'équation au dessus de sorte à remplacer  $(\rho - \rho')g$  et on a :

$$q = -\frac{6\pi \eta a v_0}{E}$$

La charge  $q$  trouvée n'est pas la charge d'un électron, mais la charge des électrons qui électrisent la boule. Millikan a reproduit cette expérience sur un nombre considérable de gouttes d'huile. Il en a déduit que les charges portées étaient toutes multiples de...  $|e| = 1.592 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  ! On sait que l'erreur de ce résultat est due au fait qu'il a utilisé dans ces calculs une valeur fautive de la viscosité de l'air  $\eta$ .

D'autres groupes ont refait cette expérience, et on obtenu des valeurs conformes à la valeur actuellement admises :  $|e| = -1.602 \, 176 \, 462 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

---

## En résumé

- 
- Le champ électrostatique créé en un point  $M$  par une charge est défini comme étant la force que ressentirait une charge objet positionnée au point  $M$  divisée par la valeur de cette charge objet.
  - Le champ électrostatique créé par un ensemble de charges est la somme des champs électrostatiques créés par chacune des charges.
  - Lorsqu'on connaît la distribution des charges électrostatique dans une région de l'espace et qu'on veut calculer le champ en un point  $M$ ,
    - on décompose la distribution en éléments de charges  $\delta q(C)$  autour d'un point  $C$  et on note  $\vec{r} = \overrightarrow{CM}$
    - on calcule l'élément différentiel de champ  $dE$  en  $M$  dû à la charge  $\delta Q$  en  $C$  :  $dE(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq(C) \frac{\vec{r}}{r^3}$
    - on intègre sur l'ensemble de la distribution.
-

## Chapitre 3

# Energie et potentiel Électrostatique.

*Nous avons vu au chapitre précédent qu'il est possible d'associer à chaque point de l'espace, une grandeur vectorielle que nous avons défini comme étant le champ électrostatique. Ce champ nous sert à déterminer la force qui s'applique sur une charge objet placée en  $M$ .*


*Nous allons voir maintenant que la connaissance de la forme mathématique de la force électrique permet d'introduire le concept d'énergie potentielle d'interaction entre deux charges électriques. La forme de cette énergie est simplement déduite du travail électrique qu'il a fallu exercer sur une charge (objet) électrique ressentant le champ électrique créé par des charges (source) pour l'amener de l'infini jusqu'à sa position.*

*On en déduira qu'on peut associer à chaque point de l'espace une grandeur scalaire, le potentiel, qui est lié très simplement au champ électrique.*

### 3.1 Définition du travail électrostatique.

#### 3.1.1 Circulation d'un champ

La circulation du champ électrostatique  $\vec{E}_\Omega(\vec{r})$  sur la courbe  $\mathcal{T}$  de  $I$  à  $F$  :

 **Définition 10** : 
$$\mathcal{C}_\Omega = \int_{I(\mathcal{T})}^F \vec{E}_\Omega(\vec{r}) \, d\vec{l}(\vec{r}) \quad (3.1)$$

Cette quantité est une définition mathématique d'une grandeur qui permettra d'alléger les notations des calculs de travail et d'énergie potentielle. D'après les propriétés du champ électrostatique créé par une distribution de charges, on a :

$$\mathcal{C}_\Omega = \int_{I(\mathcal{T})}^F \sum_{Q \in \Omega} \vec{E}_Q(\vec{r}) \, d\vec{l}(\vec{r}) \quad (3.2)$$

$$= \sum_{Q \in \Omega} \mathcal{C}_Q \quad (3.3)$$

avec :

$$\mathcal{C}_Q = \int_{I(\mathcal{T})}^F \vec{E}_Q(\vec{r}) \, d\vec{l}(\vec{r}) \quad (3.4)$$



**Propriété 24 :** La circulation du champ électrostatique créé par une distribution sur une trajectoire donnée est la somme des circulations créés par les charges de cette distribution sur la même trajectoire.

**Ex. 3 - 22 :** Circulation du champ créé par une charge.

Que vaut la circulation du champ électrique créé par une charge  $Q$  sur le cercle de rayon  $a$  centré sur la charge

Nous allons calculer, maintenant la circulation du champ électrique créé par une charge ponctuelle  $q$  le long de la trajectoire  $\mathcal{T}$ . Le résultat obtenu doit être indépendant du choix de l'origine du

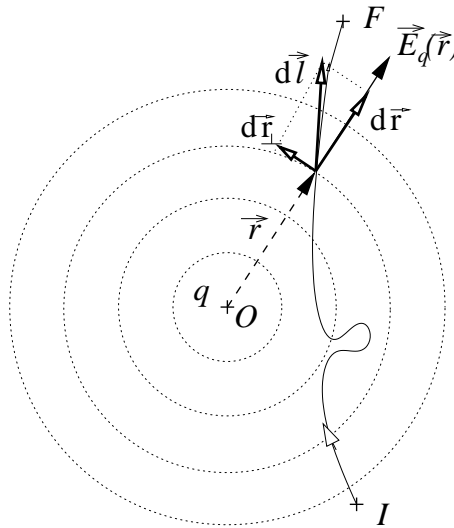


Figure 3.1: Décomposition de  $\vec{E}$  sur un contour donné.

repère. Nous plaçons donc la charge  $q$  à l'origine du repère en  $O$ . en coordonnées sphérique, le champ est donc :

$$\vec{E}_q(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \quad (3.5)$$

De plus, le vecteur  $d\vec{l}(\vec{r})$  peut être décomposé comme une somme de contributions radiale  $dr\vec{u}_r$  et orthoradiale  $dr_\perp\vec{u}_\theta$  :

$$d\vec{l}(\vec{r}) = dr\vec{u}_r + dr_\perp\vec{u}_\theta \quad (3.6)$$

La quantité à intégrer s'écrit alors :

$$\vec{E}_q(\vec{r}) d\vec{l}(\vec{r}) = \underbrace{E_q(\vec{r}) \vec{u}_r \, dr \vec{u}_r}_{E_q(\vec{r}) \, dr} + \underbrace{E_q(\vec{r}) \vec{u}_r \, dr_\perp \vec{u}_\theta}_0 \quad (3.7)$$

$$(3.8)$$

L'intégrale de la circulation du champ s'écrit maintenant :

$$C_Q = \int_{I(\mathcal{T})}^F E_Q(\vec{r}) \, dr \quad (3.9)$$

$$= \int_{r_i}^{r_f} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \quad (3.10)$$

$$= \left[ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f} \quad (3.11)$$

$$C_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right) \quad (3.12)$$

Ce résultat ne dépend que de la position du point initial et de celui du point final.



**Propriété 25** : La circulation du champ électrique est indépendante du chemin utilisé pour aller de  $I$  vers  $F$ .

De plus, on peut constater que si la trajectoire est fermée (ce qui signifie que les deux bornes de l'intégrale sont identiques) alors on a :

$$C_Q = \oint \vec{E}_Q(\vec{r}) \, d\vec{l} = 0 \quad (3.13)$$

Ce qui implique la propriété suivante :



**Propriété 26** :  $C_\Omega = \oint \vec{E}_\Omega(\vec{r}) \, d\vec{l} = 0$

Considérons une distribution de charges immobiles  $\Omega$  (que nous n'explicitons pas) qui crée un champ électrostatique,  $\vec{E}_\Omega(\vec{r})$ , en  $\vec{r}$ . Considérons aussi une charge objet  $q$  localisée en un point  $I$  de l'espace. Par la suite, la charge objet  $q$  et la distribution de charges sources  $\Omega$  seront appelés le *système* en interaction.

Calculons l'énergie qu'il faudrait fournir à ce système pour déplacer infiniment lentement la charge  $q$  du point  $I$  en un point  $F$  dans le champ électrostatique créé par  $\Omega$  en suivant une trajectoire  $\mathcal{T}$ . Cette énergie est le travail qu'il faut exercer sur  $q$  pour lui faire suivre la trajectoire. En tout point  $\vec{r}$  de la trajectoire ce travail est opposé à celui de la force électrostatique,  $\vec{F}_{\Omega \rightarrow q} = q\vec{E}_\Omega(\vec{r})$  que ressent la charge  $q$ . On a donc par intégration curviligne sur toute la trajectoire :

$$W_{\mathcal{T}} = q \int_{I(\mathcal{T})}^F \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{l}(\vec{r}) \quad (3.14)$$

où  $d\vec{l}$  est l'élément différentiel de déplacement le long de la courbe  $\mathcal{T}$ .

Nous voyons déjà que les contributions au travail des éléments de la trajectoire qui présente un déplacement de la charge objet perpendiculaire au champ électrostatique sont nulles :

$$\vec{E}_\Omega(\vec{r}) \perp d\vec{l}(\vec{r}) \implies \delta W = 0$$

Nous savons que le champ électrostatique créé par une charge source, isolée, est radial. On peut l'écrire  $\vec{E}_\Omega(\vec{r}) = E_\Omega(\vec{r})\vec{u}_r$ . Une trajectoire circulaire centrée sur la charge est donnée par :  $d\vec{l}(\vec{r}) = dl(\vec{r})\vec{u}_\theta$ . Ce qui signifie qu'une trajectoire circulaire centrée sur la charge est parcourue sans travail (ni effectué ni reçu). Le modèle classique de base de l'atome consiste en une charge négative (électron) en orbite circulaire autour d'une charge positive (proton). Ce modèle présente les propriétés décrites au dessus et donc le mouvement de rotation de l'électron se déroule à énergie constante (pas de travail apporté ou dépensé). Ce mouvement doit donc s'effectuer éternellement.

C'est une propriété générale des mouvements à force centrale.

L'intégrale de l'équation ci-dessus joue un rôle très important en électrostatique et nous allons en étudier ces propriétés dans le paragraphe suivant.

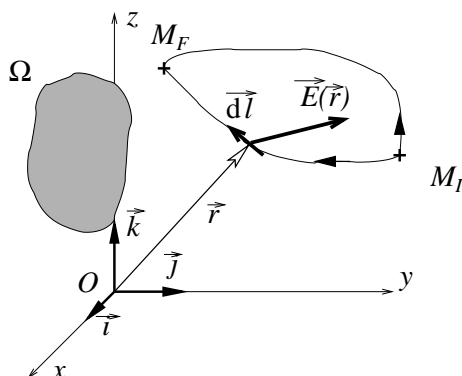


Figure 3.2:

### 3.1.2 Travail électrostatique entre deux points

Le travail  $W_{\mathcal{T}}$  à fournir au système pour déplacer la charge  $q$  de  $I$  à  $F$  dans le champ créé par la charge  $q$  est donc indépendant du chemin suivi :

$$W_{I \rightarrow F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right) \quad (3.15)$$

Ce travail est simplement proportionnel à  $q$ . On peut aussi reconnaître la propriété déjà énoncée qui stipule que le mouvement circulaire se déroule sans fournir ou recevoir du travail car dans ce cas on  $r_i = r_f$ .

#### Ex. 3 - 23 : Travail de déplacement d'une charge.

Considérons une charge  $Q$  placée à l'origine d'un repère. Considérons un point  $M$  de l'espace tel que  $OM = a$  et un point  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à  $O$ . Quel travail faut-il fournir à la charge  $q$  placée en  $M$  pour l'amener en  $M'$  en suivant

**23.1.** un demi cercle centré sur  $O$

**23.2.** le segment de droite  $MOM'$

## 3.2 Energie potentielle.

L'énergie potentielle joue un rôle centrale dans l'étude des phénomènes physique, car un concept fondamental de la mécanique et de la thermodynamique. D'une part, d'un point de vue mécanique la détermination de l'énergie potentielle d'interaction entre une distribution et une charge objet permet de déterminer les positions d'équilibre stables de la charge objet dans l'espace. D'autre part, d'un point de vue thermodynamique (et physique statistique), la courbe de l'énergie potentielle permet de déterminer les probabilité d'apparition du système dans certains état. Dans cette discipline, il serait impossible de travailler avec la force de Coulomb.

### 3.2.1 Energie potentielle.

Si le point  $I$  est rejeté à l'infini, alors le travail est la quantité d'énergie potentielle qu'il a fallut fournir au système pour le "construire". Ce travail est l'opposé de la variation d'énergie potentielle *emmagasinée* par le système.



**Définition 11 :**

$$U_{\Omega \leftrightarrow q} = - \lim_{r_i \rightarrow \infty} W_{\mathcal{T}}$$

Donc l'énergie potentielle d'interaction de la distribution  $\Omega$  avec la charge  $q$  située en  $\vec{r}'$  est donnée par

$$U_{Q \leftrightarrow q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{avec } r = |\vec{r}'| \quad (3.16)$$

D'après le principe d'addition des forces, on a l'énergie potentielle d'interaction d'une charge  $q$  avec une distribution  $\Omega$  :

**THÉORÈME :** 
$$U_{\Omega \leftrightarrow q} = \sum_{q_i \in \Omega} \frac{q_i q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|}$$

### 3.2.2 Energie potentielle d'interaction de deux charges avec une troisième.

Nous avons représenté sur les trois figure ci dessous, les trois exemples possibles d'interaction d'une charge avec deux autres charges sources.

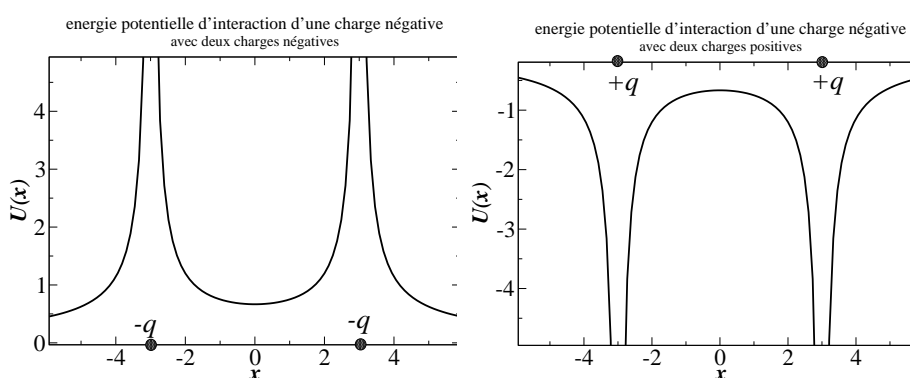


Figure 3.3:

L'interaction d'une charge objet négatives avec deux scharges sources négatives a été tracé sur la figure 3.2.2(a). Cette courbes montre que les minima d'énergie potentielle apparaissent pour  $x = 0$  et  $x \rightarrow \pm\infty$ . Ce résultat peut se retrouver facilement en considérant les forces qui agissent sur la charges objet. Elle ressent une force répulsive de la apt de chaque charge source. Donc si à l'origine elle est entre les deux charges, sa position d'équilibre est équidistante des deux charges. Si elle est à l'extérieur des charges, elle est repoussée indéfiniment. La figure ??(b) montre l'énergie potentielle d'interaction entre une charge objet négative et dexu charges sources positives. on peut déjà remarquer que cette courbe est la symétrique de la précédente. En effet dans la fonction énergie potentielle on a simplement remplacer  $q$  par  $-q$ . De plus les minima d'énergie sont localisés, cette fois sur les charges sources ce qui est du au fait que les forces que ressent la charge objet sont toute deux attractives.

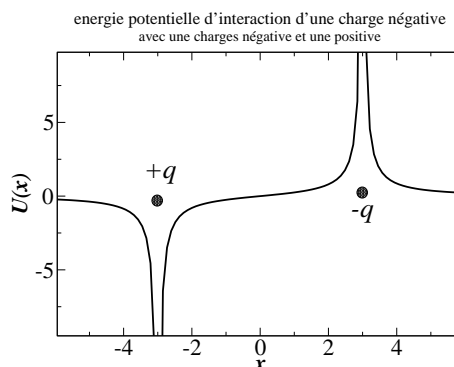


Figure 3.4:

La figure 3.2.2 montre que les minima d'énergie potentielle entre une charge négative et une charge négative source et une charge positive source sont localisés sur la charge positive et en  $+\infty$ . On peut encore comprendre la positions de ces minima en raisonnant avec les forces qui s'exercent sur la charge objet.

Il faut dans noter que dans ces exemples, la valeur de la charge objet n'affecte pas qualitativement les courbes. Si on multiplie la charge objet par 2 (ou bien les charges sources par 2), la courbe sera identique avec simplement un changement de l'échelle  $Oy$ .

### 3.2.3 Relation entre énergie potentielle et force.

D'après les éqs ?? et 3.14, la différentielle de l'énergie potentielle peut s'écrire :

$$dU_{\Omega \leftrightarrow q} = -\vec{F}_{\Omega \rightarrow q}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad (3.17)$$

$$= -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (3.18)$$

De plus l'énergie potentielle est une fonction d'état du système. Il donc possible d'écrire sa différentielle totale exacte comme :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) dz \quad (3.19)$$

En identifiant les deux équations ci dessus, on trouve les relations suivantes :

**THÉORÈME :** 
$$\begin{cases} F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \\ F_y = -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \\ F_z = -\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) \end{cases}$$

Dans les trois équations ci dessus nous avons relié les composantes d'un vecteur (à gauche) aux dérivées spatiales d'une fonction scalaire (à droite). Cette opération mathématique s'appelle un gradient et se note de façon plus compacte :

**THÉORÈME :** 
$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} U$$

## 3.3 Le potentiel électrostatique

### 3.3.1 Définition

En électrostatique, le concept fondamental renseignant sur la dynamique du système est la force électrostatique tandis celui qui renseigne sur la stabilité du système est l'énergie potentielle électrostatique. Au chapitre 2, nous avons relié le vecteur force entre deux charges à un *champ de vecteurs* créé par une charge source dans lequel on peut placer une charge objet et ainsi déterminer facilement la force qui s'exerce sur elle. Il est alors assez naturel d'introduire un *champ de scalaire* créé par une charge (ou distribution de charges) objet et qui permet de calculer l'énergie potentielle d'interaction scalaire d'une charge objet placée dans ce champ.

Ce champ scalaire est le *potentiel électrostatique*. Il est défini par analogie avec le champ électrostatique par :

 **Définition 12 :** 
$$V_q(\vec{r}) = \frac{U_{Q \leftrightarrow q}}{q}$$
 la charge  $q$  est en  $\vec{r}$

C'est le potentiel créé en  $\vec{r}$  par la charge  $q$  placée en  $O$ . Tout comme le champ, ce potentiel n'a pas de sens physique. C'est un outil mathématique. Le potentiel prend son sens physique quand,




on y place une charge objet. On a alors une énergie potentielle d'interaction entre la charge objet et le potentiel créé par la distribution source.

D'après la forme de l'énergie potentielle, on a :

$$V_q(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (3.20)$$

On voit clairement dans cette formule que le potentiel ne dépend que de la charge source  $q$  (comme le champ). Il présente les propriétés suivantes:

 **Propriété 27** :

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &> 0 \text{ si } q > 0 \\ V(\vec{r}) &\text{ décroît avec } r \\ \lim_{r \rightarrow \infty} V(\vec{r}) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} V(\vec{r}) &= \infty \end{aligned}$$

D'autre part si la charge source  $q$  est située en  $\vec{r}_q$  (et non plus à l'origine du système on a :

$$V_q(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} \quad (3.21)$$

Comme les énergies potentielles sont additives, les potentiels le sont aussi :

 **Propriété 28** :

$$V_\Omega(\vec{r}) = \sum_{Q \in \Omega} V_q(\vec{r}) \quad (3.22)$$

### 3.3.2 Relation entre le champ et le potentiel.

Si on considère les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_q(\vec{r}) &= \frac{F_{Q \rightarrow q}}{q} \\ \vec{F}_{Q \rightarrow q} &= - \text{grad } U \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}_q(\vec{r}) = -\frac{1}{q} \overrightarrow{\text{grad}} U \quad (3.23)$$

De plus comme l'opérateur gradient se comporte une dérivée spatiale, on a

$$\frac{1}{q} \overrightarrow{\text{grad}} U = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{U}{q}$$

Comme par définition, on a

$$V_q(\vec{r}) = \frac{1}{q} U_{Q \leftrightarrow q}$$

On trouve une relation fondamentale de l'électrostatique :

$$\boxed{\vec{E}_q(\vec{r}) = - \overrightarrow{\text{grad}} V_q(\vec{r})} \quad (3.24)$$

ce qui s'écrit en coordonnées cartésiennes (mais de façon moins compacte) :

$$\begin{cases} E_{x;q} = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ E_{y;q} = - \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ E_{z;q} = - \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (3.25)$$

On peut écrire l'élément différentiel de potentiel en un point  $M$  sous la forme :

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) dy + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) dz \quad (3.26)$$

d'où en identifiant avec l'équation au dessus, on a

$$dV = -E_x dx - E_y dy - E_z dz \quad (3.27)$$

ce qui s'écrit sous forme compacte :

$$\boxed{dV(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}} \quad (3.28)$$

La différence de potentiel entre deux points est donc simplement l'opposé de la circulation du champ électrique entre ces points

**Ex. 3 - 24 :** Charge dans un potentiel variable.

Considérons une région de l'espace où règne un potentiel tel que  $V(r) = ar^2$  avec  $a > 0$

**24.1.** On place un électron sans vitesse initiale en  $r$  tel  $0 < r < a$ . Quel va être l'effet de la différence de potentiel sur la charge ?

**24.2.** Même question si  $V(r) = ar^2 + V_0$  où  $V_0$  est une constante

**24.3.** Même question si  $V(r) = -ar^2$ .

### 3.3.3 Surface équipotentielle et lignes de champs.

Une surface équipotentielle, de potentiel  $V_0$ , est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $V(M) = V_0$ . Considérons deux points  $M$  et  $M'$  voisins appartenant à une surface  $\pi$  équipotentielle de potentiel  $V_0$ . Nous notons  $d\vec{r} = \overrightarrow{dMM'}$ , l'élément différentiel de longueur. On a donc  $d\vec{r}$  qui appartient au plan  $\pi$ . Si  $d\vec{r}$  est petit alors on peut considérer que le champ en  $M$  et le même que celui en  $M'$ . En intégrant l'équation 3.28, on a donc :

$$V(M') - V(M) = -\vec{E}(M) d\vec{r} \quad (3.29)$$

Hors comme  $M$  et  $M'$  sont sur la même équipotentielle on a  $V(M) = V(M')$ , d'où :

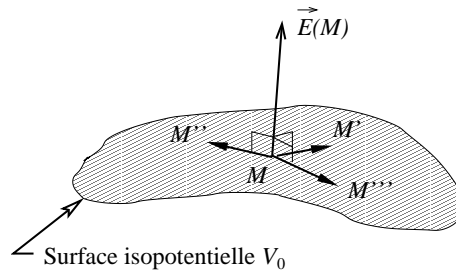


Figure 3.5:

$$\vec{E}(M) d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E}(M) \perp d\vec{r} \quad (3.30)$$

Ceci est vrai pour tous les points  $M'$  voisins de  $M$  et appartenant à la même équipotentielle. Le champ électrique est donc perpendiculaire à tous les segments issus de  $M$  et tangent à la surface équipotentielle. Ceci nous permet d'énoncer la propriété suivante :

**Propriété 29 :** **Le champ électrostatique est toujours perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.**

D'autre part, considérons maintenant deux surfaces équipotentielles coupées par une ligne de champ. Le point d'intersection de la ligne de champ et de l'équipotentielle  $V_0$  est noté  $M'$  et celui avec l'équipotentielle  $V_1$  est noté  $M$ . On a :

$$\vec{E}(M') = \vec{E}(M)$$

$$V(M') > V(M)$$

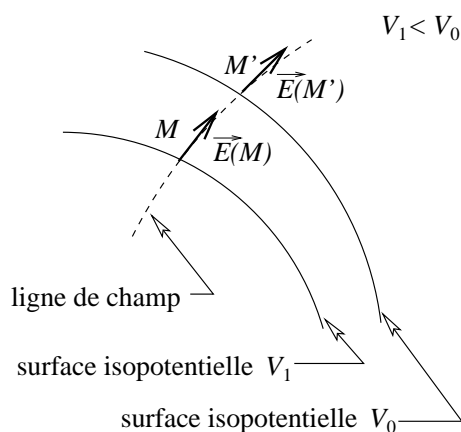


Figure 3.6:

La relation entre le potentiel et le champ (équation 3.28) nous permet d'écrire

$$V(M) - V(M') = - \int_{M'}^M \vec{E}(M) d\vec{l} \quad (3.31)$$

où  $d\vec{l}$  est orienté dans le sens de  $M'$  vers  $M$ . Comme nous avons posé comme hypothèse que :  $V(M') > V(M)$  et  $\vec{E}(M') = \vec{E}(M)$ , l'équation du dessus devient

$$\vec{E}(M) \int_{M_0}^{M_1} d\vec{l} > 0 \Rightarrow \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} > 0 \quad (3.32)$$

d'où on déduit que  $\vec{E}(M)$  est dans le même sens que  $d\vec{l}$ . Ce qui conduit à l'énoncé de la propriété suivante :



**Propriété 30** : Les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants

On a représenté les isopotentielle  $V = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 1.0$  sur la figure 3.3.3

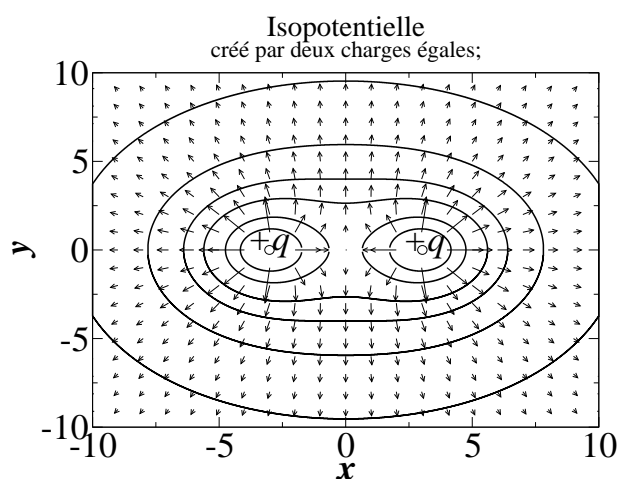


Figure 3.7:

<sup>1</sup>Ceci est vrai parce que le champ est toujours continu.

### 3.3.4 Potentiels créés par des distributions continues de charges.

Comme nous l'avons déjà vu, le potentiel créé par une distribution de charges discrètes est la somme des potentiels créé par chaque charge. Nous pouvons étendre ce principe (qui découle du principe d'addition des forces) aux distributions continues de charges.

#### Distribution volumique de charges.

Le potentiel est donné par :

$$V(r) = \iiint_{\Omega} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}') d\tau}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.33)$$

où  $\rho(\vec{r}')$  est la densité volumique de charges dans l'élément de volume  $d\tau$  autour de  $\vec{r}'$ .

**Ex. 3 - 25 :** Potentiel créé par une boule.

Calculer le potentiel au centre d'une boule de rayon  $a$  chargée uniformément en volume.

#### Distribution surfacique de charges.

Le potentiel est donné par :

$$V(r) = \iint_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(\vec{r}') dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.34)$$

où  $\sigma(\vec{r}')$  est la densité surfacique de charges dans l'élément de surface  $dS$  autour de  $\vec{r}'$ .

**Ex. 3 - 26 :** Potentiel créé par une sphère.

Calculer le potentiel au centre d'une sphère de rayon  $a$  chargée uniformément en surface.

#### Distribution linéique de charges.

Le potentiel est donné par :

$$V(r) = \int_C \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\vec{r}') dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.35)$$

où  $\lambda(\vec{r}')$  est la densité volumique de charges dans l'élément de longueur  $dl$  autour de  $\vec{r}'$ .

**Ex. 3 - 27 :** Potentiel créé par un cercle.

Calculer le potentiel au centre d'un cercle de rayon  $a$  chargé uniformément.

#### Valeur limite du potentiel

Pour que les trois intégrales ci dessus soit calculables, il faut que les distributions  $\Omega$  soient localisées dans l'espace. Autrement dit, si une extension spatiale de  $\Omega$  (c.a.d soit  $x$  soit  $y$  soit  $z$ ) peut tendre vers l'infini, le formalisme intégrale n'est plus utilisable pour calculer les potentiels.



**Propriété 31 :** Le potentiel électrostatique d'une distribution de charges localisées (c.a.d pas de charges à l'infini) tend vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini.

Par exemple le cas d'un fil chargé infini ne peut pas être traité avec une telle expression.

### 3.3.5 Continuité du potentiel.

Faisons l'hypothèse que le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges non spécifiée soit discontinu en un point  $M$  de l'espace accessible à une charge objet  $q$ .

En ce point, au moins une des dérivées par rapport à l'espace de  $V(\vec{r})$  diverge. Par exemple si  $V$  n'est pas continu selon  $x$  alors on a :  $\frac{\partial V}{\partial x} \rightarrow \infty$ . Ce qui implique que le champ électrostatique aurait un module qui divergerait en  $M$  :

$$\vec{E}(M) = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + - \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) dy + - \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) dz$$

$$\Rightarrow E(M) \rightarrow \infty$$

La charge  $q$  ressentirait une force de Coulomb  $F = qE(M)$  de module infini et donc une accélération  $a = F/m$  infinie elle aussi. La particule acquerrait une vitesse et une énergie cinétique infinies ce qui serait en contradiction avec les postulats de la relativité restreinte.

notre hypothèse qui était d'observer des endroits de l'espace où le potentiel peut être nul est donc fausse.



**Propriété 32** : Le potentiel électrostatique est toujours continu

### 3.4 Equation de Poisson et Laplace.

Nous avons introduit le potentiel électrostatique dans le chapitre 3 comme étant relié au champ par la relation :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V = -\vec{\nabla} V$$

De plus nous venons d'établir que :

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Donc nous pouvons relier les variations locales du potentiel à la densité de charges en un point par :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

L'opérateur  $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot)$  que nous venons d'introduire est le laplacien. Nous l'écrivons par la suite  $\Delta = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot)$ . Donc l'équation de Laplace est :

**Équation de Poisson :**

$$\Delta V = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

En coordonnées cartésiennes, cet opérateur s'écrit :

$$\Delta V = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} V) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \left( \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} V(x, y, z) \right)$$

$$= \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \partial V/\partial x \\ \partial V/\partial y \\ \partial V/\partial z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Dans les régions de l'espace où la densité de charge est nulle, on a :

**Équation de Laplace :**

$$\Delta V = 0$$

## En résumé

L'énergie potentielle d'interaction entre deux charges est définie par la relation  $\vec{F} = -\text{grad } U$

Le potentiel créé en un point  $M$  par une charge objet est l'énergie d'interaction entre cette charge est une charge objet qui serait positionnée en  $M$  divisée par la charge objet

grandeur PHYSIQUE	outil MATHEMATIQUE
Observation de l'attraction par friction (Thalès)  <div style="text-align: center;">↓</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin: 5px auto; width: 80%;"> <b>principe 0 :</b> <math>\exists</math> charges électrostatiques (additives)           </div> <div style="text-align: center;">↓</div> Expérience de mesure de force entre charges (Coulomb)  <div style="text-align: center;">↓</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin: 5px auto; width: 80%;"> <b>principe 1 :</b> force entre deux charges <math>\vec{F}_{Q \rightarrow q} \propto \frac{Qq}{r^2} \vec{u}_r</math> </div> <div style="margin-top: 5px; margin-left: 20px;"> <math>\Rightarrow</math> processus dynamique : <math>m_q \vec{a}_q = \sum_Q \vec{F}_{Q \rightarrow q}</math>  <math>\Rightarrow</math> détermination de trajectoire : <math>x_q(t)</math> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center; margin-right: 10px;">↓</div> <div style="text-align: center;">théorème : <math>\vec{F} = -\text{grad } U</math></div> </div> </div>	<div style="text-align: center; margin-top: 100px;"> <math>\xrightarrow{\text{définition}}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin: 5px auto; width: 80%;">             Champ électrique : <math>\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{Q \rightarrow q}}{q}</math> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> <math>\updownarrow</math> corrolaire <math>\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r})</math> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> <math>\xrightarrow{\text{définition}}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin: 5px auto; width: 80%;">             Potentiel électrique : <math>V(\vec{r}) = \frac{U_{Q \leftrightarrow q}}{q}</math> </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin: 5px auto; width: 80%;">             Force dérive d'une énergie potentielle. <math>U \propto \frac{Qq}{r}</math> </div> <div style="margin-top: 5px; margin-left: 20px;"> <math>\Rightarrow</math> processus d'équilibre : <math>\frac{dU}{dr} = 0</math>  <math>\Rightarrow</math> détermination des états stables <math>\{r_1, r_2, \dots\}</math> </div>	

## Chapitre 4

# Le Théorème de Gauss

*Le champ électrique introduit à partir de la force électrostatique permet d'affecter un vecteur à tout point de l'espace qui reflète l'effet qu'aurait les charges sources sur une charge objet située en ce point. Nous allons introduire dans ce chapitre le théorème de Gauss qui utilise la dépendance en  $1/r^2$  du champ électrique créé par une charge pour établir une équation intégrale qui relie le champ électrique (l'effet) aux sources qui le créent (les sources). Nous montrerons comment utiliser ce théorème pour calculer le champ électrique en tout point de l'espace dans des problèmes présentant une géométrie simple.*

### 4.1 Flux de champ électrique.

Par définition, une surface fermée définit clairement un volume intérieur et un volume extérieur.

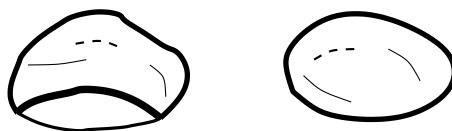


Figure 4.1: Surface ouverte (à gauche) et surface fermée (à droite)

Nous considérons, maintenant, le champ électrique créé par une distribution  $\Omega$ , localisée dans l'espace. Cette distribution crée un champ électrique qui peut être, en principe, déterminé en tout point de l'espace. Pour toute surface  $\Sigma$  fermée on peut définir le flux du champ à travers cette surface :



**Définition 13** :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{\Omega}) = \oiint_{\Sigma} \vec{E}_{\Omega}(\vec{r}) \, d\vec{S}$$

où  $d\vec{S}$  est l'élément différentiel de surface, situé en  $\vec{r}$  et orienté vers l'extérieur et  $\vec{E}_{\Omega}(\vec{r})$  est le champ électrostatique créé en  $\vec{r}$  par la distribution  $\Omega$ .

Comme le champ électrique est additif, on peut écrire le flux de champ créé par la distribution  $\Omega$  comme le flux de la somme des champs créés par les charges sources  $Q_i$  de  $\Omega$  :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{\Omega}) = \oiint_{\Sigma} \sum_{Q_i \in \Omega} \vec{E}_{Q_i}(\vec{r}) \, d\vec{S} \quad (4.1)$$

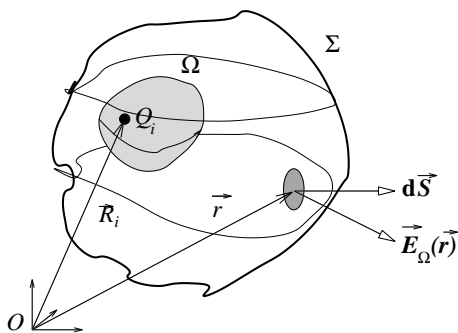


Figure 4.2: Flux de champ à travers une surface fermée.

De plus comme, la position des charges  $Q_i$  ne dépend pas de la surface  $\Sigma$ , on peut intervertir la somme sur les charges  $Q_i$  et l'intégrale de surface :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{\Omega}) = \sum_{Q_i \in \Omega} \oiint_{\Sigma} \vec{E}_{Q_i}(\vec{r}) \, d\vec{S} \quad (4.2)$$

$$= \sum_{Q_i \in \Omega} \Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{Q_i}) \quad (4.3)$$

La quantité qui apparaît dans la somme du membre de droite est simplement le flux du champ électrique créé par la charge  $Q_i$  située en  $\vec{R}_i$ . Cette décomposition ca être très utile pour établir le théorème de Gauss. Nous allons déterminer ce que vaut le flux du champ électrique créé par la charge  $Q_i$  à travers  $\Sigma$  puis nous sommerons ce résultat sur toutes les charges sources.

En reprenant la définition du champ électrique, le flux s'exprime simplement comme :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{Q_i}) = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Sigma} \frac{\vec{r} - \vec{R}_i}{|\vec{r} - \vec{R}_i|^3} \, d\vec{S} \quad (4.4)$$

Nous allons maintenant voir ce que vaut cette intégrale.

**Ex. 4 - 28 :** Flux du champ créé par une charge.

On considère une charge  $Q$  placée en un point  $O$ .

**28.1.** Ecrire l'élément différentiel de surface de la sphère de rayon  $a$  centrée sur  $O$ .

**28.2.** Calculer la surface de la sphère de rayon  $a$  centrée sur  $O$ .

**28.3.** Calculer le flux du champ électrique créé par la charge  $Q$  à travers la surface de la sphère de rayon  $a$  centrée sur  $O$ .

## 4.2 Angle solide

Tout d'abord, le résultat de cette intégrale ne dépend pas de l'endroit où est situé l'origine du repère d'espace. On place alors tout naturellement sur la charge  $Q = Q_i$  en  $O$  (ce qui revient à écrire  $\vec{R}_i = \vec{0}$ ). Le flux du champ créé par  $Q$  à travers  $\Sigma$  s'écrit :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_Q) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Sigma} \frac{\vec{r}}{r^3} \, d\vec{S} \quad (4.5)$$

L'intégrale de l'équation ci dessus est, par définition l'angle solide sous lequel l'origine  $O$  du repère "voit" la surface  $\Sigma$  :

 **Définition 14 :**  $d\Omega_{\text{sol}} = \frac{\vec{r}}{r^3} \, d\vec{S}$  avec  $\Omega_{\text{sol}} = \oiint_{\Sigma} d\Omega_{\text{sol}}$



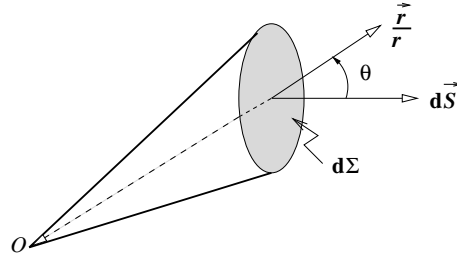


Figure 4.3: Angle solide

Dans l'équation ci dessus les vecteurs  $\vec{r}$  et  $d\vec{S}$  ne sont colinéaires que dans le cas très particulier où la surface de Gauss est une sphère. A l'aide des notations de la figure ci dessus, on peut exprimer le produit scalaire ( $\vec{r} \cdot d\vec{S} = r \cos \theta \, dS$ ) et l'intégrale devient :

$$\Omega_{\text{sol}} = \iint_{\Sigma} \frac{\cos \theta}{r^2} \, d\vec{S} \tag{4.6}$$

De plus, la quantité  $d\Sigma = \cos \theta \, dS$  est la projection de la surface  $dS$  sur le plan perpendiculaire à l'axe du cône. Nous allons maintenant considérer les deux cas (l'origine  $O$  du repère est soit à l'intérieur de la surface  $\Sigma$  soit à l'extérieur pour calculer l'intégrale :

$$\Omega_{\text{sol}} = \iint_{\Sigma} \frac{dS_{\perp}}{r^2} \tag{4.7}$$

- $O$  est à l'extérieur de la surface  $\Sigma$

Considérons que le faisceau qui nous sert à intégrer à une section circulaire. De plus nous notons, l'ouverture du cône  $d\alpha$  (très petit). Ce faisceau coupe deux fois (ou zéro) la surface  $\Sigma$  : une fois la face avant ( $\cos \theta > \pi/2$ ) et une fois la face arrière ( $\cos \theta < \pi/2$ ). La quantité  $d\Sigma$  est

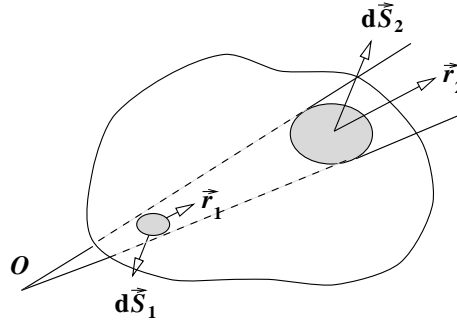


Figure 4.4: Flux d'une charge (extérieure à la surface) à travers une surface.

donc positive pour la face arriere et négative pour la face avant.

On a :

- pour la face arriere :  $dS_{\perp 1} = -\pi(r_1 \, d\alpha)^2$ . C'est la surface du disque de rayon  $r_1 \, d\alpha$ .
- pour la face avant :  $dS_{\perp 2} = \pi(r_2 \, d\alpha)^2$ . C'est la surface du disque de rayon  $r_2 \, d\alpha$ .

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{dS_{\perp 1}}{r_1^2} = -\frac{dS_{\perp 2}}{r_2^2} \tag{4.8}$$

Finalement, on obtient dans ce cas :

$$\Omega_{\text{sol}} = \iint_{\Sigma} \frac{dS_{\perp}}{r^2} = 0 \tag{4.9}$$

- $O$  est à l'intérieur de la surface  $\Sigma$

D'autre part, si l'origine est considérée maintenant à l'intérieur de la surface  $\Sigma$ , on a bien :

$$\frac{dS_{\perp 1}}{r_1^2} = + \frac{dS_{\perp 2}}{r_2^2} \quad (4.10)$$

Cette fois ci, l'intégrale ne s'annule plus. Comme  $dS_{\perp} = r \sin \theta \, d\phi \, r \, d\theta$  est l'élément différentiel

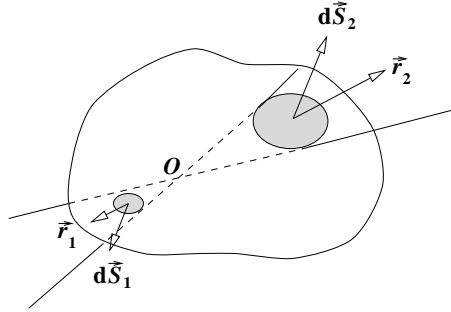


Figure 4.5: Flux d'une charge (intérieure à la surface) à travers une surface.

de surface exprimé en coordonnées sphériques. L'angle solide est donc :

$$\Omega_{\text{sol}} = \oiint_{\Sigma} \frac{dS_{\perp}}{r^2} \quad (4.11)$$

$$= \oiint_{\Sigma} \frac{r \sin \theta \, d\phi \, r \, d\theta}{r^2} \quad (4.12)$$

$$= \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (4.13)$$

$$= 4\pi \quad (4.14)$$

### 4.3 Théorème de Gauss.

Reprenons la forme mathématique du flux de champ électrique créé par une charge  $q$  située en  $O$ , à travers une surface  $\Sigma$  :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_Q) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Sigma} \frac{\vec{r}}{r^3} \, d\vec{S} \quad (4.15)$$

Nous venons de voir que le résultat de l'intégrale de l'expression au dessus ne dépend que de la position du point  $O$  par rapport à la surface  $\Sigma$  :

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\vec{r}}{r^3} \, d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi & \text{si } O \text{ est à l'intérieur de } \Sigma \\ 0 & \text{si } O \text{ est à l'extérieur de } \Sigma \end{cases} \quad (4.16)$$

Donc le flux de la charge  $Q$  s'écrit :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_Q) = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{si la charge } Q \text{ est à l'intérieur de } \Sigma \\ 0 & \text{si la charge } Q \text{ est à l'extérieur de } \Sigma \end{cases} \quad (4.17)$$


Ce qui revient à dire, que seules les charges à l'intérieur de la surface  $\Sigma$  ont un flux non nul. De plus, ce flux est indépendant de la position de la charge à l'intérieur de la surface.

De plus, comme le flux de champ électrique est une quantité additive,  $\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_Q) = \sum_{Q \in \Omega} \Phi_{\Sigma}(\vec{E}_Q)$  on peut calculer très simplement le flux d'une distribution de charges,  $\{Q_i(\vec{R}_i)\}$ , à travers une surface donnée : les charges à l'extérieur de la surface ne contribuent pas au flux alors que les charges à l'intérieur y contribuent pour  $Q_i/\epsilon_0$  chacune. Ce qui s'écrit d'après l'équation 4.3

**THÉORÈME :** de Gauss  $\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{\Omega}) = \sum_{Q_i \text{ intérieur } \Sigma} \frac{Q_i}{\epsilon_0}$

C'est le célèbre théorème de Gauss appliqué à l'électrostatique. La seule hypothèse de ce théorème est la forme du champ électrostatique en  $1/r^2$ , tout le reste n'est qu'une démonstration mathématique.

Ce théorème dit simplement que les charges qui contribuent au *flux du champ électrostatique* à travers une surface sont uniquement celles qui sont incluse dans le volume intérieur à la surface  $\Sigma$ . Si toutes la charges sont à l'extérieur de  $\Sigma$  alors le flux du champ créé par ces charges à travers  $\Sigma$  est nul.

 Cela ne veut pas dire que le champ électrostatique est nul partout sur la surface. Au contraire, il a de façon générale une valeur non nul en tout point de  $\sigma$ . En revanche, c'est la somme des champs sur  $\Sigma$  qui est nul.

## 4.4 Utilisation du Théorème de Gauss.

### 4.4.1 Généralités.

Le théorème de Gauss est un puissant outil de calcul des champs électrostatiques dès que la distribution de charges sources présente un e symétrie. On donne maintenant la démarche générale pour calculer le champ électrostatique créé par une distribution de charge donnée en un point quelconque de l'espace  $M$ .

0. L'étape préliminaire et essentielle est la détermination des symétries et des invariances du problème.

1. A partir des symétries de la distribution, on déduit le système de coordonnées (cartésiennes, cylindrique ou sphérique) le plus adapté au traitement du problème.

2. On écrit alors le champ sous la forme d'un vecteur dans le système de coordonnées choisi

3. Sachant que le champ appartient à tous les plans de symétrie, on ne garde que les contributions vectorielles dont dépend le champ.

4. On élimine les variables qui présentent une invariance.

5. On détermine la surface de Gauss sur laquelle on intègre. C'est la surface qui présente la même symétrie que le problème et qui passe par le point  $M$ . On détermine  $d\vec{S}$  sur cette surface exprimé avec les vecteurs du système de coordonnées.

6. On calcule  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ . en général le produit scalaire s'effectue bien et permet de sortir le champ électrique de l'intégrale qui devint une intégrale de surface.

7. On calcule le terme de gauche qui est simplement la quantité de charges à l'intérieur de la surface de Gauss.

### 4.4.2 Coordonnées sphériques.

#### Champ créé en un point $M$ par une charge ponctuelle.

On considère une charge ponctuelle  $Q$  placée en  $O$ .

1. Ce problème admet bien sur une symétrie sphérique si on place la charge à l'origine du repère. Un point  $M$  est repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, \phi)$ .

2. Le champ s'écrit en symétrie sphérique :

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = \vec{E}_r(r, \theta, \phi)\vec{u}_r + \vec{E}_\theta(r, \theta, \phi)\vec{u}_\theta + \vec{E}_\phi(r, \theta, \phi)\vec{u}_\phi$$

3. Le plan  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$  passant par  $M$  est plan de symétrie du problème.

Le plan  $\vec{u}_r, \vec{u}_\phi$  passant par  $M$  est plan de symétrie du problème.

Donc pour appartenir à ces deux plans, le champ électrique est selon  $\vec{u}_r$

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = E_r(r, \theta, \phi)\vec{u}_r + \underline{E_\theta(r, \theta, \phi)\vec{u}_\theta} + \underline{E_\phi(r, \theta, \phi)\vec{u}_\phi}$$

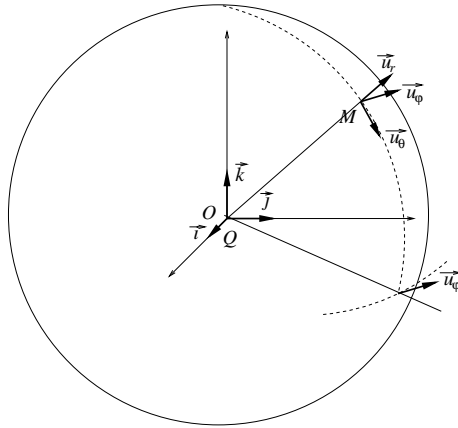


Figure 4.6: Représentation sphérique.

4. Une rotation de la distribution de charges d'un angle  $\theta$  selon  $\vec{u}_\theta$  laisse le problème invariant. De même pour une rotation d'un angle  $\phi$  selon  $\vec{u}_\phi$ . La solution ne dépend donc pas de  $\theta$  ni de  $\phi$  :

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = E_r(r, \theta, \phi) \vec{u}_r$$

5. La surface de Gauss,  $\Sigma$ , est une sphère de rayon  $r = OM$  centrée sur  $O$ . L'élément différentiel de surface est  $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$ .

6. L'intégrale dans le théorème de Gauss s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\vec{E}_\Omega) &= \oiint_\Sigma \vec{E}_\Omega(\vec{r}) \, d\vec{S} \\ &= \oiint_\Sigma \vec{E}(r) \vec{u}_r \, dS \vec{u}_r \\ &= \oiint_\Sigma E(r) \, dS \quad \text{car } \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = 1 \\ &= E(r) \oiint_\Sigma dS \quad \text{car } E(r) \text{ est constant sur } \Sigma \\ &= E(r) 4\pi r^2 \quad 4\pi r^2 \text{ est simplement la surface de la sphère de rayon } r \end{aligned}$$

7. La quantité de charges à l'intérieur de la surface de Gauss est simplement  $\sum_{Q_i \text{ intérieur } \Sigma} = Q$

8. On égalise les deux membres du théorème de Gauss

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}_\Omega) = \sum_{Q_i \text{ intérieur } \Sigma} \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

ce qui donne :

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Comme  $\vec{E}$  est selon  $\vec{u}_r$ , on a la solution ci dessous :

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r}$$

On reconnaît bien dans ce résultat le champ créé par une charge ponctuelle  $Q$  placé en  $O$ . En fait c'est cette définition qui nous a servi pour démontrer le théorème de Gauss.

### Champ créé en un point $M$ par une boule chargée.

On considère une boule de rayon  $a$ , centrée sur  $O$ , portant une charge  $Q$  répartie uniformément en volume. On cherche à déterminer le champ électrostatique en un point  $M$  de l'espace. On note  $r = OM$ .

Les points de 1 à 6 du raisonnement au dessus restent valables. On a donc :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{\Omega}) = \vec{E}(r)4\pi r^2$$

et  $\vec{E}$  est selon  $\vec{u}_r$ .

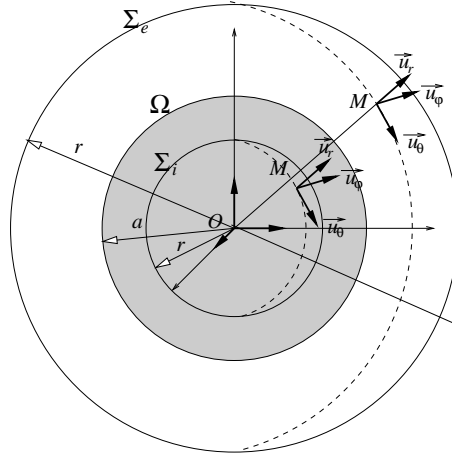


Figure 4.7: Théorème de Gauss appliqué à une boule.

7. Nous allons considérer deux cas pour calculer  $\sum_{Q_{i \text{ int } \Sigma}}$ .

- si  $r > a$  (c.a.d. si  $M$  est à l'extérieur de la boule), alors la boule est à l'intérieur de la surface de Gauss. On a donc

$$\sum_{Q_{i \text{ interieur } \Sigma}} = Q$$

- si  $r < a$  (c.a.d. si  $M$  est à l'intérieur de la boule), alors la boule est à l'extérieur de la surface de Gauss. La quantité de charge à l'intérieur de la surface de Gauss n'est plus  $Q$ . Nous allons calculer la densité volumique de charge dans la boule :

$$\rho = \frac{Q}{V_{\text{boule}}} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

La quantité de charge à l'intérieur de la surface de Gauss est donc :

$$\begin{aligned} \sum_{Q_{i \text{ int } \Sigma}} &= \rho V_{\text{int } \Sigma} \\ &= \rho \frac{4\pi r^3}{3} \\ &= \frac{3Q}{4\pi a^3} \frac{4\pi r^3}{3} \\ &= Q \frac{r^3}{a^3} \end{aligned}$$

8. On égalise les deux membres du théorème de Gauss et on obtient :

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r & \text{si } r > a \\ \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{u}_r & \text{si } r < a \end{cases}$$

Nous avons tracé sur la figure ??, la courbe donnant le module du champ en fonction de  $r$ . On constate que le champ est continu (ce n'est pas toujours vrai).

### 4.4.3 Potentiel créé par la boule.

On peut facilement calculer le potentiel électrostatique créé par la boule à partir du champ :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$$

ce qui conduit en coordonnées sphériques à

$$E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta + E_\phi \vec{u}_\phi = - \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{u}_\phi$$

Comme  $E$  ne dépend que de  $r$ , les deux dernières contributions sont nulles et on a :

$$V(r) = - \int E(r) \, dr$$

Ce qui donne

- à l'extérieur de la boule (c.a.d. pour  $r > a$ ) :

$$\begin{aligned} V_e(r) &= - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0 \end{aligned}$$

Comme dans ce problème il n'y a pas de charges à l'infini alors on a  $V_e(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow \infty$  ce qui permet de déterminer la constante d'intégration  $V_0$  qui est nulle.

- à l'intérieur de la boule (c.a.d. pour  $r < a$ ) :

$$\begin{aligned} V_i(r) &= - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r \, dr \\ &= - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} + V_1 \end{aligned}$$

Comme dans ce cas nous avons posé  $r < a$  nous ne pouvons pas déterminer la constante d'intégration avec les conditions pour lesquelles  $r \rightarrow \infty$ . Cependant nous savons que les potentiels sont toujours continus. Donc nous pouvons écrire :

$$V_i(a) = V_e(a)$$

D'où on déduit  $V_1$  :

$$\begin{aligned} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} + V_1 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \\ V_1 &= \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

d'où le potentiel électrostatique créé par la boule partout dans l'espace Gauss

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si } r > a \\ \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} & \text{si } r < a \end{cases}$$

### 4.4.4 Coordonnées cylindriques.

**Champ créé en un point  $M$  par un fil chargé infini.**

On considère un fil infini portant une densité de charge linéique  $\lambda$ .

1. Ce problème admet bien sur une symétrie cylindrique. On place le point  $O$  sur le fil et le vecteur  $\vec{k}$  selon l'axe du fil. Un point  $M$  est repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$ .

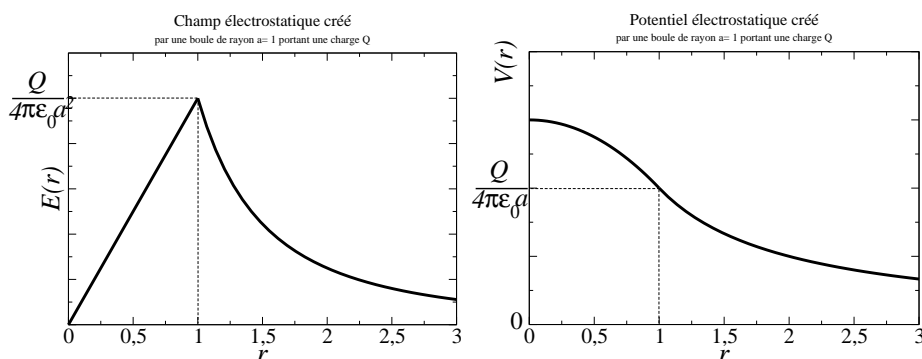


Figure 4.8:

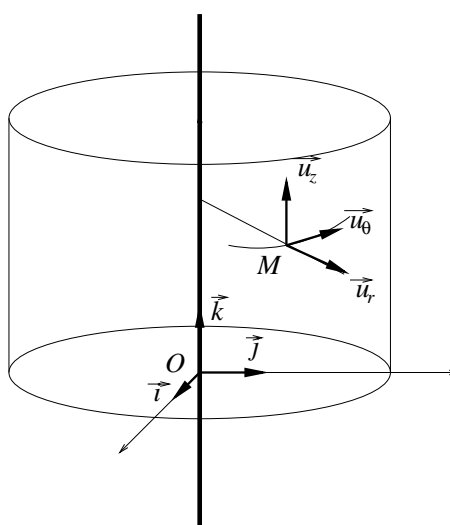


Figure 4.9:

- 2. Le champ s'écrit en symétrie cylindrique :  $\vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}_r(r, \theta, z)\vec{u}_r + \vec{E}_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + \vec{E}_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$
- 3. Le plan  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$  passant par  $M$  est plan de symétrie du problème.  
Le plan  $\vec{u}_r, \vec{u}_z$  passant par  $M$  est plan de symétrie du problème.  
Donc pour appartenir à ces deux plans, le champ électrique est selon  $\vec{u}_r$

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + E_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$$

- 4. Une translation de la distribution de charges d'un vecteur  $\vec{z}$  selon  $\vec{u}_z$  laisse le problème invariant. De même pour une rotation d'un angle  $\theta$  autour de  $\vec{u}_z$ . La solution ne dépend donc pas de  $z$  ni de  $\theta$  :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z)\vec{u}_r$$

- 5. La surface de Gauss,  $\Sigma$ , est un cylindre de rayon  $r = HM$  ( $H$  est la projection de  $M$  sur  $Oz$ ) d'axe  $Oz$  et de longueur  $L$ . Nous voyons immédiatement que la longueur  $L$  n'est pas une donnée physique du problème. Elle caractérise la surface de Gauss qui est seulement un outil mathématique pour calculer les champs. Elle peut être présente dans les calculs mais elle doit disparaître dans le résultat final. Cette surface de Gauss n'est pas aussi simple que la précédente. Elle est l'union du cylindre ouvert  $\Sigma_1$  et des deux disques qui le ferment  $\Sigma_0$  et  $\Sigma'_0$  :

$$\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma'_0 \cup \Sigma_1$$

L'élément différentiel de surface dépend de la surface traitée :

- sur  $\Sigma_1$  :  $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$ .

- sur  $\Sigma_0$  ou  $\Sigma'_0$  :  $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ .

6. L'intégrale dans le théorème de Gauss s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{\Omega}) &= \iint_{\Sigma_0} \vec{E}_{\Omega}(\vec{r}) d\vec{S} + \iint_{\Sigma'_0} \vec{E}_{\Omega}(\vec{r}) d\vec{S} + \iint_{\Sigma_1} \vec{E}_{\Omega}(\vec{r}) d\vec{S} \\ &= \iint_{\Sigma_0} E(r) dS \underbrace{\vec{u}_r \vec{u}_z}_0 + \iint_{\Sigma'_0} E(r) dS \underbrace{\vec{u}_r \vec{u}_z}_0 + \iint_{\Sigma_1} E(r) dS \underbrace{\vec{u}_r \vec{u}_r}_1 \\ &= \iint_{\Sigma_1} E(r) dS \\ &= E(r) \iint_{\Sigma_1} dS \quad \text{car } E(r) \text{ ext constant sur } \Sigma_1 \\ &= E(r) 2\pi r L \quad \text{avec le surface du cylindre ouvert : } 2\pi r L\end{aligned}$$

7. La quantité de charges à l'intérieur de la surface de Gauss est simplement  $\sum_{Q_i \text{ intérieur } \Sigma} = \lambda L$  par définition de la densité linéique de charges.

8. On égalise les deux membres du théorème de Gauss

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{\Omega}) = \sum_{Q_i \text{ intérieur } \Sigma} \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

ce qui donne :

$$E(r) 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

Comme  $\vec{E}$  est selon  $\vec{u}_r$  on a la solution ci dessous :

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r}$$

On reconnaît bien dans ce résultat le champ créé par un fil infini calculé par intégration. De plus, la longueur  $L$  a bien disparu du résultat.

### Champ créé en un point $M$ par un cylindre chargé infini.

Considérons maintenant non plus un fil mais un cylindre infini de rayon  $a$  portant une densité de charges volumiques  $\rho$ . Ce système a bien sur la même symétrie que le précédent. Les points 1 à 6 sont les même qu'au dessus et nous ne répétons que le résultat du point 6 :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{\Omega}) = E(r) 2\pi r L$$

cependant maintenant nous devons distinguer deux cas pour calculer la quantité de charges à l'intérieur de la surface de Gauss.

- si  $r > a$  (c.a.d. si  $M$  est à l'extérieur du cylindre), alors la charge à l'intérieur de la surface de Gauss est celle qui est dans le cylindre de longueur  $L$ . Ce volume est :

$$V_{\text{cyl}} = \pi a^2 L$$

On a donc

$$\sum_{Q_i \text{ int } \Sigma} Q = \rho \pi a^2 L$$

- si  $r < a$  (c.a.d. si  $M$  est à l'intérieur du cylindre), alors la la quantité de charge à prendre en compte est celle à l'intérieur de la surface de Gauss de rayon  $r$ .

$$\begin{aligned}\sum_{Q_i \text{ int } \Sigma} Q &= \rho V_{\text{intérieur de } \Sigma} \\ &= \rho \pi r^2 L\end{aligned}$$



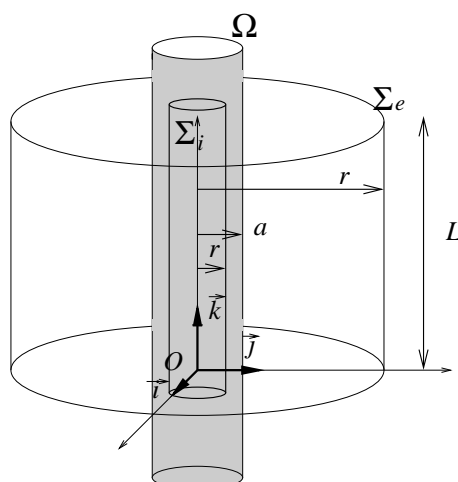


Figure 4.10:

8. On égalise les deux membres du théorème de Gauss et on obtient :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{\Omega}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{Q_i \text{ int } \Sigma} Q \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} \vec{u}_r & \text{si } r > a \\ \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \vec{u}_r & \text{si } r < a \end{cases}$$

#### 4.4.5 Potentiel créé par le cylindre.

On peut facilement calculer le potentiel électrostatique créée par le cylindre à partir du champ :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$$

ce qui conduit en coordonnées cylindriques à :

$$E_r \vec{u}_r + \cancel{E_{\theta} \vec{u}_{\theta}} + \cancel{E_z \vec{u}_z} = - \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_{\theta}} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z}$$

Comme  $E$  ne dépend que de  $r$ , les deux dernières contributions sont nulles et on a :

$$V(r) = - \int E(r) \, dr$$

Ce qui donne

- à l'extérieur du cylindre (c.a.d. pour  $r > a$ ) :

$$\begin{aligned} V_e(r) &= - \int \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} \, dr \\ &= - \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \ln r + V_0 \end{aligned}$$

Dans ce problème il y a des charges à l'infini car le cylindre est infini. On a donc un problème pour déterminer la constante  $V_0$ . Cela n'a en fait pas trop d'importance car il faut se rappeler que le potentiel (tout comme le champ) électrostatique est une grandeur mathématique qui sert soit à déterminer une force (en passant par le champ) soit à déterminer une énergie d'interaction. Si on veut déterminer une force électrostatique entre le cylindre et une charge objet, il faut calculer le champ à l'endroit où est la charge objet. Pour cela on dérive le potentiel par rapport aux variables d'espace. A ce moment du calcul la constante d'intégration disparaît. Si on veut déterminer une

énergie potentielle d'interaction entre une charge objet et le cylindre, on a dans le résultat une constante qui vaut  $qV_0$ . Si on veut savoir si une position est plus stable qu'une autre pour une charge objet, on calcule la différence d'énergie potentielle entre les deux positions. La constante d'intégration disparaît dans cette différence. En fait, il faut garder à l'esprit que les énergies potentielle sont calculées pour être comparées afin de déterminer les états stables d'un système. D'où le fait qu'on puisse ne pas vraiment se soucier de la valeur de la constante d'intégration.

- à l'intérieur du cylindre (c.a.d. pour  $r < a$ ) :

$$\begin{aligned} V_i(r) &= - \int \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr \\ &= - \frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + V_1 \end{aligned}$$

On va prendre de façon complètement arbitraire une constante d'intégration qui nous donne un potentiel nul en  $r = 0$ . Ce qui conduit à  $V_1 = 0$

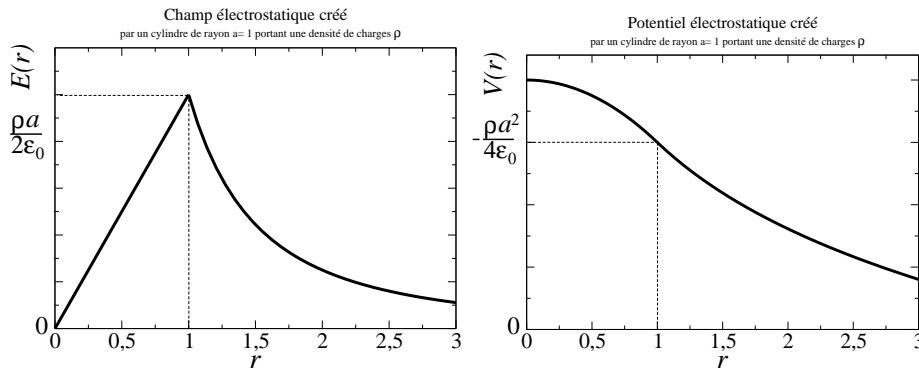


Figure 4.11:

Comme nous savons que les potentiels sont toujours continus. Donc nous pouvons écrire :

$$V_i(a) = V_e(a)$$

D'où on déduit  $V_0$  :

$$\begin{aligned} -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \ln a + V_0 &= -\frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0} \\ V_0 &= \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \left( \ln a - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

d'où le potentiel électrostatique créé par le cylindre partout dans l'espace :

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} & \text{si } r > a \\ \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{a}{r} \right) - \frac{1}{2} \right] & \text{si } r < a \end{cases}$$

#### 4.4.6 Coordonnées cartésiennes.

##### Champ créé en un point $M$ par un plan chargé infini.

On considère un plan infini portant une densité de charge surfacique  $\sigma$ .

1. Ce problème admet bien sur une symétrie plane. On place le point  $O$  sur le plan et les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  selon le plan chargé ( $\vec{k}$  est

2. Le champ s'écrit en symétrie cartésiennes :  $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_x(x, y, z)\vec{u}_x + \vec{E}_y(x, y, z)\vec{u}_y + \vec{E}_z(x, y, z)\vec{u}_z$

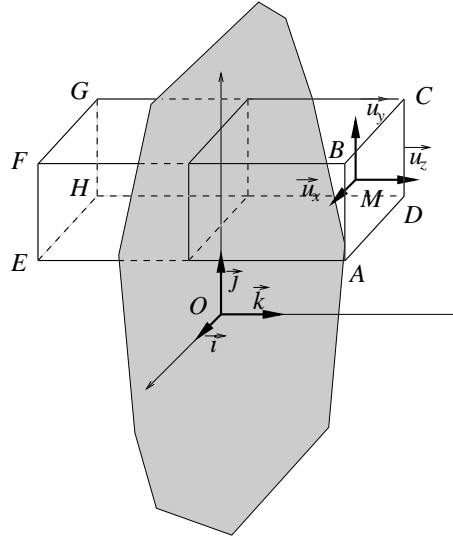


Figure 4.12:

3. Les plans  $\vec{u}_x, \vec{u}_z$  et  $\vec{u}_y, \vec{u}_z$  passant par  $M$  sont plans de symétrie du problème. Donc pour appartenir à ces deux plans, le champ électrique est selon  $\vec{u}_z$

$$\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\vec{u}_x + \underline{E_y(x, y, z)}\vec{u}_y + \underline{E_z(x, y, z)}\vec{u}_z$$

4. Une translation de la distribution de charges d'un vecteur  $\vec{x}$  selon  $\vec{u}_x$  laisse le problème invariant ou d'un vecteur  $\vec{y}$  selon  $\vec{u}_y$ . La solution ne dépend donc pas de  $x$  ni de  $y$  :

$$\vec{E}(r, y, z) = E_z(x, \cancel{y}, \cancel{x})\vec{u}_z$$

5. La surface de Gauss,  $\Sigma$ , est un parallépipède coupé en son milieu par le plan chargé. Le parallépipède a une section  $S$  dans le plan chargé et sa longueur est  $2z$ . Nous voyons immédiatement que la longueur  $S$  n'est pas une donnée physique du problème. Elle peut être présente dans les calculs mais elle doit disparaître dans le résultat final.

L'élément différentiel de surface des surfaces perpendiculaires au plan chargés sont selon  $\vec{u}_x$  ou  $\vec{u}_y$ . Leur contribution à l'intégrale de Gauss est nulle car on a

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot \underbrace{dS \vec{u}_x \vec{u}_z}_0 = 0$$

ou

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot \underbrace{dS \vec{u}_y \vec{u}_z}_0 = 0$$

6. Sur la surface  $ABCD$  on a  $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$  et sur la surface  $EFGH$  on a  $d\vec{S} = -dS \vec{u}_z$ . De plus comme les champs de deux points symétriques par rapport au plan de symétrie sont symétriques, on a :

$$\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$$

L'intégrale dans le théorème de Gauss s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\vec{E}_\Omega) &= \iint_{ABCD} \vec{E}_\Omega(\vec{z}) \cdot d\vec{S} + \iint_{EFGH} \vec{E}_\Omega(\vec{z}) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{ABCD} E(z) \cdot dS \vec{u}_z \vec{u}_z + \iint_{EFGH} E(-z) \cdot dS \vec{u}_z (-)\vec{u}_z \\ &= E(z) \iint_{ABCD} dS + E(z) \iint_{ABCD} dS \\ &= 2E(z)S \end{aligned}$$

7. La quantité de charges à l'intérieur de la surface de Gauss est simplement  $\sum_{Q_i \text{ intérieur } \Sigma} = \sigma S$  par définition de la densité surfacique de charges.

8. On égalise les deux membres du théorème de Gauss

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{\Omega}) = \sum_{Q_i \text{ intérieur } \Sigma} \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

ce qui donne :

$$2E(z)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

Comme  $\vec{E}$  est selon  $\vec{u}_z$  on a la solution ci dessous :

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

La surface  $S$  a bien disparu du résultat. On voit aussi que se résultat ne dépend pas des variables d'espace.

### Champ créé en un point $M$ par une lame chargé infinie.

On considère maintenant une lame d'épaisseur  $L$  portant une densité électrostatique de charge uniforme  $\rho$ . Ce système a bien sur la même symétrie que le précédent. Les points 1 à 6 sont les même qu'au dessus et nous ne répétons que le résultat du point 6 :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{\Omega}) = 2E(z)S$$

cependant maintenant nous devons distinguer deux cas pour calculer la quantité de charges à l'intérieur de la surface de Gauss.

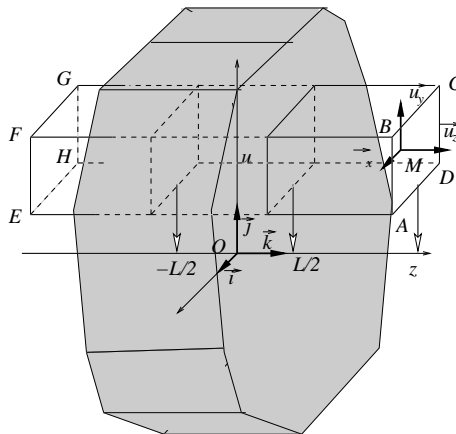


Figure 4.13:

- si  $z > L/2$  (c.a.d. si  $M$  est à l'extérieur de la lame), alors la charge à l'intérieur de la surface de Gauss est celle qui est dans la lame d'épaisseur  $L$ . Ce volume est :

$$V_{\text{lam}} = L S$$

On a donc

$$\sum_{Q_i \text{ int } \Sigma} Q = \rho L S$$

- si  $r < a$  (c.a.d. si  $M$  est à l'intérieur du cylindre), alors la quantité de charge à prendre en compte est celle à l'intérieur de la surface de Gauss d'épaisseur  $z$ .

$$\sum_{Q_{i \text{int} \Sigma}} Q = 2\rho z S$$

8. On égalise les deux membres du théorème de Gauss et on obtient, en tenant de la symétrie des solutions :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_{\Omega}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{Q_{i \text{int} \Sigma}} Q \Rightarrow \vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\rho L}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } r > L/2 \\ \frac{\rho z}{\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } -L/2 < z < L/2 \\ -\frac{\rho L}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < -L/2 \end{cases}$$

#### 4.4.7 lame chargée en volume.

On peut facilement calculer le potentiel électrostatique créé par la lame à partir du champ :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$$

ce qui conduit en coordonnées cartésiennes à :

$$\cancel{E_x} \vec{u}_x + \cancel{E_y} \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z = - \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

Comme  $E$  ne dépend que de  $z$ , les deux premières contributions sont nulles et on a :

$$V(z) = - \int E(z) dz$$

Ce qui donne

- pour  $r > L/2$  :

$$\begin{aligned} V_e(z) &= - \int \frac{\rho L}{2\varepsilon_0} dz \\ &= - \frac{\rho L z}{2\varepsilon_0} + V_0 \end{aligned}$$

- pour  $L/2 > z > -L/2$  :

$$\begin{aligned} V_i(r) &= - \int \frac{\rho z}{\varepsilon_0} dz \\ &= - \frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0} + V_1 \end{aligned}$$

- pour  $-L/2 > z$  :

$$\begin{aligned} V_e(r) &= - \int \frac{-\rho L}{2\varepsilon_0} dz \\ &= \frac{\rho L z}{2\varepsilon_0} + V_2 \end{aligned}$$

Dans ce problème il y a des charges à l'infini car la lame est infinie. On ne peut pas déterminer la constante d'intégration en posant le potentiel nul à l'infini. On le pose nul en  $z = 0$  Ce qui conduit à  $V_1 = 0$  Comme les potentiels sont toujours continus, nous devons écrire :

$$V_i(L/2) = V_e(L/2)$$

$$V_i(-L/2) = V_e(-L/2)$$

D'où on déduit  $V_0$  et  $V_2$  :

$$-\frac{\rho L^2}{8\epsilon_0} = -\frac{\rho L^2}{4\epsilon_0} + V_0 \implies V_0 = \frac{\rho L^2}{8\epsilon_0}$$

$$-\frac{\rho L^2}{8\epsilon_0} = -\frac{\rho L^2}{4\epsilon_0} + V_2 \implies V_2 = \frac{\rho L^2}{8\epsilon_0}$$

Donc finalement on a :

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{\rho L z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho L^2}{8\epsilon_0} & \text{si } z > L/2 \\ -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} & \text{si } L/2 > z > -L/2 \\ \frac{\rho L z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho L^2}{8\epsilon_0} & \text{si } -L/2 > z \end{cases}$$

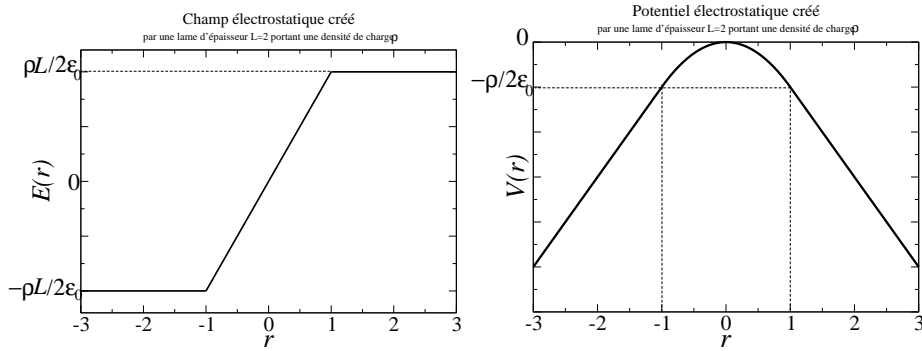


Figure 4.14:

## Chapitre 5

# Les Équations de Maxwell de l'Électrostatique.

*Deux théorèmes mathématiques (Stokes d'une part et Ostrogradski d'autre part) appliqués à la circulation d'une part et au flux du champ électrique d'autre part vont nous permettre d'établir deux équations locales pour le champ électrique.*

*Ces deux équations connues sous le noms d'équations de Maxwell pour l'électrostatique sont les piliers de la théorie du champ électrique.*

### 5.1 Equation de Maxwell Faraday.

Nous allons maintenant démontrer un théorème important de l'analyse vectorielle, le théorème de Stokes, et ensuite l'appliquer à l'équation ci dessus et l'appliquer ensuite au champ électrostatique.

#### 5.1.1 Le théorème de Stokes.

Supposons que nous connaissons la forme mathématique d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$  partout dans l'espace, que nous exprimons en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{e}_x + A_y(x, y, z)\vec{e}_y + A_z(x, y, z)\vec{e}_z \quad (5.1)$$

Nous voulons calculer la circulation de  $\vec{A}$  sur un contour fermé  $\mathcal{C}$ . Considérons maintenant un contour fermé  $\mathcal{C}$  quelconque et orienté.

Supposons, par exemple que la projection de  $\vec{A}$  sur  $\mathcal{C}$  soit partout dirigé le sens de  $d\vec{l}$  comme sur le cas représenté sur la figure 5.1.1. Alors en tout point on a  $\vec{A} \cdot d\vec{l} > 0$  et dans ce cas on :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} > 0 \quad (5.2)$$

Considérons maintenant le contour  $\mathcal{C}$  tracé sur la figure 5.1.1 et les deux sous-contours  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Ces deux derniers contours ont en commun le segment  $MN$  mais il n'est pas parcouru dans le même sens (de bas en haut pour  $\mathcal{C}_1$  et l'inverse pour  $\mathcal{C}_2$ ). Bien sur, nous avons toujours :

$$\int_M^N \vec{A} \cdot d\vec{l} = - \int_N^M \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (5.3)$$

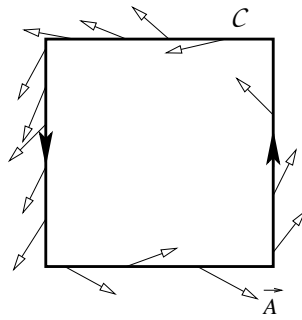
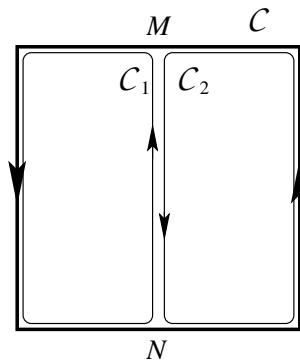
Figure 5.1: Champ de vecteur le long d'un contour  $\mathcal{C}$ .

Figure 5.2: Division d'un contour en deux sous-contours.

On a donc :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \, d\vec{l} = \left( \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{A} \, d\vec{l} - \int_N^M \vec{A} \, d\vec{l} \right) + \left( \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{A} \, d\vec{l} - \int_M^N \vec{A} \, d\vec{l} \right) \quad (5.4)$$

et comme les intégrales sur les parties communes s'annulent :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \, d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{A} \, d\vec{l} + \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{A} \, d\vec{l} \quad (5.5)$$

On peut maintenant imaginer diviser encore chaque sous-contour  $\mathcal{C}_1$  ou  $\mathcal{C}_2$  indéfiniment. La surface  $S$  intérieure au contour  $\mathcal{C}$  est alors découpée en une somme de contours élémentaires  $\mathcal{C}$  de surface intérieure  $dS$ . En généralisant le raisonnement donné au dessus on déduit que la circulation

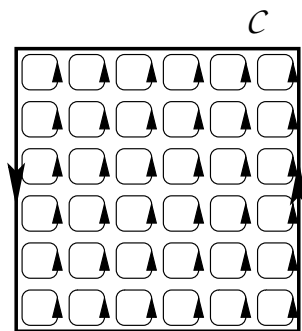


Figure 5.3: Décomposition d'un contour en une infinité de sous contours infinitésimaux.



de  $\vec{A}$  sur  $\mathcal{C}$  est la somme des circulations de  $\vec{A}$  sur chacun des contours élémentaires. On a donc :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \, d\vec{l} = \sum_k dc_k \quad (5.6)$$

où la somme sur  $k$  est une somme sur tous les contours.

La circulation de  $\vec{A}$  sur chacun de ces contours élémentaires est indépendant de la façon dont elle est calculée. Nous utilisons donc les coordonnées cartésiennes dans lesquelles nous avons exprimé  $\vec{A}$  et nous allons calculer  $\oint \vec{A} \, d\vec{l}$  sur le contour de la figure 5.1.1.

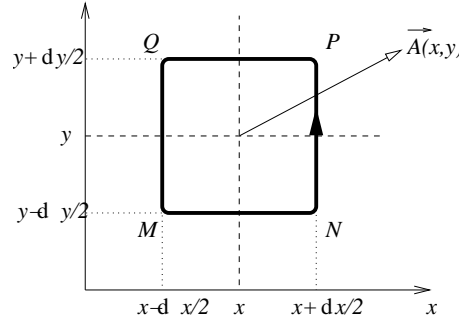


Figure 5.4:

$$\begin{aligned} dc &= \oint \vec{A} \, d\vec{l} \\ &= \int_M^N \vec{A} \, d\vec{l} + \int_N^P \vec{A} \, d\vec{l} + \int_P^Q \vec{A} \, d\vec{l} + \int_Q^M \vec{A} \, d\vec{l} \\ &= \int_M^N \vec{A} \, dx \vec{u}_x + \int_N^P \vec{A} \, dy \vec{u}_y + \int_P^Q \vec{A}(-dx) \vec{u}_x + \int_Q^M \vec{A}(-dy) \vec{u}_y \\ &= \int_M^N A_x \, dx + \int_N^P A_y \, dy - \int_P^Q A_x \, dx - \int_Q^M A_y \, dy \end{aligned} \quad (5.7)$$

On peut exprimer le premier terme de l'équation au dessus en utilisant les propriétés mathématiques suivantes :

$$\text{rappel : } \int_{x-\delta/2}^{x+\delta/2} f(x) \, dx \longrightarrow \delta f(x) \text{ quand } \delta \rightarrow 0.$$

La première intégrale de la circulation de  $\vec{A}$  se réécrit :

$$\begin{aligned} \int_M^N A_x(y - dy/2, x) \, dx &= A_x(y - dy/2, x)(x_N - x_M) \\ &= A_x(y - dy/2, x) \, dx \end{aligned} \quad (5.8)$$

On peut maintenant exprimer  $A_x(y - dy/2, x)$  en utilisant la propriété suivante :

$$\text{rappel : } f(x + \epsilon) \rightarrow f(x) + \epsilon \frac{df(x)}{dx} + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2} \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0,$$

d'où on obtient :

$$\int_M^N A_x(x, y - dy/2) \, dx = \left[ A_x(x, y) - \frac{dy}{2} \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y} \right] dx \quad (5.9)$$

Une démonstration similaire nous permet de trouver les trois autres intégrales, en notant bien que lorsqu'on intègre de  $P$  vers  $Q$  on voit apparaître un terme  $-dx$  (et non  $+dx$ ) dans le résultat (de même pour l'intégrale de  $Q$  vers  $M$  où on voit un terme  $-dy$ ).

$$\begin{aligned}
\int_N^P \vec{A} \, d\vec{l} &= \left[ A_y(x, y) + \frac{dx}{2} \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x} \right] dy \\
\int_P^Q \vec{A} \, d\vec{l} &= - \left[ A_x(x, y) + \frac{dy}{2} \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y} \right] dx \\
\int_Q^M \vec{A} \, d\vec{l} &= - \left[ A_y(x, y) - \frac{dx}{2} \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x} \right] dy
\end{aligned} \tag{5.10}$$

On trouve alors la circulation sur le contour élémentaire en additionnant et regroupant les différents termes :

$$dc = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dS \tag{5.11}$$

en ayant posé  $dS = dx \, dy$ .

Si on avait placé le contour  $c$  dans un autre plan, on aurait trouvé :

$$\begin{aligned}
dc &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dS && \text{dans } yOz \\
dc &= \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dS && \text{dans } zOx
\end{aligned} \tag{5.12}$$

De plus, si le contour  $dc$  est dans un plan quelconque nous avons :

$$dc = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx \, dy + \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy \, dz + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz \, dx \tag{5.13}$$

On peut récrire cette équation sous une forme compacte en introduisant le rotationnel d'un champ de vecteurs quelconque  $\vec{A}$ . C'est un opérateur vectoriel qui appliqué à un vecteur donne un vecteur.

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \tag{5.14}$$

Le vecteur rotationnel peut aussi être défini à partir de l'opérateur nabla :

 **Définition 15** :  $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  (5.15)

En effet, si nous pouvons très facilement identifier le résultat de :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{5.16}$$

avec la forme donnée pour le rotationnel au dessus.

Le vecteur  $d\vec{S}$  est défini de façon classique comme :

$$d\vec{S} = dy \, dz \, \vec{e}_x + dz \, dx \, \vec{e}_y + dx \, dy \, \vec{e}_z \tag{5.17}$$

on a pour l'équation au dessus :

$$dc = \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} \tag{5.18}$$

Si maintenant nous additionnons tous les petits sous-contours élémentaires, nous avons :

$$\oint_c \vec{A} \, d\vec{l} = \sum_k \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}_k$$

Ce qui peut être écrit sous forme intégrale:

$$\oint_c \vec{A} \, d\vec{l} = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Nous obtenons le théorème de Stokes appliqué au contour fermé  $\mathcal{C}$  :

**THÉORÈME :** 
$$\mathcal{C} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \, d\vec{l} = \iint_{S_{\mathcal{C}}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \, d\vec{S}$$

où  $S_{\mathcal{C}}$  est la surface intérieure au contour  $\mathcal{C}$ .

### 5.1.2 Rotationnel du champ électrostatique.

Nous avons déjà vu que la circulation du champ électrostatique n'importe quel contour fermé est nulle. Donc, d'après le théorème de Stokes, on peut écrire :

 **Propriété 33 :** 
$$\iint_{S_{\mathcal{C}}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \, d\vec{S} = 0$$

Cette propriété est valable quelque soit la surface intérieure au contour  $\mathcal{C}$ . En fait, il y en a une infinité. Donc on en déduit l'équation de Maxwell suivante :

**Équation de Maxwell :** 
$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

Cette équation est une équation locale. Elle relie la valeur du champ électrostatique en un point à celle du champ en des points infiniment proches. Cette équation n'est valable que dans le cas de charges source immobiles. Si les charges sont mobiles cette expression n'est plus nulle mais est reliée à la variation temporelle du champ magnétique.

**Ex. 5 - 29 :** Rotationnel du champ créé par une charge.

Montrer que le champ électrique créé par une charge ponctuelle  $Q$  obéit à l'équation de Maxwell  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0$

## 5.2 Equation de Maxwell Gauss.

Nous avons vu une équation intégrale, dans le chapitre 4, qui liait le champ électrostatique aux charges sources qui le créé :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \, d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{Q \text{ int } \Sigma} Q_i \quad (5.19)$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème d'Ostrogradski afin d'écrire la deuxième équation de Maxwell;

### 5.2.1 Le théorème d'Ostrogradski.

Supposons que nous connaissons la forme mathématique d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$  partout dans l'espace, que nous exprimons en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{e}_x + A_y(x, y, z)\vec{e}_y + A_z(x, y, z)\vec{e}_z \quad (5.20)$$

Nous voulons calculer le flux de  $\vec{A}$  à travers une surface fermée  $\Sigma$ .

Tout comme pour la démonstration du théorème de Stokes, nous pouvons écrire que le flux de  $\vec{A}$  à travers  $\Sigma$  est la somme des flux des  $\vec{A}$  à travers les surfaces élémentaires qui entourent les volumes élémentaires qui constitue le volume intérieur à  $\Sigma$ . Considérons le petit élément de volume  $d\tau$  entouré par la surface  $d\Sigma$  de la figure 5.2.1. On a :

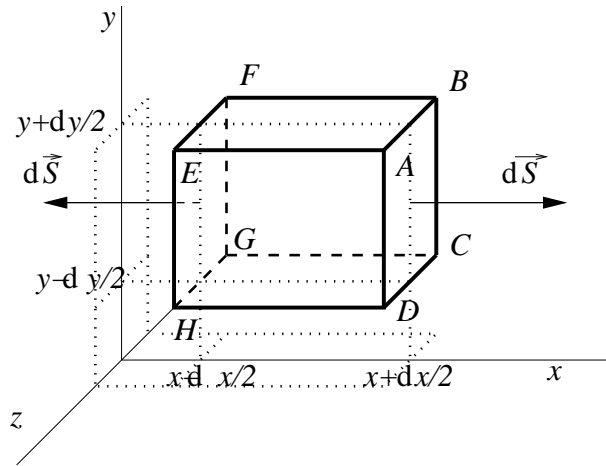


Figure 5.5:

$$\begin{aligned}
 d\Phi &= \oiint_{\Sigma} \vec{A} \, d\vec{S} \\
 &= \underbrace{\iint_{ABCD} \vec{A} \, dS + \iint_{EFGH} \vec{A} \, d\vec{S}}_{d\Phi_x} + \underbrace{\iint_{AEHD} \vec{A} \, dS + \iint_{BFGC} \vec{A} \, d\vec{S}}_{d\Phi_y} + \underbrace{\iint_{AEFB} \vec{A} \, dS + \iint_{CDHG} \vec{A} \, d\vec{S}}_{d\Phi_z}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Calculons  $d\Phi_x$  et nous trouverons les autres contributions par analogie. Après avoir remarqué que la surface de gauche est orientée selon  $-\vec{e}_x$  et celle de droite selon  $+\vec{e}_x$ , et que on peut écrire  $d\vec{S}$  sous la forme  $d\vec{S} = \pm dy \, dz \vec{e}_x$ , nous avons :

$$d\Phi_x = \int_{y-dy/2}^{y+dy/2} \int_{z-dz/2}^{z+dz/2} A_x(x+dx/2, y, z) \, dy \, dz - \int_{y-dy/2}^{y+dy/2} \int_{z-dz/2}^{z+dz/2} A_x(x-dx/2, y, z) \, dy \, dz \tag{5.22}$$

Comme les bornes d'intégration sont très voisines, on a :

$$d\Phi_x = [A_x(x+dx/2, y, z) - A_x(x-dx/2, y, z)] \, dy \, dz \tag{5.23}$$

d'après la définition de la dérivée d'une fonction, on peut alors écrire :

$$d\Phi_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} \, dx \, dy \, dz \tag{5.24}$$

On obtient des équations similaires en suivant un raisonnement analogue pour les flux selon l'axe  $zz'$  et  $yy'$  :

$$d\Phi_y = \frac{\partial A_y}{\partial y} \, dx \, dy \, dz \tag{5.25}$$

$$d\Phi_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \, dx \, dy \, dz \tag{5.26}$$

Le flux à travers le parallépipède élémentaire est donc :

$$d\Phi = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \, d\tau \tag{5.27}$$

ce qu'on peut écrire en utilisant l'opérateur divergence :

$$\boxed{d\Phi = \text{div } \vec{A} \, d\tau} \tag{5.28}$$

La divergence d'un vecteur est donnée par :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (5.29)$$

Il est aussi défini à partir de l'opérateur nabla :

☞ **Définition 16** : 
$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (5.30)$$

En effet, si nous pouvons très facilement identifier le résultat de :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & A_x \\ \partial/\partial y & A_y \\ \partial/\partial z & A_z \end{vmatrix} \quad (5.31)$$

avec la forme donnée pour la divergence au dessus.

Si maintenant nous additionnons toutes les petites surfaces élémentaires, nous obtenons le théorème d'Ostrogradski appliqué à la surface fermée  $\Sigma$  :

**THÉORÈME** : d'Ostrogradski 
$$\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_{\Sigma}} \operatorname{div} \vec{A} \, d\tau$$

où  $V_{\Sigma}$  est le volume intérieur à la surface  $\Sigma$ .

### 5.2.2 Divergence du champ électrostatique.

Nous avons vu que le théorème de Gauss disait que le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est égal à la quantité de charges totale à l'intérieur de la surface :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{Q \text{ int } \Sigma} Q_i \quad (5.32)$$

On peut écrire la quantité de charge intérieure à  $\Sigma$  en utilisant un formalisme intégral et la définition de la densité volumique de charges  $\rho$  :

$$\sum_{Q \text{ int } \Sigma} Q_i = \iiint_{V_{\Sigma}} \rho \, d\tau \quad (5.33)$$

D'autre part, on peut aussi appliquer le théorème d'Ostrogradski à l'intégrale du théorème de Gauss :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_{\Sigma}} \operatorname{div} E \, d\tau \quad (5.34)$$

Avec les équations ci dessus, il vient facilement :

$$\iiint_{V_{\Sigma}} \operatorname{div} E \, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V_{\Sigma}} \rho \, d\tau \quad (5.35)$$

Cette équation est valable quelque soit le volume  $V$ . Donc on a :

**Équation de Maxwell** :

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

C'est la formulation locale du théorème de Gauss. Cette équation traduit le fait que la divergence du champ électrostatique en un point  $\vec{r}$  de l'espace ne dépend que de la densité de charge en ce point.

**Ex. 5 - 30 :** Divergence du champ créé par une charge.

Montrer que le champ électrique créé par une charge ponctuelle  $Q$  obéit à l'équation de Maxwell  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0$ .

On donne la divergence en coordonnées sphériques :  $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)$

**Ex. 5 - 31 :** Divergence du champ créé par une lame.

On rappelle que le champ électrique créé par une lame chargée infinie d'épaisseur  $L$

$$\text{est } \vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\rho L}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } r > L/2 \\ \frac{\rho z}{\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } -L/2 < z < L/2 \\ -\frac{\rho L}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < -L/2 \end{cases}$$

Montrer que ce résultat obéit à l'équation de Maxwell  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0$ .

On donne la divergence en coordonnées cartésiennes :  $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

**Ex. 5 - 32 :** Equation de Maxwell-Gauss et cylindre chargé

Considérons un cylindre infini de rayon  $a$  portant une densité de charge volumique  $\rho$  uniforme.

**32.1.** Rappeler la forme du champ électrique partout dans l'espace.

**32.2.** Montrer que ces solutions vérifient bien l'équation de Maxwell-Gauss

On donne la divergence en coordonnées cylindriques :  $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

## 5.3 Exemples de calcul de champs.

### 5.3.1 Boule chargée en volume.

Considérons une boule de rayon  $a$  portant une charge  $Q$  uniformément répartie en volume. Les considérations de symétrie et d'invariance nous amènent à :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r \quad (5.36)$$

La densité volumique de charge dans la boule est donc :

$$\rho = \frac{Q}{4\pi a^3} \quad (5.37)$$

et elle est nulle à l'extérieur de la boule. On a donc :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E}_e = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E}_i = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad (5.38)$$

où  $\vec{E}_i$  est le champ à l'intérieur de la boule et  $\vec{E}_e$  est le champ à l'extérieur. En coordonnées sphériques, la divergence s'exprime comme :

$$\operatorname{div} \cdot = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot) \quad (5.39)$$

où seule les contributions selon  $\vec{u}_r$  est prise en compte. On a donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_e)}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_i)}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad (5.40)$$

La résolution de la première équation donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r^2 E_e)}{\partial r} &= 0 \\ r^2 E_e &= K_e \\ E_e &= \frac{K_e}{r^2} \end{aligned} \quad (5.41)$$

La résolution de la seconde donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r^2 E_i)}{\partial r} &= \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0} \\ r^2 E_i &= \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + K_i \\ E_i &= \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} + \frac{K_i}{r^2} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Le point  $r = 0$  est le centre de la boule. Il appartient à tous les plans de symétrie du problème. Donc on a  $\vec{E}_i(0) = 0$  ce qui permet de trouver  $K_i = 0$ .

De plus, il n'y a pas de charges surfaciques dans ce problème. Le champ électrostatique est donc continu en tout point et particulièrement à la surface de la boule :

$$\frac{\rho a}{3\varepsilon_0} = \frac{K_e}{a^2} \quad (5.43)$$

d'où on trouve  $K_e = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}$  et donc :

$$\begin{cases} E_e(r) = \\ E_i(r) = \end{cases} \quad (5.44)$$

---

## En résumé

---

Deux théorèmes mathématiques permettent d'écrire les équations de Maxwell.

---

Force		⇒	Champ		⇒	Equations de Maxwell	
						Eq. Intégrale	Eq. Locale
$F \propto \frac{Qq}{r^2}$	$\xrightarrow{\text{définition}}$		$E \propto \frac{Q}{r^2}$	$\xrightarrow{\text{propriété}}$		$\left\{ \begin{array}{l} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \xrightarrow{\text{th. Stokes}} \\ \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \xrightarrow{\text{th. Ostrogradski}} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}} \\ \boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \end{array} \right.$





## Chapitre 6

# Le Dipole Électrostatique

*L'étude du dipole électrostatique a une grande importance en électrostatique des milieux matériels car il est l'élément clé des mécanismes de polarisation dans les diélectriques. Son étude permet de comprendre les mécanismes qui entrent en jeu lors de l'application d'un champ électrique sur un milieu diélectrique.*

### 6.1 Définition du dipole



**Définition 17** : Un dipole électrostatique est constitué de deux charges opposées  $+q$  et  $-q$  séparées par une distance constante  $d$ .

#### 6.1.1 Exemples de molécules apolaires

Les molécules apolaires sont celles qui ne porte pas de dipoles permanents. Cela signifie que pour ces molécules le barycentre des charges négatives (les électrons de chaque atome) est confondu avec le barycentre des charges positives (les protons des noyaux de chaque atome).

Dans leur état fondamental, les atomes présentent une distribution sphérique des charges électronique. La moyenne de la position des électrons en fonctions du temps est donc confondu avec le centre de l'atome. Les protons sont aussi au centre de l'atome et donc la distance entre le barycentre des protons et celui des électrons est nulle. Il en résulte que ce genre d'atome ne porte pas de moments dipolaires permanents.

Les molécules symétriques telles que  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$  ( $O=C=O$ ) sont aussi apolaires puisqu'elles ont comme propriété que le barycentre des électrons est situé à mi-distance des deux noyau par raison de symétrie. il est donc aussi confondu avec le barycentre des protons et ces molécules ne portent pas non plus de moments dipolaires permanents.

#### 6.1.2 Exemples de molécules polaires

Les molécules polaires sont celles qui porte un dipole permanent. Les molécules dissymétriques peuvent être polaires (mais pas obligatoirement).

Par exemple, la molécule d'eau est composée d'un atome d'oxygène et de deux atomes d'hydrogène; L'oxygène est très électronégatif : il attire les électrons de l'oxygène. Donc le barycentre des électrons est plus proche du noyau de l'oxygène que celui des protons. Ces deux barycentres étant séparés d'une petite distance  $d$ , il y a apparition d'un dipole dans la molécule d'eau.

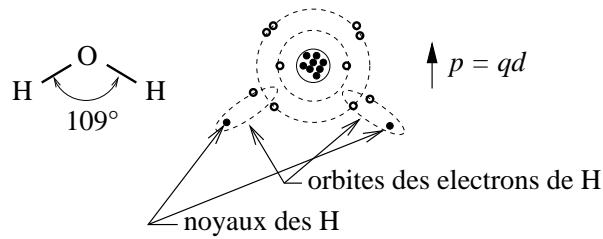


Figure 6.1:

### 6.1.3 Définition du moment dipolaire

La grandeur caractéristique du dipole électrostatique est son moment dipolaire :

**Définition 18** :  $\vec{p} = q\vec{d}$  orienté de  $-q$  vers  $q$

A l'échelle des processus moléculaires, la charges  $q$  et de l'ordre de celle de l'électrons et la distance est inférieure à celle de l'atome. Si on exprime  $q$  en Coulomb et  $d$  en mètre, on obtient des quantités très petites. On a introduit une unité particulière pour le calcul des moments dipolaires : le Debye.

$$1\text{D} = 3.33 \cdot 10^{-30}\text{C.m}$$

Les molécules polaires les plus courantes ont un moment dipolaire donné dans la table ci dessous

Moments dipolaires		
Acétone	$\text{CH}_3\text{COCH}_3$	2.85 D
Eau	$\text{H}_2\text{O}$	1.86 D
Acide acétique	$\text{CH}_3\text{COOH}$	1.70 D
Ammoniaque	$\text{NH}_3$	1.50 D
Acide chlorhydrique	$\text{HCl}$	1.08 D
Chloroforme	$\text{CHCl}_3$	1.06 D
Monoxyde de carbone	$\text{CO}$	0.12 D

## 6.2 Potentiel créé par un dipole

Le potentiel créé par un dipole en un point  $M$  de l'espace est la somme des potentiels créés par chacune des charges. Ce problème présente une symétrie de révolution autour de l'axe  $Oz$  qui passe par les deux charges. Nous utiliseront cependant les coordonnées sphériques (et non les coordonnées cylindriques) pour repérer le point  $M$  qui nous faciliteront le calcul de certains développements limités. Nous notons que sur la figure 6.2 :

$$\vec{NP} = d\vec{u}_z$$

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r$$

et nous allons effectuer l'étude du dipole dans une région telle que  $r \gg d$ ; Le potentiel en  $M$ , repéré par  $r$  et  $\theta$ , est donc :

$$V_{\text{dip}}(r, \theta) = V_{+q}(r, \theta) + V_{-q}(r, \theta) \quad (6.1)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (6.2)$$

avec

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{P}_1\vec{M} = \vec{OM} - \vec{OP}_1 \\ \vec{r}_2 = \vec{P}_2\vec{M} = \vec{OM} - \vec{OP}_2 \end{cases}$$

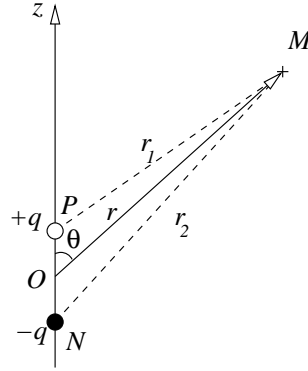


Figure 6.2:

On peut calculer  $r_1$  et  $r_2$  en prenant la racine carrée du carré scalaire :

$$\begin{cases} r_1^2 = OM^2 + OP_1^2 - 2OP_1 \cdot OM \cdot \cos \theta \\ r_2^2 = OM^2 + OP_2^2 - 2OP_2 \cdot OM \cdot \cos(\pi - \theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = \left( r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \cos \theta \right)^{1/2} \\ r_2 = \left( r^2 + \frac{d^2}{4} + rd \cos \theta \right)^{1/2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = r \left( 1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{1/2} \\ r_2 = r \left( 1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{1/2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \\ \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \end{cases}$$

Dans les deux expressions au dessus nous avons une forme en  $(1 + \epsilon)^n$  avec  $\epsilon$  petit. Il est donc possible d'utiliser le développement limité suivant :

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon$$

ce qui donne :

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{d^2}{8r^2} + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \\ \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{d^2}{8r^2} - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \end{cases}$$

Si on injecte les deux équations au dessus dans l'équation 6.2, on trouve :

$$V_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left( \frac{d}{r} \cos \theta + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \right) \quad (6.3)$$


$$= \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (6.4)$$

On reconnait dans ce résultat la définition du moment dipolaire  $p = qd$ . Ce qui nous permet d'écrire le potentiel créé par un dipole :

$$\boxed{V_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}} \quad (6.5)$$

Contrairement au potentiel créé par une charge ponctuelle, le potentiel créé par un dipole n'a pas une symétrie sphérique (puisque le dipole n'a pas de symétrie sphérique).


Le potentiel créé par un dipole est :

-  **Propriété 34** :
- nul dans le plan perpendiculaire au dipole ( $\theta = \pi/2$ ),
  - maximum sur l'axe du dipole "coté charge positive" et
  - minimum sur l'axe du dipole "coté charge négative."

**Ex. 6 - 33** : Potentiel du dipole en coordonnées cartésiennes.

Calculer le potentiel créé par un dipole en coordonnées cartésiennes.


On note dans ce résultat que le potentiel à une forme en  $1/r^2$ . Il décroît donc beaucoup plus vite que le potentiel créé par une charge unique (qui lui décroît en  $1/r$ ).

 **Propriété 35** : Le potentiel créé par un dipole décroît en  $1/r^2$

De plus si on compare le potentiel créé par un ion et le potentiel créé par une molécule d'eau sur son axe ( $\theta = 0$ ), on a :

$$\frac{V_{\text{ion}}(r)}{V_{\text{dip}}(r)} = \frac{|e|r}{p_{\text{eau}}} = 2.58 \cdot 10^{10} r$$

Ce résultat montre la propriété suivante :

 **Propriété 36** : le potentiel d'un dipole ne peut être ressenti dans une région de l'espace que s'il n'y a pas de charges nettes dans cette région.

**Ex. 6 - 34** : Potentiel créé par une boule non uniformément chargée.

Considérons une boule chargée en volume avec une distribution de charge portant une densité de charge volumique  $\rho(\theta) = \rho_0 \cdot \cos\theta$ . Calculer le potentiel créé par la boule dans n'importe quel point du plan  $xOy$ .

### 6.3 Champ électrostatique créé par un dipole.

Le champ électrostatique créé par un dipole répond à l'équation

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$$

Ce qui donne en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

La dernière équation vient du fait que le dipole à une symétrie cylindrique autour de l'axe  $Oz$ . Donc la solution pour le potentiel et pour le champ est indépendante de la variable  $\phi$ .

**Ex. 6 - 35** : Propriété du champ créé par un dipole.

Déterminer l'ensemble des points pour lesquels le champ électrostatique créé par un dipole est radial et ceux pour lesquels il est orthoradial.

**Ex. 6 - 36** : Charge dans un champ créé par un dipole.

Que devient une charge positive abandonnée sans vitesse dans le champ électrostatique créé par un dipole.

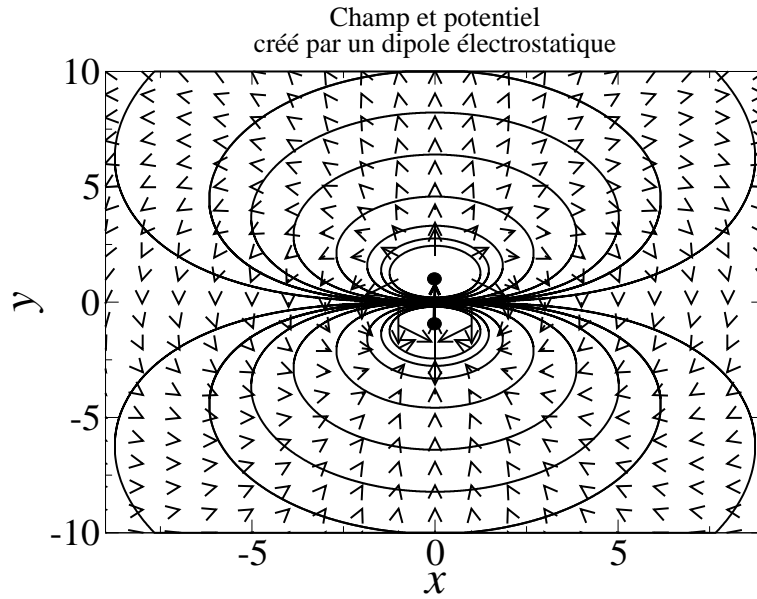


Figure 6.3:

On constate aussi qu'il n'apparaît pas de termes en  $1/r^2$  dans les composantes du champ. Le dipôle est formé de deux charges qui ont bien un champ en  $1/r^2$  chacune, mais ces deux charges sont exactement opposées. Donc le dipôle est électriquement neutre et si on se place loin du dipôle ( $r \gg d$ ), on voit une charge  $Q = +|q| - |q| = 0$  concentrée sur une longueur  $d$  très petite. Ce raisonnement n'est pas vrai dans la région proche du dipôle où là, on distingue clairement la charge  $+|q|$  de la charge  $-|q|$ . Dans cette région le développement limité utilisé pour calculer  $V_{\text{dip}}$  ne peut pas être utilisé et le potentiel et le champ ont alors des formes plus complexes.

Le calcul du flux du champ à travers une sphère de rayon  $r$  avec  $r \gg d$  donne :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) &= \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\
 &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} E_r \cdot r \, d\theta \cdot r \sin \theta \, d\phi \\
 &= \frac{p}{\varepsilon_0 r} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \\
 &= \frac{p}{\varepsilon_0 r} \left[ \frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ces résultats peuvent être obtenus immédiatement par le théorème de Gauss :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{Q \text{ int } \Sigma} Q = 0$$

parce que la somme des charges à l'intérieur de la surface de Gauss est nulle.

## 6.4 Action d'un champ électrique uniforme sur un dipôle.

Considérons un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}_0$  qui règne partout dans l'espace. D'un point de vue pratique un tel champ est créé de la façon suivante. Nous pouvons simplement nous rappeler que le champ électrostatique créé par deux plaques planes chargées en surface avec une densité surfacique de charge  $+\sigma$  pour l'une et  $-\sigma$  pour l'autre est constant et vaut

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_{+-}$$

où  $\vec{u}_{+-}$  est le vecteur unitaire perpendiculaire aux deux plaques dirigé de la plaque chargée positivement vers la plaque chargée négativement. Plaçons un dipole électrostatique dans ce champ.

### 6.4.1 Translation du dipole.

Chacune des charges du dipole ressent une force de coulomb.

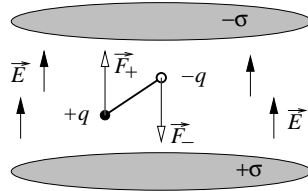


Figure 6.4:

La force ressentie par la charge  $+|q|$  et par la charge  $-|q|$  sont :

$$\begin{cases} \vec{F}_+ = +|q|\vec{E}_0 \\ \vec{F}_- = -|q|\vec{E}_0 \end{cases}$$

Donc la force extérieure totale ressentie par le dipole est :

$$\vec{F}_{\text{dip}} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = (+|q| - |q|)\vec{E}_0 = \vec{0}$$

Donc, d'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au barycentre du dipole, on a :

$$\vec{a}_{\text{dip}} = \vec{0}$$

Ce qui veut dire que le barycentre du dipole au repos n'est pas mis en mouvement sous l'action d'un champ électrostatique.

### 6.4.2 Rotation du dipole.

Le dipole ne ressent pas de force extérieure, donc l'action se réduit à un éventuel couple. Le moment de ce couple calculé en  $O$  (milieu du dipole) est :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_+ + \overrightarrow{ON} \wedge \vec{F}_- \\ &= \frac{d}{2} \vec{u} \wedge q\vec{E}_0 - \frac{d}{2} \vec{u} \wedge (-)q\vec{E}_0 \\ &= d\vec{u} \wedge q\vec{E}_0 \end{aligned}$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire porté par le dipole.

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0}$$

Le dipole va donc se mettre en rotation autour de son centre sous l'action du couple dû au champ  $\vec{E}_0$ . Ce couple est maximal si le dipole est perpendiculaire au champ et il est nul si le dipole est parallèle au champ. Si le dipole est opposé au champ, l'équilibre est instable.

La situation d'équilibre stable correspond donc au dipole aligné avec le champ.

### 6.4.3 Énergie potentielle d'un dipole dans un champ.

L'énergie potentielle est une quantité additive. Donc l'énergie potentielle du dipole dans le champ  $\vec{E}_0$  est la somme de l'énergie potentielle de la charge  $+q$  et de celle de la charge  $-q$  :

$$\begin{aligned} U &= U_+ + U_- \\ &= qV_0(P) - qV_0(N) \end{aligned}$$

Bien entendu, le champ électrostatique étant uniforme, le potentiel ne l'est pas à cause de la relation fondamentale :

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_z &= - \overrightarrow{\text{grad}} V_0 \\ &= - \frac{dV}{dz} \vec{u}_z\end{aligned}$$

où on a écrit que la contribution selon  $\vec{u}_z$  puisque les autres sont nulles. Comme  $P$  et  $N$  sont très proches, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dz} &= \frac{V(z_P) - V(z_N)}{z_P - z_N} \\ &= \frac{V(z_P) - V(z_N)}{\overrightarrow{NP} \cdot \vec{u}_z}\end{aligned}$$

D'où on trouve :

$$\begin{aligned}V(z_P) - V(z_N) &= \frac{dV}{dz} \overrightarrow{NP} \cdot \vec{u}_z \\ &= -E_0 \overrightarrow{NP} \cdot \vec{u}_z\end{aligned}$$

Cette quantité est simplement  $V_0(P) - qV_0(N)$  qu'on peut injecter dans l'équation de l'énergie potentielle. On obtient alors :

$$U = -qE_0 \overrightarrow{NP} \cdot \vec{u}_z$$

On reconnaît dans cette équation, le moment dipolaire  $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$  et le champ électrique  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_z$ . On peut finalement écrire l'énergie potentielle d'interaction du dipole avec le champ électrique :

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

Nous savons que l'équilibre mécanique du système est obtenu pour les états d'énergie potentielle minimum. On trouve facilement ces états en minimisant  $U = -pE_0 \cos \theta$  ce qui donne  $\theta = 0$ . Ces états correspondent au dipole aligné avec le champ électrique. Ce résultat est cohérent avec celui trouvé par l'étude du couple que ressent le dipole dans le champ.

#### 6.4.4 Molécules polaires dans un champ.

Ce résultat nous permet d'appréhender le comportement de molécules polaires dans un champ électrostatique. Considérons un ensemble de molécules d'eau. Nous rappelons que ces molécules portent un moment dipolaire orienté de l'atome d'oxygène vers les atomes d'hydrogène. Si ces molécules ne sont pas soumises à un champ, leur orientation est aléatoire. Après l'application du

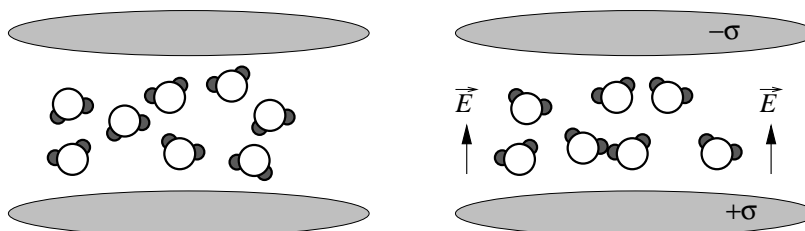


Figure 6.5:

champ électrique, les molécules subissent toutes un couple qui les fait tourner autour de leur barycentre. Si le processus se déroule à une température de 0K, toutes les molécules d'eau s'orientent de façon à aligner exactement leur moment dipolaire avec le champ. D'autre part si le processus se déroule à une température non nulle <sup>1</sup>, les molécules subissent de l'agitation

<sup>1</sup>La température d'un système est un paramètre qui renseigne sur l'agitation moléculaire du système. A très basse température, les atomes ou les molécules d'un système s'agitent très peu. Le système se trouve dans un état d'énergie potentielle minimum. Plus la température augmente et plus les constituants du système s'agitent autour de leur position d'équilibre. Le système n'est plus observable dans des états correspondants aux minima d'énergie potentielle, mais plutôt dans des états "proches" des états d'énergie minimum.

thermique qui conduit à un léger désordre. Les dipôles sont plutôt alignés dans le sens du champ sans lui être exactement colinéaire.

### 6.4.5 Molécules polaires en solution ionique.

Considérons maintenant un verre d'eau pure. Dans ce verre les molécules ont une orientation aléatoire et sont libres aussi bien de se translater et que de tourner sur elle même. Ajoutons du sel à l'eau. Le sel se dissout dans l'eau pour donner des ions  $Na^+$  et  $Cl^-$ . L'ion sodium crée un champ électrostatique autour de lui, radial, décroissant et dirigé vers l'extérieur.

L'ion sodium crée un champ électrostatique radial et dirigé vers lui. Les dipôles de l'eau ressentent ces champs électrostatiques. Pour minimiser leur énergie d'interaction avec les ions les molécules d'eau orientent leur dipôle dans le sens du champ créé par l'ions le plus proche s'il y en a un.<sup>2</sup> C'est à dire, ils s'orientent dans le sens des ions  $Cl^-$  et dans le sens opposé aux ions  $Na^+$ .

Ensuite, la force exercée par la charge de l'ion est sur la charge la plus proche du dipôle est plus importante que celle exercée sur la charge la plus éloignée. La somme des forces est donc dirigée vers l'ion. Le dipôle se rapproche alors de l'ion et se stabilise lorsque l'ion et une charge du dipôle sont en contact de van der Waals.

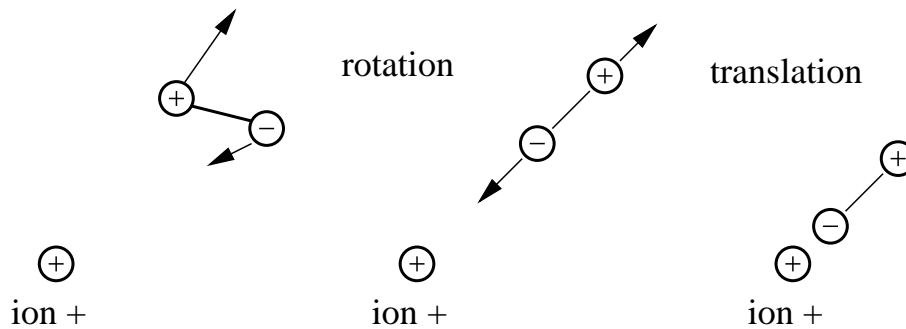


Figure 6.6:

L'introduction de sel dans l'eau conduit à la formation de structures complexes et relativement rigides contenant un ion et plusieurs molécules d'eau<sup>3</sup>. Cette organisation de l'eau autour des ions

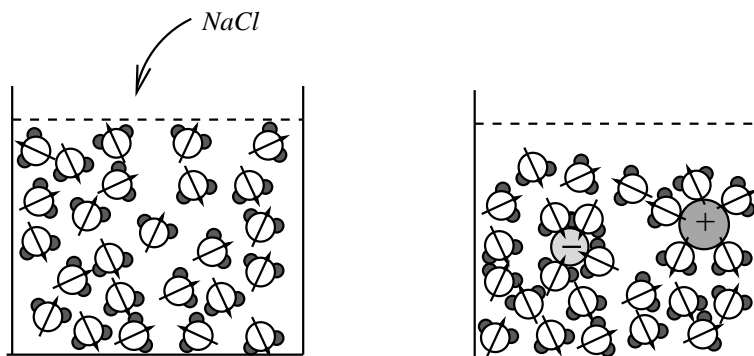


Figure 6.7:

conduit à une diminution de volume : l'eau salée a un volume plus petit que le même nombre de molécules d'eau non salées.

<sup>2</sup>On suppose que la solution ne contient pas beaucoup de sel pour que une molécule d'eau ne ressente que le champ créé par un seul ion.

<sup>3</sup>C'est la raison pour laquelle le sel est un exhausteur de goût. Dans une soupe non salée, les molécules sapidiqes (celle qui donne du goût) sont diluées dans tout le volume d'eau. Lorsqu'on sale la soupe, certaines molécules d'eau viennent former ces structures rigides autour des ions. Les molécules sapidiqes sont alors solvatées par les molécules d'eau qui ne participent pas à ces blocs. Elles sont donc moins diluées, d'où une plus forte sensation gustative.



---

## En résumé

---

Des charges de signes opposées  $\pm q$ , séparées par une distance  $d$  forment un dipole de moment dipolaire  $p = q d$ .

Les molécules dont le barycentre des charges négatives n'est pas confondu avec celui des charges positives sont polaires.

Les molécules symétriques sont apolaires.

Le potentiel créé par un dipole décroît en  $1/r^2$ .

Un champ électrique uniforme entraîne un dipole en rotation.

Un champ électrique créé par une charge oriente le dipole puis l'attire.

---



## Chapitre 7

# Les Conducteurs en Équilibre Électrostatique.

*Dans les matériaux isolants, les charges sont fixes. En revanche, dans un matériau conducteur, certaines charges électriques sont libres de bouger sous l'action d'une force électrostatique aussi petite soit elle. Les conducteurs les plus connus sont les métaux. Dans un métal monovalent, comme le cuivre, un électron est libre de bouger. Dans un métal divalent, comme le calcium, deux électrons sont libres. Un métal est donc constitué d'atomes dont un ou plusieurs électrons périphériques sont libres de se déplacer dans le réseau cristallin constitué par les ions positifs fixés sur les noeuds.*

 **Définition 19** : Les électrons libres sont les électrons de conduction.

*En fait, un conducteur peut être représenté par un des ions positifs vibrant autour de leur position d'équilibre sur les noeuds du réseau et d'un gaz d'électrons libre de se déplacer de part et d'autre dans le matériau.*

*Cette caractéristique des conducteurs est à l'origine de leurs propriétés électrostatiques que nous étudions dans ce chapitre.*

## 7.1 Définition d'un conducteur à l'équilibre.

### 7.1.1 Définition d'un équilibre

La thermodynamique est la discipline de la physique qui traite des équilibres. Elle nous enseigne qu'un système est à l'équilibre si les grandeurs intensives<sup>1</sup> qui le caractérisent (comme la température, la pression, la densité....) sont homogènes dans le système. Cela signifie que la valeur de la grandeur considérée mesurée sur un petit élément de volume  $d\tau$  autour de n'importe quel point  $M$  du système est identique quelque soit le point  $M$ . Cet état est celui vers lequel le système tend à évoluer. Il dépend des contraintes extérieures appliquées au système et de la nature des interfaces entre le système et le milieu extérieur.

L'équilibre peut être interne au système si celui est isolé. Il peut aussi être obtenu par une interaction avec un milieu extérieur toujours supposé beaucoup plus grand que le système et donc peu influencé par lui.

---

<sup>1</sup>Les grandeurs extensives sont celles qui sont doublées si on duplique le système et qu'on le met en contact avec sa réplique. Les grandeurs intensives sont elles invariantes par ce genre de transformation.

L'équilibre thermique avec un thermostat extérieur au système est obtenu par échange de chaleur à travers les parois du système. Si les parois sont calorifugées, le système est isolé thermiquement et il ne peut plus être à l'équilibre thermique avec le thermostat. L'équilibre mécanique d'un système avec un barostat extérieur est obtenu par "échange de volume avec l'extérieur" par le déplacement des parois du système. Si les parois sont rigides, le système est isolé mécaniquement et il ne peut plus être à l'équilibre mécanique avec le barostat.

### 7.1.2 Équilibre électrostatique d'un conducteur isolé.

Nous allons définir les propriétés d'un conducteur isolé électrostatiquement à partir des remarques thermodynamiques formulées au dessus. Tout d'abord la quantité fondamentale qui caractérise l'électrostatique est la charge électrostatique. C'est une quantité extensive. En revanche, la densité de charge volumique  $\rho$  est une grandeur intensive. C'est elle qui caractérise l'équilibre électrostatique du conducteur.



**Définition 20** : Un conducteur est à l'équilibre électrostatique si la densité de charge volumique est homogène dans le conducteur.

Cet état d'équilibre est atteint par la diffusion des électrons libre du matériau. Si une région du matériau est riche en électrons de conduction ceux-ci se repoussent et diffusent vers les régions pauvres. Cet équilibre étant atteint, il doit perdurer tant qu'aucune contrainte extérieure ne vient perturber le système. Les ions positifs ne jouent aucun rôle dans le processus d'équilibre. La charge négative dans un élément de volume  $d\tau$ , petit devant les dimensions macroscopiques du système mais grand devant les dimensions interatomiques, autour de n'importe quel point  $M$ , est donc constante. Cela ne signifie pas que les électrons de conduction sont immobiles dans le matériau, mais que le nombre d'électrons qui sort de  $d\tau$  est sensiblement égal à celui qui y entre.

Cette propriété implique qu'il n'y a pas de force extérieure sur l'ensemble des électrons contenu dans  $d\tau$ , sinon ceux-ci se mettraient en mouvement dans le sens de la force, et l'équilibre serait rompu. La densité de charge ne serait plus homogène. Comme en tout point la force moyenne ressentie par les électrons d'un élément de volume  $d\tau$  est nulle, on a donc la propriété suivante :



**Propriété 37** : Le champ électrostatique est nul en tout point d'un conducteur électrostatique en équilibre ( $\vec{E} = \vec{0}$ ).

Donc, dans un conducteur à l'équilibre, les charges libres ne subissent aucune force de Coulomb (car  $E = 0$ ). Les électrons bougent sous l'effet de l'agitation thermique. Leur mouvement se fait sans direction privilégiée. Il n'y a donc pas de mouvement collectif des électrons. Il rentre autant d'électrons par unité de temps dans n'importe quel petit élément de volume du conducteur, qu'il n'en sort.

Comme le champ est nul en tout point du conducteur, les dérivées spatiales du champ le sont aussi, d'où on a :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (7.1)$$

L'équation de Maxwell Gauss nous donne  $\rho = 0$

D'où on déduit la nouvelle propriété :



**Propriété 38** : La densité volumique de charge est nulle autour de tout point d'un conducteur électrostatique en équilibre ( $\rho = 0$ ).

Cette propriété implique qu'il y a autant d'électrons de conduction que d'ions positifs dans un élément de volume  $d\tau$ . Si le conducteur est chargé, c'est à dire s'il contient plus d'électrons de conduction que de charges positives sur les ions du réseau, alors le surplus de charges libres est repoussé vers la surface du conducteur.



**Propriété 39** : La répartition des charges est superficielle dans un conducteur électrostatique en équilibre ( $\sigma \neq 0$ ).

D'après la définition du potentiel, on a :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V \quad (7.2)$$

Comme  $E$  est nul dans le conducteur, on a  $\overrightarrow{\text{grad}} V = 0$ . D'où en intégrant cette équation, la dernière propriété fondamentale :



**Propriété 40** : **Le potentiel électrostatique est constant en tout point d'un conducteur électrostatique en équilibre ( $V = Cste$ ).**

Cette propriété implique que l'intérieur d'un conducteur est au même potentiel.

## 7.2 Propriétés électriques près de l'interface

### 7.2.1 Lignes de champ et équipotentiellles.

Nous avons vu au chapitre 2, que les lignes de champ sont toujours perpendiculaires aux équipotentiellles. La surface du conducteur est une équipotentielle. Les lignes de champ sont donc perpendiculaires à cette surface. Ce qui implique que sur la surface du conducteur, le champ électrostatique est perpendiculaire à la surface du conducteur.



**Propriété 41** : **A l'extérieur et près d'un conducteur, le champ électrostatique est perpendiculaire à la surface.**

Autrement dit, la composante normale du champ, dans la région proche du conducteur et à l'extérieur du conducteur est nulle et le champ n'a donc qu'une composante radiale. Ces lignes de champ soit se dirigent vers l'infini soit vers un autre conducteur isolé. Cela peut être montré par le fait qu'une ligne de champ ne coupe jamais deux fois la même équipotentielle.

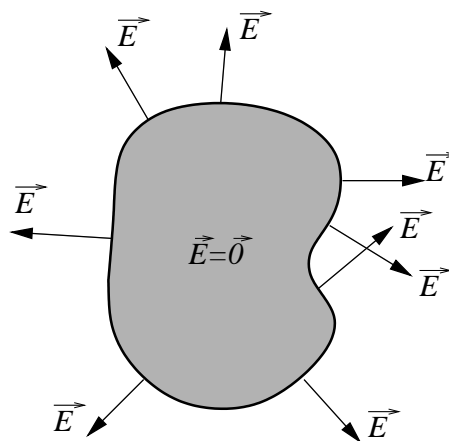


Figure 7.1: Champ électrostatique dans et au voisinage d'un conducteur.

### 7.2.2 Théorème de Coulomb.

Nous allons établir la forme du champ électrostatique dans le proche voisinage extérieur du conducteur. Considérons une petite portion de la surface d'un conducteur et appliquons le théorème de Gauss à un cylindre de section  $dS$  et d'axe perpendiculaire à la surface du conducteur.

- à l'intérieur le champ est nul.
  - sur la surface latérale, à l'extérieur le champ est radial et donc perpendiculaire au vecteur  $d\vec{S}$ .
- Donc on a  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ .
- sur la disque extérieur, on a  $\vec{E}_e \parallel d\vec{S}$

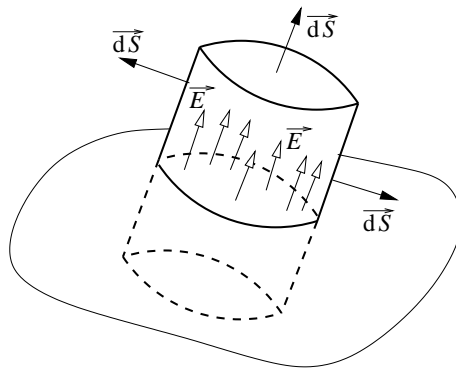


Figure 7.2: Surface de Gauss de par et d'autre d'un métal.

Et on a donc :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = E_e dS \quad (7.3)$$

et d'après le théorème de Gauss, cette quantité est :

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{Q \text{ int } \Sigma} Q_i = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0} \quad (7.4)$$

D'où on déduit le théorème de Coulomb :

**THÉORÈME :** de Coulomb  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_e = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \\ \vec{E}_i = \vec{0} \end{array} \right.$

Cette relation nous permet de calculer la densité de charges surfaciques d'un conducteur, en mesurant le champ électrostatique dans son voisinage proche, c'est à dire en mesurant simplement la force ressentie par une charge objet au voisinage de la surface.



Par exemple, on peut déterminer facilement la densité de charges à la surface de la Terre. En effet la Terre est un milieu conducteur et l'atmosphère peut être considérée comme isolante. Pour déterminer le champ créé par la densité de charges, utilisons un ressort vertical auquel nous accrochons une charge  $Q = +1\text{C}$ . Le ressort s'allonge d'une longueur  $x$ . On a alors le bilan des forces sur la charge :  $F_{\text{ext}} = QE = kx$ . D'où  $E = kx/Q$ . La mesure du champ électrique terrestre au

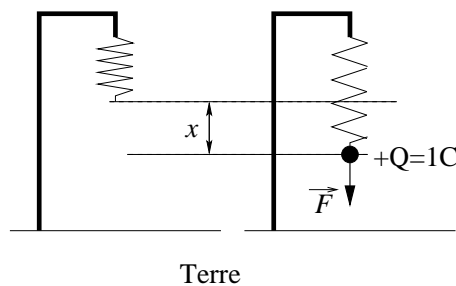


Figure 7.3: Mesure de la densité de charge terrestre.

niveau du sol donne environ :

$$E_{\text{Terre}} = 150 \text{ V/m} \quad (7.5)$$

Ce champ est dirigé vers le centre de la Terre, ce qui montre qu'il y a un excès d'électrons à la surface. Donc d'après le théorème de Coulomb, on trouve :

$$\sigma_{\text{Terre}} = \varepsilon_0 E_{\text{Terre}} = 1.3 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2 \quad (7.6)$$

D'où le nombre d'électrons excès par mètres carrés à la surface de la Terre :

$$n_e = \sigma_{\text{Terre}}/|e| = 8.3 \cdot 10^9 \text{ électrons par m}^2 \quad (7.7)$$

. Ce nombre correspond environ à 8300 électrons libres excédentaires par millimètre carré à la surface de la Terre.

### 7.2.3 Répartition des charges de surface.

Considérons dans un premier temps un conducteur parfaitement sphérique de rayon  $R$  portant une charge totale  $Q$ . La densité de charge surfacique est reliée à la charge totale par :

$$Q = 4\pi R^2 \sigma \quad (7.8)$$

Le potentiel à l'intérieur et sur la surface est constant et vaut :

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (7.9)$$

D'après le théorème de Gauss, le potentiel créé par une boule portant une charge  $Q$  vaut  $V_{\text{ext}}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$  à l'extérieur de la boule. Sur la surface de la boule, on a :  $V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ .

D'où, on déduit la relation :

$$V_0 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \quad (7.10)$$

qui traduit tout simplement la propriété suivante :



**Propriété 42** : **Le potentiel à la surface d'un conducteur est proportionnel à son rayon et à la densité de charges surfaciques.**

Considérons maintenant un conducteur de forme quelconque. On peut découper la surface en grandes quantités de petites surfaces assimilables à des portions de sphères de rayons différents. Le potentiel à laquelle est portée chaque petite portion de sphère est identique, puisque la surface est équipotentielle, et vaut  $V_0$ .

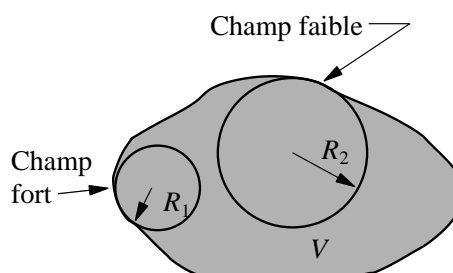


Figure 7.4: Champ autour d'un conducteur.


Considérons deux de ces sphères dont l'une a un rayon  $R_1$  et porte une densité surfacique de charges  $\sigma_1$  et l'autre a un rayon  $R_2$  et une densité  $\sigma_2$ . On a :

$$V_0 = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0} \quad (7.11)$$

D'où on déduit que pour toutes les parties de sphères, à la surface du conducteur, on a


$$\sigma R = \text{constante} \quad (7.12)$$

ce qui se traduit par la propriété physique suivante :


 **Propriété 43** : Dans un conducteur isolé, la densité de charges surfacique en un point est inversement proportionnelle au rayon

D'après le théorème de Coulomb, plus la densité de charge est élevée, plus le champ électrostatique est important. On peut retrouver ce résultat à partir des équations ci dessus, en écrivant :

$$\vec{E}_e = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} = V_0/R \vec{n} \quad (7.13)$$

 **Propriété 44** : Le champ électrostatique est plus intense dans les parties d'un conducteur présentant les plus fortes courbures.

Ce phénomène est connu sous le nom de *pouvoir des pointes*.

 **Paratonnerre.** Si on charge un conducteur qui a la forme d'une pointe, les charges se répartissent principalement dans le bout de la pointe qui présente la plus forte courbure. Pour des pointes très "pointues", le rayon de courbure du bout de la pointe est très petit. Le champ électrostatique peut alors être énorme en bout de pointe. C'est cet effet qui est utilisé dans les paratonnerres. L'éclair

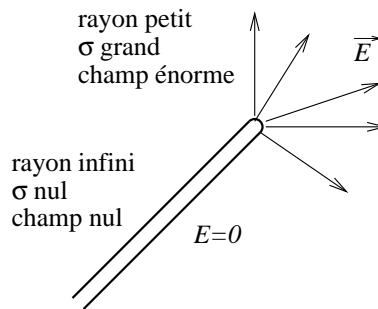



Figure 7.5: Effet de pointe.

est un courant d'électrons entre les orages et la Terre. Lorsque ce courant approche d'une maison pourvue d'un paratonnerre, les électrons ressentent le champ électrique de la pointe et se dirige vers celle-ci. Le conducteur étant relié à la Terre, le courant est évacué dans le sol en épargnant la maison.

 **Vent électrostatique.** Certaines charges peuvent être transférées alors sur des molécules d'air passant près de l'extrémité de la pointe. La molécule d'air devient chargée.

Elle porte une charge de même signe que celles présentes sur la pointe. Elle est donc repoussée. Lorsque la courbure de la pointe est suffisamment petite ce phénomène n'est pas négligeable et il donne naissance à un courant d'air qui peut infléchir une flamme de bougie par exemple.

#### 7.2.4 Pression électrostatique.

### 7.3 Capacité d'un conducteur isolé.

Considérons un conducteur de surface  $\Sigma$  quelconque. La charge totale portée par la surface du conducteur est :

$$Q = \iint_{\Sigma} \sigma(\vec{r}') dS(\vec{r}') \quad (7.14)$$



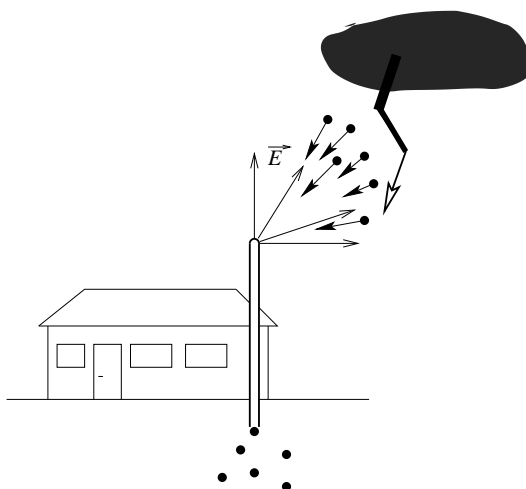


Figure 7.6: Paratonnerre.

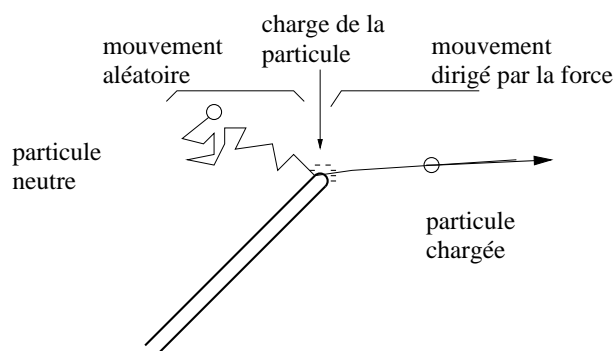


Figure 7.7: Vent électrostatique.

où  $\vec{r}'$  est un point de la surface  $\Sigma$ .

Le potentiel créé en point  $\vec{r}$  par la densité de charge surfacique est

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma(\vec{r}') dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (7.15)$$

Si maintenant nous apportons de nouvelles charges électrostatiques sur le conducteur. Il porte maintenant une charge  $Q' = kQ$  (la charge a été multipliée par  $k$ . Si nous supposons que la densité de charges a été aussi multipliée par  $k$  en tout point de la surface, nous avons :

$$\begin{aligned} Q' &= \iint_{\Sigma} k\sigma(\vec{r}') dS(\vec{r}') \\ &= k \iint_{\Sigma} \sigma(\vec{r}') dS(\vec{r}') \\ &= kQ \end{aligned} \quad (7.16)$$

Donc le fait de multiplier la densité de charges superficielles en tout point par  $k$  amène bien à trouver une charge totale  $kQ$ . Cette solution est unique.


Le potentiel en un point  $\vec{r}$  est donc maintenant :

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{k\sigma(\vec{r}') dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma(\vec{r}') dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= kV(\vec{r}) \end{aligned} \quad (7.17)$$

Donc pour un matériau conducteur de forme quelconque, on a :

$$\frac{Q}{V} = \text{constante} \quad (7.18)$$

ce rapport est la capacité du conducteur définie comme :

 **Définition 21** : Capacité d'un conducteur :  $C = Q/V$  unité ; le Farad ( $F$ )

Il faut faire attention à ne pas confondre la capacité d'un conducteur avec celle d'un condensateur (que nous verrons par la suite).

Considérons une boule métallique de rayon  $R$  portant une charge  $Q$ . Le potentiel créé à l'intérieur de la boule est :

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (7.19)$$

Donc la capacité de la boule est

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (7.20)$$

On voit bien dans ce résultat qu'il ne reste pas de données électrostatique. Dans la capacité n'intervient que des données topologiques du système.

## 7.4 Conducteurs en influence.

Nous venons d'étudier les caractéristiques d'un conducteur isolé. Ce cas est assez rare. En effet, la plupart du temps un conducteur subit l'influence des autres conducteurs de son environnement. Considérons par exemple deux conducteurs chargés très éloignés l'un de l'autre. Les charges libres de chaque conducteur se répartissent sur la surfaces de chaque matériau comme nous venons de le voir et créé un champ électrostatique externe. Si nous approchons les deux matériaux, chacun va ressentir le champ électrique de l'autre. Le champ électrique créé par le conducteur  $A$  va s'appliquer sur les charges du conducteur  $B$  et réciproquement. Si par exemple, un conducteur  $A$  est chargé

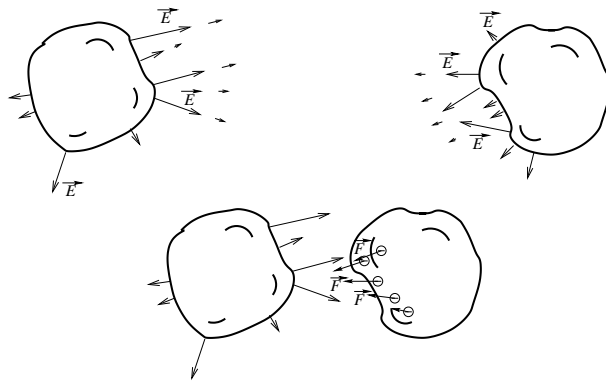


Figure 7.8: Haut : deux conducteurs isolés l'un de l'autre. BAS : deux conducteurs en influence.

positivement et un conducteur  $B$  négativement, le champ électrique créé par le conducteur  $A$  est dirigé vers l'extérieur de celui ci. Les électrons de conduction du conducteur  $B$ , répartis à sa surface ressentent ce champ et subissent donc une force qui est dirigée du conducteur  $B$  vers le conducteur  $A$ . Ils ont alors tendance à migrer vers la surface opposée à la surface en regard. Bien entendu tant qu'il n'y a pas de contact entre les deux matériaux la quantité de charge totale portée par chacun reste constante. Il y a seulement un réajustement de la distribution en surface.

La répartition surfacique des charges va être affectée et les principes dictés pour les conducteurs isolés ne sont plus valables. On ne plus étudier les deux conducteurs séparément mais il faut considérer le système constitué des deux conducteurs chargés.

Nous allons étudier quantitativement ce phénomène appelé le phénomène d'influence électrostatique.

### 7.4.1 Théorème des éléments correspondants.

Considérons deux conducteurs A et B chargés. Considérons que les charges portées par A sont positives ( $Q_A > 0$ ) et que celles portées par B sont négatives ( $Q_B < 0$ ). Enfin, considérons un tube de champ s'appuyant d'une part sur une surface  $dS_A$  autour du point  $\vec{r}_A$  du conducteur A et sur une surface  $dS_B$  autour du point  $\vec{r}_B$  du conducteur B.

Une ligne de champ de ce système commence en un point de la surface de A (chargée positivement) et fini en un point de la surface de B (chargée négativement). Les surfaces latérales d'un tube de champ étant selon les lignes de champ du système, à chaque point de A correspond un point et un seul de B relié par une ligne de champ.



**Propriété 45** : À une surface  $dS_A$  de A correspond une surface  $dS_B$  de B et une seule.



**Définition 22** :  $dS_A$  et  $dS_B$  sont deux éléments correspondants du système.

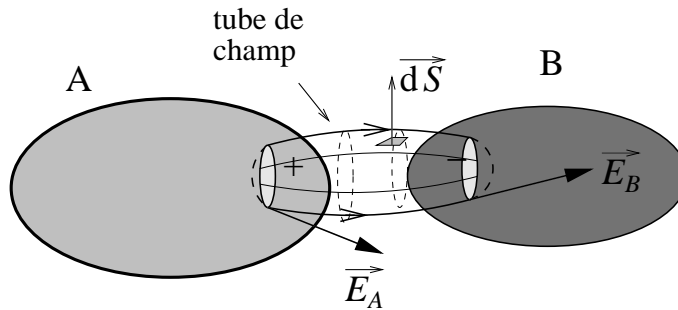


Figure 7.9: Tube de champ.

Appliquons maintenant le théorème de Gauss à la surface  $\Sigma$  délimitée par le tube de champ et deux surfaces s'appuyant sur  $dS_A$  et entièrement à l'intérieur de A d'une part et sur  $dS_B$  et à l'intérieur de B d'autre part. Ces trois surfaces forment bien une surface fermée. On a :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_B \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{tube}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{int}} Q_i$$

- Le champ étant perpendiculaire en tout point au vecteur  $d\vec{S}$  sur le tube de champ, on a donc  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ .
- Les surfaces qui ferme le tube de champ étant situées dans les conducteurs. on a sur ces surfaces  $\vec{E} = \vec{0}$ .

Donc le flux de champ à travers  $\Sigma$  est :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 0 \quad (7.21)$$

D'après le théorème de Gauss, cette quantité est la somme des charges à l'intérieur du tube. Il s'agit simplement des charges surfaciques portées par les deux surfaces  $dS_1$  et  $dS_2$ . Donc on a :

$$\Phi_{\text{Tube}}(\vec{E}) = \sigma_A(\vec{r}_A) dS_A + \sigma_B(\vec{r}_B) dS_B \quad (7.22)$$

ce qui permet dénoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME** : des éléments correspondants.  $\sigma_A(\vec{r}_A) dS_A = -\sigma_B(\vec{r}_B) dS_B$  où  $dS_A$  est la surface du conducteur A centrée sur  $\vec{r}_A$  correspondant à la surface  $dS_B$  du conducteur B centrée sur  $\vec{r}_B$ .

Nous allons par la suite étudier l'action du conducteur A appelé le conducteur inducteur supposé chargé positivement sur le conducteur B appelé le conducteur induit.

### 7.4.2 Influence sur un conducteur induit isolé.

Supposons que la charge totale de l'induit est nul. Ceci peut être réalisé en le connectant à la Terre. Lorsqu'il est isolé son potentiel est donc nul. Il est déconnecté de la Terre et amené dans le champ de l'inducteur. Ce dernier attire les charges négatives de l'induit en vertu du théorème des éléments correspondants. Ce phénomène induit donc un champ électrostatique créé par la séparation des

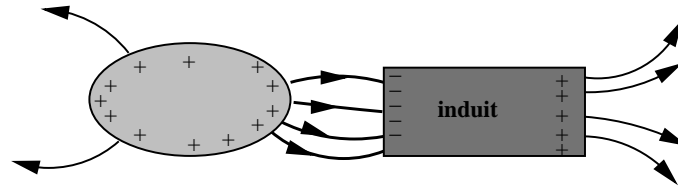



Figure 7.10: Influence d'un conducteur sur un induit isolé.

charges dirigé des charges + vers les charges - dans l'induit. Ce champ est exactement opposé au champ créé par l'inducteur en tout point :

$$\vec{E}_A = -\vec{E}_{\text{induit}} \quad (7.23)$$

Ce phénomène fait apparaître un potentiel  $V_B$  positif inférieur à  $V$ .

 **Propriété 46** : L'influence conserve la charge totale d'un conducteur isolé et modifie son potentiel.

### 7.4.3 Influence sur un conducteur induit à potentiel constant.

Supposons maintenant que pendant l'approche entre l'inducteur et l'induit ce dernier reste connecté à la Terre. Son potentiel reste nul pendant toute l'opération. En vertu du théorème des éléments correspondants des charges négatives apparaissent en regard des du conducteur  $A$ . En revanche en regard de la Terre il ne doit pas y avoir de charges. C'est la Terre qui est un réservoir gigantesque

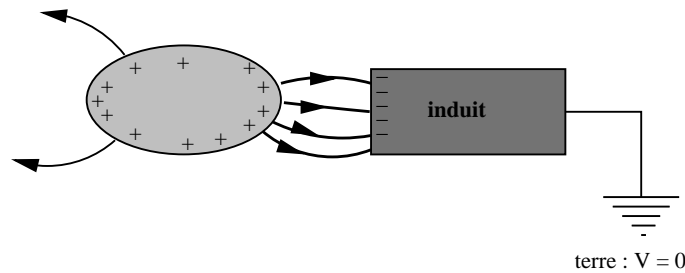




Figure 7.11: Influence d'un conducteur sur un induit relié à la Terre.

de charges qui fournit les électrons de conduction surnuméraires qui apparaissent dans l'induit.

 **Propriété 47** : L'influence conserve la potentiel d'un conducteur relié à la Terre et modifie sa charge totale.

Si maintenant on déconnecte l'induit de la Terre, alors l'induit reste chargé.

 **Propriété 48** : L'influence est une méthode pour électriser un conducteur

### 7.4.4 Influence totale.

Deux corps sont en influence totale si l'induit entoure l'inducteur. Si nous supposons que l'induit à une charge nulle à l'origine et l'inducteur une charge positive  $+Q_A$ , toutes les lignes de champ partent de inducteur (au centre) et vont vers l'induit. En vertu du théorème des éléments corre-

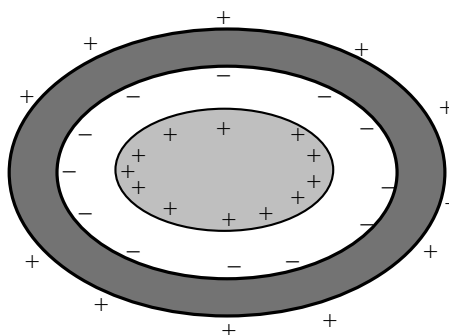


Figure 7.12: Deux conducteurs en influence totale.

spondants, le charge portée dans un tube de champ doit être nulle, donc il apparaît une charge négative sur la face interne de l'induit. De plus si on intègre le théorème des éléments correspondant, on a :

$$\oiint_{\Sigma_A} \sigma_A \, dS_A = - \oiint_{\Sigma_B} \sigma_B \, dS_B \quad (7.24)$$

ce qui donne dans ce cas

$$Q_A = -Q_B \quad (7.25)$$



**Propriété 49** : Les charges portées par les surfaces en regard de deux conducteurs en influence totale sont exactement opposées.

De plus comme la charge totale dans l'induit reste inchangée, il apparaît à l'extérieur de l'induit une charge  $-Q_B = Q_A$ .



**Propriété 50** : La charge totale portée par la surface externe de l'induit est égale à la charge totale de l'inducteur.

#### 7.4.5 Effet d'écran.

Si maintenant nous reprenons les deux conducteurs en influence totale décrits au dessus et que nous connectons l'induit à la Terre. En vertu du théorème des éléments correspondants, la charge dans un tube de champ sur l'élément de la surface externe sont égale à la densité de charges dans l'élément de surface correspondant à la surface de Terre, c'est à dire zéro. Les charges de la face externe s'écoulent dans la Terre. La quantité de charge à l'intérieur de n'importe qu'elle surface de

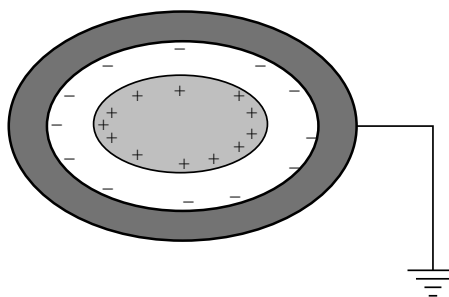


Figure 7.13: Effet d'écran électrostatique.

Gauss extérieure à l'induit est parfaitement nulle. Il n'y a donc plus de champ électrique décelable à l'extérieur. Il est impossible de savoir si le matériau inducteur porte une charge ou non. Dans ce dispositif l'induit porte le nom de Cage de Faraday.

### 7.4.6 Capacités et coefficients d'influence.

On considère maintenant un système de  $n$  conducteurs localisés dans l'espace et relativement proches les uns des autres. Chaque conducteur  $i$  est isolé et porte une charge  $Q_i$  et il crée autour de lui un champ électrostatique ressenti par tous les autres conducteurs. À l'équilibre le conducteur  $i$  est caractérisé par sa charge  $Q_i$  et le potentiel  $V_i$ . Nous allons montrer comment déterminer ces grandeurs qui caractérisent le système à l'équilibre.

Pour cela, relierons tous les conducteurs à la Terre, dans un premier temps. Ils sont tous au potentiel nul. Ensuite, isolons le conducteur 1 de la Terre et apportons lui une charge  $Q_1$ . Son potentiel devient  $V_1$ . Comme nous l'avons vu dans le cas de l'influence d'un conducteur sur un conducteur induit relié à la Terre, des charges, venant de la Terre, apparaissent sur tous les autres conducteurs pour les maintenir dans le champ créé par tous les autres, au potentiel nul. Ces charges sont proportionnelles à  $V_1$ . On peut écrire :

$$Q_i^{(1)} = C_{i1} V_1 \quad (7.26)$$

où  $Q_i^{(1)}$  est la quantité de charges qui apparaît sur le conducteur  $i$  dans le potentiel du conducteur 1 et  $C_{i1}$  est le coefficient de proportionnalité qui sera défini plus loin. Ensuite, isolons le conducteur 2 de la Terre et portons le au potentiel  $V_2$ . Cette opération fait apparaître de nouvelles charges sur tous les autres conducteurs :

$$Q_i^{(2)} = C_{i2} V_2 \quad (7.27)$$

La charge totale portée par chaque conducteur est à l'équilibre :

$$Q_i = C_{i1} V_1 + C_{i2} V_2 \quad (7.28)$$

On voit ici que l'ordre dans lequel on a chargé les conducteurs est indifférent. C'est une propriété générale des états d'équilibre.

On peut réitérer l'opération d'isolation et de charge des autres conducteurs et on obtient :

$$Q_i = \sum_j C_{ij} V_j \quad (7.29)$$

Les coefficients  $C_{ij}$  sont symétriques. Ils ne dépendent que de la géométrie, de la position relative et de l'orientation des conducteurs. Le coefficient  $C_{ii}$  est positif. Les coefficients  $C_{ij}$  sont négatifs.

## 7.5 Les condensateurs.



**Définition 23** : Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs en influence totale. Ces conducteurs sont appelés armatures du condensateur.

L'armature interne  $A_i$  est isolée et porte une charge,  $Q_1 = Q$ . Elle est entourée par l'armature externe  $A_e$ , qui porte la charge totale  $Q_2$  constante.

On a alors les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

La charge  $Q_2$  est répartie sur les faces interne et externe de l'armature avec :

$$Q_2 = Q_i + Q_e \quad (7.31)$$

Comme les conducteurs sont en influence totale, on a

$$Q_i = -Q_1 \quad (7.32)$$

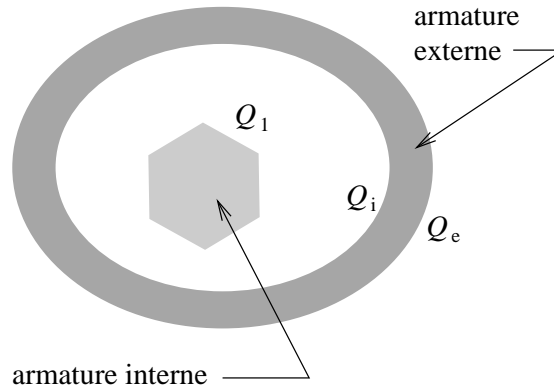


Figure 7.14: Condensateur quelconque.

La relation entre les charges et les potentiels doit être vérifiée quelque soit les valeurs de  $V_1$  et  $V_2$ . Relions l'armature externe à la Terre. Le potentiel de cette armature est alors nul  $V_2 = 0$  tout comme la charge externe  $Q_e = 0$ , d'où

$$Q_2 = -Q_1 \quad (7.33)$$

Le système d'équation devient :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ -Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

Ce qui donne :  $Q_1 = C_{11}V_1 = -C_{21}V_1$ . De plus comme les coefficients d'influence sont négatifs, on a :

$$\boxed{C = C_{11} = -C_{12} = -C_{21}} \quad (7.35)$$

où on a posé  $C = C_{11}$  qui est la capacité du condensateur. Ces coefficients ne dépendent que de la géométrie du système. Ils sont donc valable quelques soient les potentiels appliqués. On a donc :

$$\begin{cases} Q_1 = C(V_1 - V_2) \\ Q_2 = -C(V_1 - V_2) + (C_{22} - C)V_2 \end{cases} \quad (7.36)$$

La plupart des condensateurs sont de forme sphérique, cylindrique ou planaire. Dans ces cas la capacité du système peut être facilement calculée.

### 7.5.1 Capacité d'un condensateur sphérique.

### 7.5.2 Capacité d'un condensateur plan.

Le condensateur plan est constitué de deux plans conducteurs parallèles de surface  $S$  séparés par une distance  $e$ , portés à des potentiels  $V_1$  et  $V_2$ .

Ce système ne correspond pas a priori à notre définition du condensateur. Cependant si les plaques sont suffisamment grandes, elles peuvent être considérées en influence totale.

Il apparaît sur les plaques, une densité de charge surfacique  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$  opposées et on pose

$$\sigma = \sigma_A = -\sigma_B > 0 \quad (7.37)$$

L'application du théorème de Coulomb donne le champ électrostatique entre les deux plaques :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \quad (7.38)$$

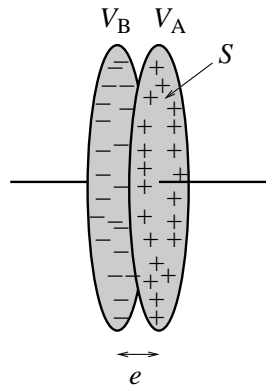


Figure 7.15: Condensateur plan.

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire dirigé de la plaque chargée positivement vers la plaque chargée négativement. On a alors la différence de potentiel entre les deux plaques :

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= - \int \vec{E} \, d\vec{l} \\ &= \frac{\sigma e}{\epsilon_0} \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0 S} \end{aligned} \quad (7.39)$$

D'où la capacité du condensateur plan (qui vaut  $Q/(V_1 - V_2)$ ) :

$$\text{capacité du condensateur plan : } \boxed{C = \epsilon_0 \frac{S}{e}} \quad (7.40)$$

### 7.5.3 Phénomène de condensation.

Considérons une seule plaque (celle de gauche) du condensateur dessiné au dessus. Cette plaque porte une charge  $Q_A$  et elle est au potentiel  $V_A$  proportionnel à  $Q_A$ . On approche une deuxième plaque ( $B$ ) reliée à la Terre. Cette plaque reste au potentiel nul et donc la différence de potentiel entre les deux plaques est simplement  $V_A$ . Pendant qu'on approche les deux plaques la distance  $e$  diminue et donc la capacité du système ( $C \propto 1/e$ ) augmente. La quantité de charge sur  $A$  étant constante, le potentiel de la plaque  $A$  ( $V_A = Q_A/C$ ) décroît.

Pour la ramener au potentiel  $V_A$ , il faut apporter de nouvelles charges à la plaque  $A$ . Donc pour être au même potentiel, le conducteur  $A$  doit porter une charge plus importante en présence du conducteur  $B$  plutôt qu'en son absence. Il y a une *condensation* de l'électricité.

### 7.5.4 Condensateurs en parallèle.

Considérons un ensemble de  $n$  condensateurs et relierons une armature de chaque condensateur à un point  $A$  et l'autre armature à un point  $B$ . Bien entendu, les fils qui relient les condensateurs au points  $A$  et  $B$  sont conducteurs. Tous les fils reliés au point  $A$  sont au potentiel  $V_A$ . De même, tous les fils reliés au point  $B$  sont au potentiel  $V_B$ . La différence de potentiel entre les armatures de chaque condensateur est donc  $V_A - V_B$  et on a :

$$V_A - V_B = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \dots = \frac{Q_k}{C_n} \quad (7.41)$$

La charge totale portée par les armature reliée à  $A$  est :

$$Q = \sum_{k=1}^n Q_k \quad (7.42)$$



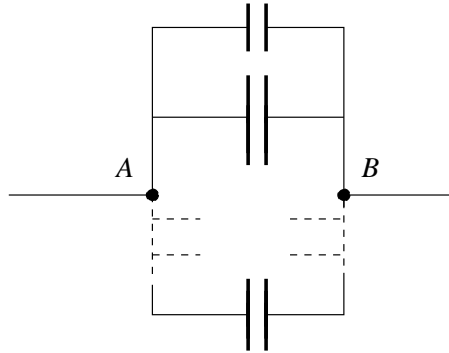


Figure 7.16: Condensateurs monté en parallèle.

d'où on trouve à l'aide des deux équations au dessus :

$$Q = \sum_{k=1}^n (V_A - V_B) C_k = (V_A - V_B) \sum_{k=1}^n C_k \quad (7.43)$$

Cet ensemble de condensateurs est donc équivalent à un condensateur de capacité :

$$\text{condensateurs en parallèle : } \boxed{C = \sum_{i=k}^n C_k} \quad (7.44)$$

### 7.5.5 Condensateurs en série.

Considérons, maintenant, un ensemble de  $n$  condensateurs et reions l'armature externe de chaque condensateur à l'armature interne du suivant.

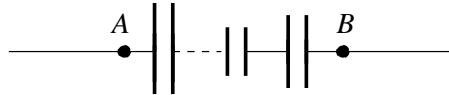


Figure 7.17: Condensateurs monté en série.

L'armature interne du premier condensateur porte une charge  $+Q$ . Son armature externe porte  $-Q$  puisque la charge des deux armatures est nulle. Le système constitué par l'armature externe d'un condensateur et l'armature interne du suivant est un système isolé. A l'origine sa charge totale est donc nulle et elle le reste. Donc la charge porté par l'armature interne de deuxième condensateur est  $+Q$  et sur l'externe  $-Q$ . On peut généraliser à l'ensemble des condensateurs. Pour chaque condensateur  $k$ , on a :

$$Q = C_k (V_i^{(k)} - V_e^{(k)}) \quad (7.45)$$

où  $C_k$  est la capacité du  $k^{\text{ème}}$  condensateur,  $V_i^{(k)}$  et  $V_e^{(k)}$  les potentiels porté par les armatures interne et externe de ce condensateur.

La différence de potentiel entre  $A$  et  $B$  peut être écrite :

$$V_A - V_B = V_i^{(1)} - V_e^{(1)} + V_i^{(2)} - V_e^{(2)} + \dots + V_i^{(n)} - V_e^{(n)} \quad (7.46)$$

avec :

$$\begin{cases} V_A = V_i^{(1)} \\ V_B = V_e^{(n)} \\ V_e^{(l)} = V_e^{(l+1)} \end{cases} \quad (7.47)$$

Donc on a :

$$V_A - V_B = \sum_{k=1}^n \frac{Q}{C_k} = Q \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \quad (7.48)$$

Cet ensemble est donc équivalent à un condensateur qui aurait une capacité telle que :

$$\text{Condensateurs en série : } \boxed{\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}} \quad (7.49)$$

### 7.5.6 Force exercée entre les armatures.

Considérons un condensateur plan dont les armatures sont soumises à une différence de potentiel  $V$ . L'armature  $A$  de surface  $S$  porte une charge  $+Q$  et l'armature  $B$ , une charge  $-Q$ .

Si le vecteur unitaire  $\vec{u}_x$  est dirigé de  $B$  vers  $A$ , le champ électrique entre les deux armatures est égal à :

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x = -\frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{u}_x$$

La force qu'exerce l'armature  $A$  sur l'armature  $B$  est donc :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -Q\vec{E} = \frac{Q^2}{2S\varepsilon_0} \vec{u}_x$$

Cette force est opposée à  $\vec{u}_x$ . Elle est donc dirigée de  $A$  vers  $B$ . C'est donc une force attractive.

On peut la réécrire en fonction de  $V$ . Comme, on a :

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_0 S}{e} V$$

on a donc :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{\varepsilon_0 S}{2e^2} V^2 \vec{u}_x$$

Bien entendu le calcul de la force exercée par  $B$  sur  $A$  donne :

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\frac{\varepsilon_0 S}{2e^2} V^2 \vec{u}_x$$

et la force totale exercée sur le condensateur,  $\vec{F}_{A \rightarrow B} + \vec{F}_{B \rightarrow A}$ , est nulle.

### 7.5.7 Electromètre à plateau.

Un électromètre à plateau est une balance à fleau dont un bras de longueur  $l'$  est relié à un plateau sur lequel on peut accumuler des masses et l'autre bras est relié à une armature d'un condensateur. L'autre armature de ce condensateur est fixe.

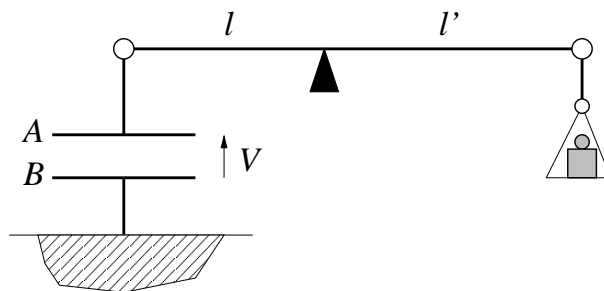


Figure 7.18: Electromètre à plateau.

On peut chercher à mesurer  $V$  en équilibrant la balance avec les masses  $m$ . La condition d'équilibre est simplement que la somme des moments doit être nulle, ce qui s'écrit :

$$F_{A \rightarrow B} l = mg l'$$

D'après la forme de la force exercée entre les armatures, on a :

$$\frac{\varepsilon_0 S}{2e^2} V^2 l = mg l'$$

Ce qui donne :

$$V = K \sqrt{m} \quad \text{avec} \quad K = \sqrt{\frac{2g l' e^2}{\varepsilon_0 S l}}$$

On peut noter que cet équilibre est instable. En effet si l'armature  $A$  se rapproche  $B$  alors  $e$  diminue et la force électrique et attractive entre les deux armatures augmente. Donc elles s'écartent de plus en plus.



# Chapitre 8

## Les Distributions de courant.

*Nous avons vu que dans la matière, les charges sont en mouvement perpétuel. En électrostatique, les distributions de charges sont invariantes dans le temps. Le mouvement global des charges dans des matériaux conducteurs donne naissance à des courants électriques. Nous allons étudier dans ce chapitre, les causes des courants électriques, leur distribution et comment les représenter. Ce chapitre est en interface entre ceux consacrés à l'électrostatique et ceux consacrés à la magnétostatique.*

### 8.1 Courant électrique.

#### 8.1.1 Nature du courant.

Nous avons vu dans les chapitres précédents qu'un matériau conducteur est constitué d'ions positifs localisés près des noeuds d'un réseau et d'électrons de conduction. À l'équilibre, le champ électrostatique dans le matériau est nul. Si le matériau est chargé, les électrons surnuméraires se répartissent alors sur la surface du matériau.

Dans ce qui suit, on considère un conducteur filiforme (pour simplifier) relativement long et on applique une différence de potentielle entre les bouts du conducteur. Nous ne sommes plus dans le cas de l'électrostatique, puisque la différence de potentiel créé partout dans le conducteur un champ électrique qui est dû à une contrainte externe (pile, générateur,...). C'est la différence avec l'électrostatique :

- en électrostatique, le champ est créé par les charges du système.
- en électricité, le champ est créé par un générateur externe.

Ce champ ne peut pas être annulé par une quelconque répartition des charges. Chaque électron de conduction du matériau ressent une force de Coulomb. Cette force les met en mouvement. En plus de cette force chaque électron interagit avec les ions du réseau et avec les autres électrons de son voisinage. Son mouvement est donc très désordonné. Il y a cependant bel et bien un mouvement d'ensemble des électrons de conduction dans le conducteur dans le sens opposé au champ.



**Définition 24** :

On appelle courant électrique tout mouvement d'ensemble de charges électrique dans un référentiel. <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Il faut noter que dans les solutions électrolytiques le courants est assuré par les ions positifs de la solution aussi bien que par les ions négatifs.

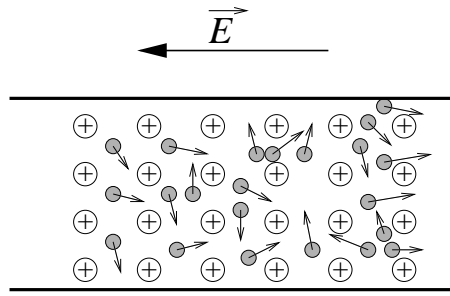
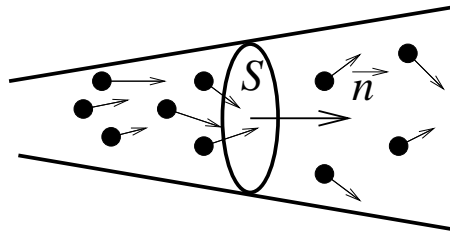


Figure 8.1: Courant électrique dans un conducteur.

### 8.1.2 Intensité du courant

Considérons une surface  $S$  d'un conducteur orientée portant un vecteur unitaire  $\vec{n}$ . Le nombre

Figure 8.2: Courant à travers une surface  $S$ .

d'électrons de conduction qui traverse cette surface entre  $t$  et  $t + dt$  est noté  $dn_e$ . La charge mobile qui traverse la surface pendant cette même durée est :  $dQ_m = -|e| dn_e$ . L'intensité du courant qui a traversé cette surface est donnée par :

**Définition 25** : Intensité :  $I(S, t) = \frac{|dQ_m|}{dt}$

Elle est comptée positive dans le sens de  $\vec{n}$ .  
L'intensité électrique s'exprime en Ampère.

### 8.1.3 Conservation de la charge électrique.

Un système ouvert est susceptible d'échanger de la matière avec l'extérieur. Le courant électrique est de la matière chargée ; cette règle s'applique donc aussi aux courants électriques.

Considérons un système, de volume  $V$ , connecté à des conducteurs électriques dans lesquels circulent des courants électriques. Le système dans le volume  $V$  ne peut pas créer ou faire disparaître

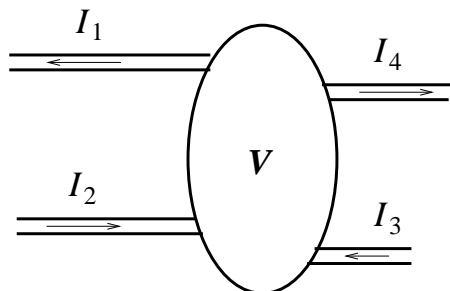


Figure 8.3: Echanges de courants électriques.

des charges électriques à partir de rien. Les charges qui apparaissent sont amenées de l'extérieur par un conducteur. De même celles qui disparaissent sont évacuées par un conducteur. Donc la variation de charges dans le volume  $V$  est uniquement due aux échanges via les courants entrant ou sortant à travers la surface fermée entourant  $V$ . D'après la définition de l'intensité, on a donc :

$$\frac{dQ_v}{dt} = \sum_k I_k$$

où  $I_k$  est l'intensité du courant dans le  $k^{\text{ème}}$  conducteur relié à  $V$ .

Si la somme des courants entrant est égale à la somme des courants sortant, on a  $\sum_k I_k = 0$  et donc  $Q_v$  est constante.

### 8.1.4 Loi de noeuds.

Si le volume  $V$  est remplacé par un point matériel où sont raccordées des conducteurs électrique, il n'y a pas d'accumulation de charge en ce point  $Q_v = 0$ . On a alors toujours



**Propriété 51** : Loi des noeuds :  $\sum_k I_k = 0$

## 8.2 Distribution de courant

### 8.2.1 Vitesse du courants.

Notons  $n_e$ , la densité d'électrons de conduction dans un conducteur. Cette grandeur (nombre d'électrons par unité de volume) est très élevée et dépend du matériau. Un volume  $d\tau$  contient  $n_e d\tau$  électrons de conduction. Chaque électron a une vitesse instantanée  $\vec{V}_k$ . La moyenne du carré de ces vitesses peut être calculée par le théorème d'équipartition de l'énergie :  $\frac{1}{2}m\overline{V_k^2} = \frac{3}{2}k_B T$  où  $m_e$  est la masse de l'électron,  $k_B$  la constante de Boltzmann ( $1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K) et  $T$  la température (en Kelvin). A  $T = 300$  K, on a une bonne approximation de la vitesse moyenne :  $\overline{V_k^2}^{1/2} = 1.2 \cdot 10^5$  m/s. Ces vitesses sont très élevées ( $\approx 10^5$  m/s) et changent d'orientation très rapidement (sinon les électrons sortiraient des conducteurs quasi-instantanément). La vitesse d'ensemble dans le volume  $d\tau$  est donnée par :

$$\vec{v} = \frac{1}{n_e d\tau} \sum_{k=1}^{n_e} \vec{V}_k$$

C'est une grandeur moyenne spatiale. Si les vitesses de tous les électrons étaient colinéaires, on aurait  $\vec{v} = \vec{V}_k$ . Les vitesses instantanées des électrons sont dues à l'agitation thermique, à laquelle se superpose le mouvement d'ensemble dû à l'application du champ électrique. Elles sont dirigées dans presque toutes les directions (avec une légère préférence pour l'opposé du champ électrique). C'est pour cette raison que la vitesse d'ensemble est énormément inférieure à la vitesse instantanée.

$$v \ll V_k$$

### 8.2.2 Courants volumiques

La densité de charges mobiles est  $\rho_m = -n_e |e|$ . Cette quantité n'est pas la même chose que  $\rho = \frac{dq}{d\tau}$  pour lequel toutes les charges (mobiles ou non) sont comptées.



**Définition 26** : Densité de courant volumique :  $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$

Ce vecteur s'exprime en A.m<sup>-2</sup>.

Nous avons représenté sur la figure ci dessus l'évolution de charges mobiles pendant un temps  $dt$  dans un conducteur de section  $dS$ . Les charges se sont globalement déplacées de  $\vec{l} = \vec{v} dt$ .

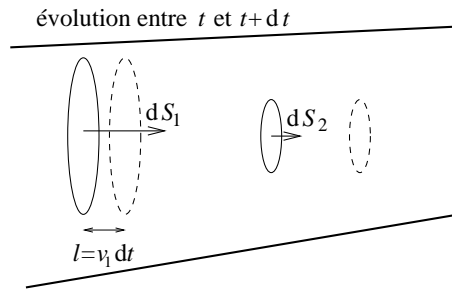


Figure 8.4: Echanges de courants électriques.

Donc pendant un temps  $dt$ , une quantité de charges  $d^2Q_m = \rho_m d\vec{S}\vec{v} dt$  a traversé la surface  $dS$ . D'après la définition de l'intensité, on a alors :

$$\begin{aligned} dI &= \frac{d^2Q_m}{dt} \\ &= \rho_m \vec{v} d\vec{S} \\ &= \vec{j} d\vec{S} \end{aligned}$$

**Propriété 52** : **Intensité du courant électrique à travers une surface  $S$  :**

$$I = \iint_S \vec{j} d\vec{S}$$

Cette relation sera très utile particulièrement lors de l'étude du magnétisme.

☺ Pour alimenter, quatre ampoules de 50 Watts, dans une habitation où la tension du courant est de 220 Volts, il faut délivrer une intensité de l'ordre de :  $I = P/U = 200/220 \approx 1$  Ampère. On considère que ce courant de 1 A circule dans un fil de cuivre de section  $1.5 \text{ mm}^2$ . On peut facilement calculer la vitesse d'ensemble du courant (qui est la vitesse à laquelle les électrons vont aller de l'interrupteur à l'ampoule par exemple) sachant que la densité volumique de charges libres est de  $n_e = 8.4 \cdot 10^{28}$  électrons/ $\text{m}^3$ .

On a

$$I = \iint_S j dS = jS \quad j = \rho_m v \quad \text{et} \quad \rho_m = -n_e |e|$$

d'où on trouve :

$$v = \frac{I}{S n_e |e|} = \frac{1}{1.5 \cdot 10^{-6} \cdot 8.4 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} = 4.17 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

ce qui est terriblement lent. Donc, un électron situé au niveau de l'interrupteur mettra de l'ordre de quelques heures pour arriver à une ampoule.

On aussi calculer le nombre de charges  $N_e$  traversant la section du fil par seconde (qui est ce qui est fournit à l'ampoule par seconde).  $Q_m = \int I dt = I t$  avec  $t = 1$  et  $Q_m = N_e |e|$ . D'où on trouve :

$$N_e = \frac{It}{|e|} = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19}} =$$

### 8.2.3 Flux de $\vec{j}$ et conservation de charges.

Considérons maintenant un volume  $V$  entouré d'une surface  $S$ . A un instant  $t$ , la densité volumique de charge mobile au point  $\vec{r}$  de  $V$  est  $\rho_m(\vec{r}, t)$ . A cet instant, la charge mobile totale dans  $V$  est :

$$Q_m = \iiint_V \rho_m d\tau$$



; Donc on a :

$$\frac{dQ_m}{dt} = \iiint_V \frac{d\rho_m}{dt} d\tau$$

Cette quantité est aussi l'intensité du courant ( $I = dQ_m/dt$ ) qui est entré dans le volume  $V$  à travers la surface  $S$ . Il peut être écrit :

$$I = - \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Le signe apparait pour garder l'intensité positive alors que  $\vec{j}$  est dirigé vers l'intérieur de  $V$  et  $\vec{S}$  vers l'extérieur. On a donc :

$$\iiint_V \frac{d\rho_m}{dt} d\tau = - \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

D'où, en utilisant le théorème d'Ostrogradski :

$$\iiint_V \frac{d\rho_m}{dt} d\tau = - \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} d\tau$$

$$\iiint_V \left( \frac{d\rho_m}{dt} + \operatorname{div} \vec{j} \right) d\tau = 0$$

Ce résultat étant valable quelque soit le volume d'intégration  $V$ , on a alors la propriété suivante qui est toujours vrai



**Propriété 53** : Loi de conservation des charges :  $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{d\rho_m}{dt} = 0$

### 8.2.4 Lignes et tubes de courant.



**Définition 27** : Une ligne de courant est une ligne continue dont le vecteur densité volumique de courant est tangent en tout point.



**Définition 28** : Un tube de courant est une surface ouverte constituée de lignes de courant.

### 8.2.5 Courants surfaciques.

Dans certains matériaux et aussi

Pour certaines topologie des matériaux conducteurs (les conducteurs creux avec des parois fines par exemple), on ne peut pas considérer le courant électrique comme volumique mais il faut avoir plutôt une approche surfacique du problème. Afin d'établir les équations du courant dans ces cas, nous

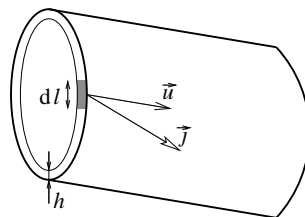



Figure 8.5: Courant surfacique.

supposons que la surface du conducteur dessiné au dessus à une épaisseur  $h$ . Considérons une surface élémentaire  $dS = h dl$  de la section du tube, orientée selon le vecteur unitaire  $\vec{u}$ . Cette

surface est traversée par un courant  $dI$ . Comme  $h$  est petit, le vecteur  $\vec{j}$  est dans le plan tangent à la surface du conducteur et on a :

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot h \, dl \, \vec{u}$$

Faisons maintenant tendre l'épaisseur  $h$  vers 0 à courant constant. On note  $\vec{j}_s = h\vec{j}$  et on a :

 **Définition 29** :  $\vec{j}_s$  : densité de courant surfacique avec  $dI = \vec{j}_s \cdot \vec{u} \, dl$

### 8.3 Symétrie des courants.

# Liste des Figures

1.1	La première expérience d'électrostatique. . . . .	2
1.2	Le premier générateur électrostatique : la machine de Guericke. . . . .	3
1.3	La première expérience de conduction de l'électricité par Stephen Gray. . . . .	3
1.4	Le premier condensateur : la bouteille de Leyde. . . . .	5
1.5	Répartition des charges dans un isolant . . . . .	8
1.6	Répartition des charges dans un conducteur . . . . .	8
1.7	La première expérience quantitative : la balance de Coulomb. . . . .	12
1.8	Distribution de charge invariante par translation selon $Oy$ . . . . .	15
1.9	Distribution de charge invariante par translation selon $Oy$ . . . . .	15
1.10	Pyramide à base carrée présentant quatre plans symétrie. . . . .	17
1.11	Motif présentant une symétrie. . . . .	18
1.12	Motif présentant une symétrie. . . . .	18
2.1	Le champ électrostatique. . . . .	23
2.2	Champ électrostatique créé par deux charges égales sur le plan médiateur . . . . .	25
2.3	Champ électrostatique créé par deux charges égales. . . . .	26
2.4	Champ électrostatique créé par deux charges opposées. . . . .	27
2.5	Champ électrostatique créé par quatre charges. . . . .	29
2.6	Fil infini portant une densité linéique de charges. . . . .	29
2.7	disque portant une densité surfacique de charges. . . . .	31
2.8	Champ électrique créé par un disque chargé en surface. . . . .	32
2.9	Expérience de Millikan. . . . .	33
3.1	Décomposition de $\vec{E}$ sur un contour donné. . . . .	36
3.2	. . . . .	38
3.3	. . . . .	39
3.4	. . . . .	39
3.5	. . . . .	42
3.6	. . . . .	43
3.7	. . . . .	43
4.1	Surface ouverte (à gauche) et surface fermée 'à droite' . . . . .	47
4.2	Flux de champ à travers une surface fermée. . . . .	48
4.3	Angle solide . . . . .	49
4.4	Flux d'une charge (extérieure à la surface) à travers une surface. . . . .	49
4.5	Flux d'une charge (intérieure à la surface) à travers une surface. . . . .	50
4.6	Représentation sphérique. . . . .	52
4.7	Théorème de Gauss appliqué à une boule. . . . .	53
4.8	. . . . .	55
4.9	. . . . .	55
4.10	. . . . .	57
4.11	. . . . .	58
4.12	. . . . .	59
4.13	. . . . .	60

4.14	.....	62
5.1	Champ de vecteur le long d'un contour $\mathcal{C}$ .	64
5.2	Division d'un contour en deux sous-contours.	64
5.3	Décomposition d'un contour en une infinité de sous contours infinitésimaux.	64
5.4	.....	65
5.5	.....	68
6.1	.....	74
6.2	.....	75
6.3	.....	77
6.4	.....	78
6.5	.....	79
6.6	.....	80
6.7	.....	80
7.1	Champ électrostatique dans et au voisinage d'un conducteur.	85
7.2	Surface de Gauss de part et d'autre d'un métal.	86
7.3	Mesure de la densité de charge terrestre.	86
7.4	Champ autour d'un conducteur.	87
7.5	Effet de pointe.	88
7.6	Paratonnerre.	89
7.7	Vent électrostatique.	89
7.8	Haut : deux conducteurs isolés l'un de l'autre. BAS : deux conducteurs en influence.	90
7.9	Tube de champ.	91
7.10	Influence d'un conducteur sur un induit isolé.	92
7.11	Influence d'un conducteur sur un induit relié à la Terre.	92
7.12	Deux conducteurs en influence totale.	93
7.13	Effet d'écran électrostatique.	93
7.14	Condensateur quelconque.	95
7.15	Condensateur plan.	96
7.16	Condensateurs monté en parallèle.	97
7.17	Condensateurs monté en série.	97
7.18	Electromètre à plateau.	98
8.1	Courant électrique dans un conducteur.	102
8.2	Courant à travers une surface $S$ .	102
8.3	Echanges de courants électriques.	102
8.4	Echanges de courants électriques.	104
8.5	Courant surfacique.	105

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Historique : vers la Charge Électrostatique.</b>	<b>1</b>
1.1	La Charge Electrostatique. . . . .	1
1.1.1	Thalès : l'expérience fondamentale. . . . .	1
1.1.2	Gilbert : Les conducteurs et les isolants. . . . .	2
1.1.3	Von Guericke : les machines. . . . .	3
1.1.4	Gray : Les observations. . . . .	3
1.1.5	Du Fay : la théorie à deux fluides. . . . .	4
1.1.6	van Musschenbroek : le premier condensateur. . . . .	5
1.1.7	Franklin : la théorie à un fluide. . . . .	5
1.2	Explication de l'expérience d'attraction par friction. . . . .	6
1.3	Distribution de charges. . . . .	7
1.3.1	Les isolants . . . . .	8
1.3.2	Les conducteurs . . . . .	8
1.4	Les distributions discrète et continue. . . . .	9
1.4.1	Distribution discrète. . . . .	9
1.4.2	Distribution continue . . . . .	9
1.4.3	Densité linéique . . . . .	10
1.4.4	Densité surfacique . . . . .	10
1.4.5	Densité volumique . . . . .	11
1.5	La force de Coulomb. . . . .	12
1.6	Invariances . . . . .	14
1.6.1	Invariances par Translation. . . . .	14
1.6.2	Invariances par Rotation. . . . .	15
1.7	Symétrie . . . . .	16
1.7.1	Principe de Curie. . . . .	16
1.7.2	Symétrie plane . . . . .	16
1.7.3	Antisymétrie plane . . . . .	17
1.7.4	La force et la symétrie plane. . . . .	17
1.7.5	La force et l'antisymétrie plane. . . . .	19
<b>2</b>	<b>Le Champ Électrostatique.</b>	<b>21</b>
2.1	Définition du champ électrostatique créé par une charge. . . . .	21
2.2	Définition du champ électrostatique créé par une distribution de charges discrètes. . . . .	22
2.3	Lignes de champ. . . . .	23
2.4	Champ créé par des distributions ponctuelles de charges . . . . .	24
2.4.1	Champ créé par deux charges égales . . . . .	24
2.4.2	Champ créé par deux charges opposées. . . . .	26
2.5	Champ créé par quatre charges. . . . .	28
2.6	Champs électrique créé par une distribution linéique uniforme. . . . .	29
2.7	Champs électrique créé par une distribution surfacique uniforme. . . . .	30
2.8	Expérience de Millikan. Mesure de $ e $ . . . . .	32

<b>3</b>	<b>Energie et potentiel Électrostatique.</b>	<b>35</b>
3.1	Définition du travail électrostatique. . . . .	35
3.1.1	Circulation d'un champ . . . . .	35
3.1.2	Travail électrostatique entre deux points . . . . .	38
3.2	Energie potentielle. . . . .	38
3.2.1	Energie potentielle. . . . .	38
3.2.2	Energie potentielle d'interaction de deux charges avec une troisième. . . . .	39
3.2.3	Relation entre énergie potentielle et force. . . . .	40
3.3	Le potentiel électrostatique . . . . .	40
3.3.1	Définition . . . . .	40
3.3.2	Relation entre le champ et le potentiel. . . . .	41
3.3.3	Surface équipotentielles et lignes de champs. . . . .	42
3.3.4	Potentels créés par des distributions continues de charges. . . . .	44
3.3.5	Continuité du potentiel. . . . .	44
3.4	Equation de Poisson et Laplace. . . . .	45
<b>4</b>	<b>Le Théorème de Gauss</b>	<b>47</b>
4.1	Flux de champ électrique. . . . .	47
4.2	Angle solide . . . . .	48
4.3	Théorème de Gauss. . . . .	50
4.4	Utilisation du Théorème de Gauss. . . . .	51
4.4.1	Généralités. . . . .	51
4.4.2	Coordonnées sphériques. . . . .	51
4.4.3	Potentiel créé par la boule. . . . .	54
4.4.4	Coordonnées cylindriques. . . . .	54
4.4.5	Potentiel créé par le cylindre. . . . .	57
4.4.6	Coordonnées cartésiennes. . . . .	58
4.4.7	Lame chargée en volume. . . . .	61
<b>5</b>	<b>Les Équations de Maxwell de l'Électrostatique.</b>	<b>63</b>
5.1	Equation de Maxwell Faraday. . . . .	63
5.1.1	Le théorème de Stokes. . . . .	63
5.1.2	Rotationnel du champ électrostatique. . . . .	67
5.2	Equation de Maxwell Gauss. . . . .	67
5.2.1	Le théorème d'Ostrogradski. . . . .	67
5.2.2	Divergence du champ électrostatique. . . . .	69
5.3	Exemples de calcul de champs. . . . .	70
5.3.1	Boule chargée en volume. . . . .	70
<b>6</b>	<b>Le Dipole Électrostatique</b>	<b>73</b>
6.1	Définition du dipole . . . . .	73
6.1.1	Exemples de molécules apolaires . . . . .	73
6.1.2	Exemples de molécules polaires . . . . .	73
6.1.3	Définition du moment dipolaire . . . . .	74
6.2	Potentiel créé par un dipole . . . . .	74
6.3	Champ électrostatique créé par un dipole. . . . .	76
6.4	Action d'un champ électrique uniforme sur un dipole. . . . .	77
6.4.1	Translation du dipole. . . . .	78
6.4.2	Rotation du dipole. . . . .	78
6.4.3	Energie potentielle d'un dipole dans un champ. . . . .	78
6.4.4	Molécules polaires dans un champ. . . . .	79
6.4.5	Molécules polaires en solution ionique. . . . .	80

<b>7</b>	<b>Les Conducteurs en Équilibre Électrostatique.</b>	<b>83</b>
7.1	Définition d'un conducteur à l'équilibre. . . . .	83
7.1.1	Définition d'un équilibre . . . . .	83
7.1.2	Équilibre électrostatique d'un conducteur isolé. . . . .	84
7.2	Propriétés électriques près de l'interface . . . . .	85
7.2.1	Lignes de champ et équipotentiellles. . . . .	85
7.2.2	Théorème de Coulomb. . . . .	85
7.2.3	Répartition des charges de surface. . . . .	87
7.2.4	Pression électrostatique. . . . .	88
7.3	Capacité d'un conducteur isolé. . . . .	88
7.4	Conducteurs en influence. . . . .	90
7.4.1	Théorème des éléments correspondants. . . . .	91
7.4.2	Influence sur un conducteur induit isolé. . . . .	92
7.4.3	Influence sur un conducteur induit à potentiel constant. . . . .	92
7.4.4	Influence totale. . . . .	92
7.4.5	Effet d'écran. . . . .	93
7.4.6	Capacités et coefficients d'influence. . . . .	94
7.5	Les condensateurs. . . . .	94
7.5.1	Capacité d'un condensateur sphérique. . . . .	95
7.5.2	Capacité d'un condensateur plan. . . . .	95
7.5.3	Phénomène de condensation. . . . .	96
7.5.4	Condensateurs en parallèle. . . . .	96
7.5.5	Condensateurs en série. . . . .	97
7.5.6	Force exercée entre les armatures. . . . .	98
7.5.7	Electromètre à plateau. . . . .	98
<b>8</b>	<b>Les Distributions de courant.</b>	<b>101</b>
8.1	Courant électrique. . . . .	101
8.1.1	Nature du courant. . . . .	101
8.1.2	Intensité du courant . . . . .	102
8.1.3	Conservation de la charge électrique. . . . .	102
8.1.4	Loi de noeuds. . . . .	103
8.2	Distribution de courant . . . . .	103
8.2.1	Vitesse du courants. . . . .	103
8.2.2	Courants volumiques . . . . .	103
8.2.3	Flux de $\vec{j}$ et conservation de charges. . . . .	104
8.2.4	Lignes et tubes de courant. . . . .	105
8.2.5	Courants surfaciques. . . . .	105
8.3	Symétrie des courants. . . . .	106