

Chapitre 1

Le magnétisme.

1.1 Historique - Résultats expérimentaux.

1.1.1 La première expérience.

Les phénomènes magnétiques sont connus depuis aussi longtemps que les phénomènes électrostatiques. Dès l'antiquité, vers le VI^{ème} siècle avant J.C., on savait que la *Pierre d'aimant* attirait le fer. Ces pierres d'aimant, aussi appelées magnétites, sont constituées d'oxyde de Fer, Fe_3O_4 , et se trouvaient près de la ville de Magnésia dans l'actuelle Turquie. Le fer attiré par la magnétite possède alors temporairement les mêmes propriétés que la magnétite et peut aussi attirer certains matériaux.

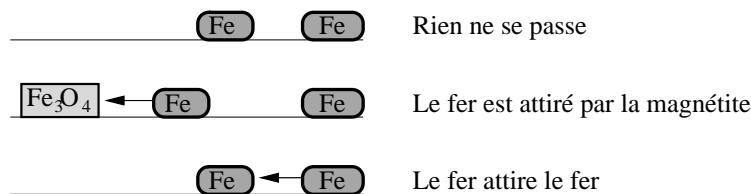


Figure 1.1: L'expérience fondamentale.

C'est Aristote qui fut le premier à signaler ces phénomènes. Dans la suite, nous adopterons la définition suivante :


Définition 1 : Un aimant est un objet qui attire le fer et qui lui confère cette propriété

La première grande différence avec les phénomènes électrostatiques, qui fut décrite par Thalès, vient du fait que dans l'expérience d'attraction par friction, il est nécessaire de frotter le bâton d'ambre avec une peau de chat pour qu'il y ait attraction ou répulsion alors qu'ici la magnétite attire le fer sans qu'il soit besoin d'opérer une quelconque manipulation dessus.

1.1.2 Expérience avec une boussole.

Par la suite, les chinois furent les premiers à utiliser les propriétés des aimants pour en faire des boussoles. Chen Koua fut le premier à mentionner les aiguilles aimantées qui montraient le sud au XI^{ème} siècle, mais les chinois avaient connaissance des propriétés des aimants dès le III^{ème} siècle. Il y a plus de 1000 ans, ils ont remarqué qu'un aimant libre de tourner prenait à la surface de la Terre une direction privilégiée. Dès le XII^{ème} siècle, ils ont utilisé les aimants pour réaliser des boussoles qui étaient principalement utilisées pour la navigation côtière. Les boussoles étaient alors constituées d'une fine aiguille de magnétite posée sur de la paille flottant sur de l'eau dans un récipient gradué. La direction prise par l'aiguille est très proche de la ligne rejoignant les pôles géographiques terrestres nord et sud. On a alors rapidement remarqué que l'extrémité de l'aiguille

orientée vers le nord est toujours la même. On a donc naturellement déduit que les deux extrémités de l'aiguille ne sont pas équivalentes. L'une est baptisée pôle nord et l'autre pôle sud. Une aiguille aimantée ne présente pas des propriétés symétriques.


 **Propriété 1** : Une aiguille aimantée possède toujours un pôle nord et un pôle sud.

En occident, Pierre de Maricourt a laissé le premier traité concernant les propriétés des aimants. On sait peu de chose sur Pierre de Maricourt (dit Pierre le Pèlerin) sauf qu'il était au coté de Charles I^{er} de Sicile au siège de Lucera en 1269. Cet événement permet donc de pouvoir dater approximativement son traité de magnétisme : "*Epistola Petri Peregrini de Maricourt ad Sygerum de Foucaucourt, militem, de magneté*"¹ Dans ce traité, il se base sur des expériences déjà connues concernant les aimants pour faire une présentation logique des lois fondamentales concernant les aimants.


La deuxième partie de son traité présente moins d'intérêt. Il essaye d'y démontrer la possibilité de réaliser le mouvement perpétuel à l'aide d'aimants.

1.1.3 Expérience avec deux boussoles.

Par la suite, William Gilbert de Colchester, fit de nombreuses expériences concernant le magnétisme auquel Il apporta une contribution certainement plus importante encore que celle qu'il apporta à l'électrostatique. Il est connu comme le *père du magnétisme*. Il a collecté l'ensemble de ces résultats et toutes les connaissances en magnétisme disponibles à l'époque dans le traité : "*De Magneté*" qui fut rédigé en 1600 dont le titre exact peut se traduire par : Sur les Aimants, les Corps Magnétiques et le grand Champ Magnétique Terrestre. Il a notamment fait de nombreuses découvertes qui visaient à produire et stocker le magnétisme. Il a aussi observé que le magnétisme existant dans un bout de matériau est détruit quand le matériau est suffisamment chauffé. Il a aussi noté la première distinction entre le magnétisme et l'électrostatique :

 **Propriété 2** : La force exercée entre deux objets magnétique tend à les aligner.
Elle est faiblement affectée par la plupart des objets situés dans l'espace de l'expérience.

En revanche, la force entre deux objets électrisés est une force d'attraction ou de répulsion et elle est fortement affectée par les objets. De ces expériences qualitatives furent déduites rapidement les lois suivantes :

 **Propriété 3** : Deux pôles nord (ou deux pôles sud) se repoussent.
Un pôle nord et un pôle sud s'attirent.

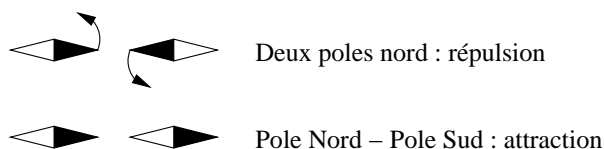


Figure 1.2: Expérience avec deux boussoles.

Il a aussi montré qu'une boussole posée à la surface d'une boule constituée dans un matériau magnétique s'oriente toujours dans la même direction comme elle le fait à la surface de la Terre.

Ces effets montrent l'existence d'une nouvelle interaction autre que les interactions gravitationnelle et électrostatique.

¹Lettre de Peter Peregrinus de Maricourt à Sygerus de Foucaucourt, soldat, au sujet de l'aimant.

1.1.4 Expérience avec une boussole et un courant.

Les expériences concernant le magnétisme et particulièrement la relation entre les courants électriques et le magnétisme commencèrent effectivement en 1819, lorsque Oersted² mit en évidence l'effet d'un courant électrique sur un aimant. Il utilisa une boussole et un fil électrique placé juste au dessus de la boussole et orienté dans la direction nord-sud. En l'absence de courant dans le fil le pôle nord de la boussole est orienté vers le nord. Lorsqu'un courant circule dans le fil, l'aiguille pivote pour s'orienter perpendiculairement au fil. Si on inverse le sens du courant électrique, l'aiguille pivote de 180.

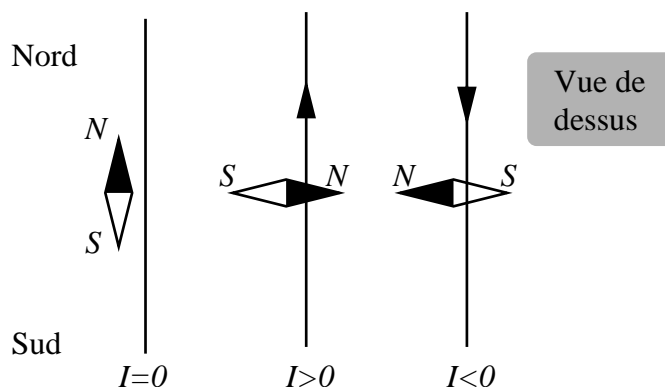


Figure 1.3: L'expérience d'Oersted.

D'après le principe fondamental de la dynamique, le mouvement de l'aiguille de la boussole a eu lieu sous l'effet d'un couple qui résulte de deux forces s'appliquant l'une sur le pôle nord et l'autre sur le pôle sud de l'aimant. Oersted a donc prouvé que :



La force magnétique

- Propriété 4** :
- est non radiale
 - dépend du sens du courant

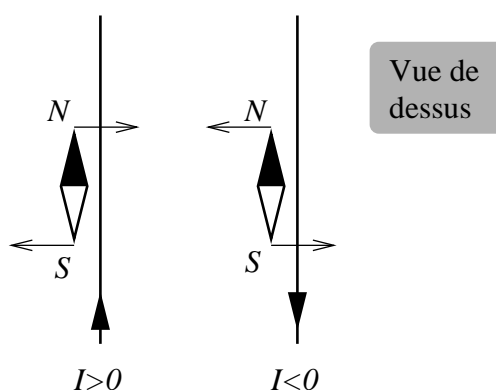


Figure 1.4: Inversion du courant dans l'expérience d'Oersted.

Ce sont, ensuite les physiciens Biot et Savart qui entreprirent les premières études quantitatives des interactions entre les aimants et les courants vers 1820. Ils reprirent l'expérience d'Oersted et étudièrent la relaxation de l'aiguille de la boussole lorsqu'il faisaient circuler le courant dans le fil. Ils mesurèrent la durée des oscillations de l'aiguille de la boussole et en déduisirent les propriétés suivantes :

²X X X

La force agissant sur un pôle de l'aiguille est

- inversement proportionnelle à la distance entre le fil et l'aiguille
- dirigée perpendiculairement au fil
- dirigée perpendiculairement à la droite reliant l'aiguille au fil.

Propriété 5 :

Nous nous pencherons plus en détail sur les conséquences de ces conclusions dans le chapitre suivant.

1.1.5 Expériences avec deux courants.

Le 18 septembre 1820, Ampère³ lit un mémoire, devant l'académie des Sciences, contenant des expériences qui lui sont propres qui ajoutent de nouveaux faits aux expériences d'Oersted. Le 25 septembre, devant la même Académie, il lit un second Mémoire qui fait suite au précédent. Il y annonce un fait nouveau : celui de l'action mutuelle de deux courants électrique sans l'intermédiaire d'aimant. Il fait des expériences prouvant ce fait, qui remplirent le restant de la séance. L'expérience fondamentale est la suivante : Il considère deux fils rectilignes infinis⁴ parcourus par les courants

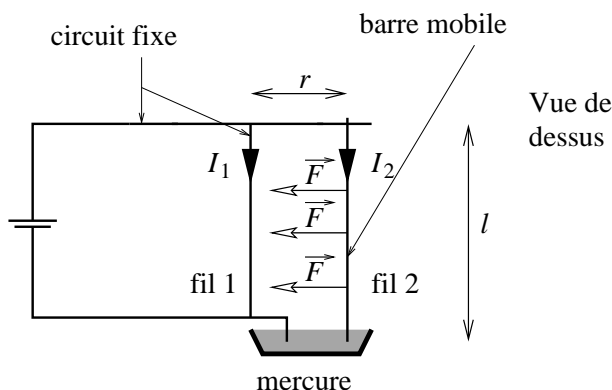


Figure 1.5: L'expérience d'Ampère.

électriques d'intensité I_1 et I_2 . Le fil 2 est libre de se translater. Le bac de mercure⁵ assure la conduction dans le circuit.

Ampère a montré que

- si les deux fils sont parallèles, le fil 2 se met en mouvement, ce qui signifie qu'il apparait une force entre les deux fils. Cette force peut être attractive et elle devient répulsive si on inverse le sens d'un des deux courants.
- pendant le déplacement, la barre 2 reste parallèle à la barre 1, ce qui signifie que l'intensité de cette force est la même en tous les points des fils.
- Elle n'est pas non plus modifiée si on déplace un fil parallèlement à l'autre.
- Elle décroît de façon inversement proportionnelle lorsque la distance r augmente.
- Elle augmente proportionnellement avec I_1 ou avec I_2 .
- Elle augmente proportionnellement avec la longueur des fils

1.1.6 La force magnétique.

Ces observations ont permis à Ampère d'énoncer les propriétés suivantes :

Propriété 6 : L'intensité de la force entre deux fils parallèles parcourus par des courants I_1 et I_2 est proportionnelle à $\frac{I_1 I_2 l}{r}$.

³André Marie Ampère - 1775 - 1836

⁴Ce qui signifie que leur longueur est grande devant la distance qui les sépare.

⁵Le mercure est le seul métal en phase liquide à température ambiante.

De plus Ampère a remarqué le fait troublant suivant : si les deux fils sont perpendiculaires, la force disparaît.



Propriété 7 : L'intensité de la force entre deux fils perpendiculaires parcourus par des courants est nulle.

Plaçons nous maintenant dans le système de coordonnées cylindriques dont l'axe Oz est confondu avec le fil 1. De ce qui est écrit au dessus, on peut déduire une forme de la force qu'exerce le fil 1 sur le fil 2, parallèle au fil 1, et de la mettre sous la forme

$$\text{Principe : } \begin{cases} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r} \vec{u}_r & \text{si les fils sont parallèles} \\ \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = 0 & \text{si les fils sont perpendiculaires} \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\frac{\mu_0}{2\pi}$ est un facteur de proportionnalité et \vec{u}_r est le vecteur unitaire radial pour le repère axé sur le fil 1. Ces équations résultent de l'observation. Elles ne sont pas démontrables. Elles vont servir de base pour établir tout le formalisme du magnétisme classique tout comme la force de Coulomb est à la base de la théorie électrostatique.

De plus la force de Laplace sert de définition à l'ampère :



Définition 2 : La force de Laplace exercée entre deux fils de $l = 1$ m. distant de $d = 1$ m. est de $F_L = 2.10^{-7}$ N. s'il sont parcourus par des courants de $I_1 = I_2 = 1$ Ampère.

A l'époque d'Ampère, on connaissait les forces gravitationnelle et électrostatique qui sont toutes les deux des forces radiales entre une particule source et une particule objet. La force magnétique a posé de gros problèmes conceptuels aux savants de l'époque qui ont essayé de la ramener à une force agissant entre particules matérielles suivant la droite qui les joint.

Il était alors impossible d'expliquer que la force disparaisse lorsque les fils sont perpendiculaires.

1.2 Loi de Laplace.

1.2.1 Le champ magnétique

Comme il n'y a pas de contact entre les deux fils dans lesquels circulent les courants on peut admettre que les effets magnétiques résultent d'une interaction à distance (comme les effets électrostatiques et gravitationnels). Comme il s'agit d'une interaction entre une source et un objet, ils peuvent donc être écrits comme le produit

- d'une fonction des caractéristiques des courants *objets* qui ressentent la force (ici le fil 2)
- d'une fonction des courants *sources* de la force et de l'*endroit* où elle est ressentie. Cette fonction est le champ magnétique noté \vec{B}_1 .

$$dF_{1 \rightarrow 2} = \underbrace{I_2 dl_2}_{\text{objet}} \underbrace{\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}}_{\text{champ } B_1(r)} \quad (1.2)$$

Finalement, si on écrit l'élément différentiel de longueur du fil 2 sous forme vectorielle de sorte à ce que $d\vec{l}_2$ soit dirigé dans le sens du courant dans le fil 2.

De plus considérons un champ magnétique qui a la forme :



Définition 3 : Champ magnétique créé par un fil : $\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

avec \vec{u}_θ est le vecteur orthoradial dans le système de coordonnées du fil source 1 (qui crée le champ).

On peut toujours écrire la force de Laplace sous la forme :

$$\boxed{d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1(r)} \quad (1.3)$$

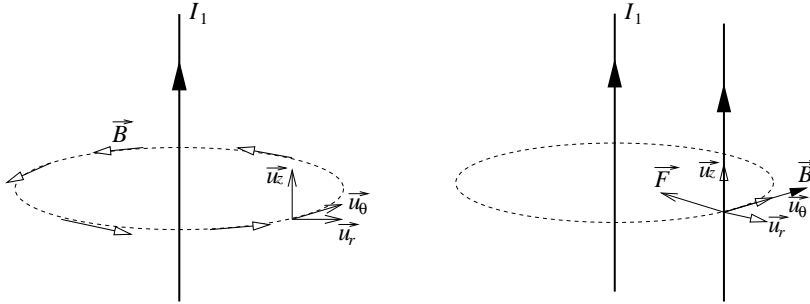


Figure 1.6: Gauche : Le champ magnétique créé par un fil parcouru par un courant. Droite : Force ressentie par un fil dans un champ magnétique.


On peut vérifier que cette définition permet de retrouver toutes les résultats expérimentaux concernant la force magnétique exercée par un fil sur un autre.

- Si on inverse le sens du courant dans le fil 1, on a $I'_1 = -I_1 \Rightarrow \vec{B}'_1(r) = -\vec{B}_1(r) \Rightarrow \vec{F}'_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$
- Si on inverse le sens du courant dans le fil 2, on a $I'_2 = -I_2$ et donc $\vec{F}'_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$
- Le champ est bien en $1/r$
- L'intégrale de $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est une somme sur $d\vec{l}_2$ ce qui montre que le résultat est proportionnel à l
- Si les deux fils sont perpendiculaires, on a $d\vec{l}_2 = dl_r \vec{u}_r + dl_\theta \vec{u}_\theta$. On a donc :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= I_2 (dl_r \vec{u}_r + dl_\theta \vec{u}_\theta) \wedge B_1(r) \vec{u}_\theta \\ &= I_2 dl_r B_1(r) \vec{u}_z \end{aligned} \quad (1.4)$$

Cette force est dirigée selon l'axe du fil 1. Elle n'est donc ni attractive ni répulsive.

On peut donc noter la propriété suivante

 **Propriété 8** : **La champ magnétique est créé par des charges en mouvement.**

On voit dans les équations ci dessus que le champ magnétique est un outil mathématique au même titre que le champ électrostatique. On pourrait imaginer étudier les phénomènes d'interaction entre courants électriques en utilisant l'équation 1.1, mais cette démarche deviendrait vite compliquée.

1.2.2 Unité.

L'unité officielle du champ magnétique est le Tesla. D'après la force de Laplace, le champ magnétique a la dimension de F/Il . Dans le système international, la force est un Newton ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$) l'intensité en Ampère et la longueur en mètres. On a donc :

$$1 \text{ T} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1} \quad (1.5)$$

On peut aussi remarquer que la dimension de $v B$ est la même que celle de E (c'est à dire des Volts par mètre). Donc, le champ magnétique a la dimension du champ électrique divisé par celle de la vitesse :

$$1 \text{ T} = 1 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2} \quad (1.6)$$

1.2.3 Ordre de grandeurs.

La composante verticale du champ magnétique terrestre en France vaut : 4.10^{-5} T.

Depuis la découverte des pierres d'aimants, on a cherché à réaliser des aimants de plus en plus puissants. C'est à dire des aimants qui créent un champ magnétique très intense.

En 1966, Karl Strnat élabore les premiers aimants à base d'un alliage samarium cobalt. Le champ créé par ces aimants est colossal : de 0.64 à 1.10 T.

En 1983, des aimants à base de néodyme, fer et bore sont mis au point par une équipe internationale. Ils restent les aimants permanents les plus puissants connus à ce jour et produisent un champ de l'ordre de 1.25 T.

En 1998, une équipe russe créé un champ magnétique pulsé (et non pas un aimant) par une explosion. Ce champ atteint à son maximum 2800 T.

En 2006, les champs magnétiques pulsés les plus intenses atteignent 100 T sans destruction.

Les champs magnétiques les plus intenses mesurés dans la nature sont créés par les pulsars. Ce sont des vestiges d'étoiles extrêmement denses qui peuvent produire des champs de l'ordre de $4 \cdot 10^8$ T pour le pulsar du Crabe.

1.2.4 Autres écritures de la force de Laplace.

La force de Laplace peut être réécrite sous des formes équivalentes à celle du dessus en utilisant la définition de la densité de courant.

Notons S_2 la section du fil 2. Si la densité de courant est uniforme dans la section du fil 2, on a :

$$I_2 = \int \vec{j}_2 \, d\vec{S}_2 \Rightarrow I_2 = j_2 S_2 \quad (1.7)$$

D'autre part, le volume du fil sur la longueur dl_2 est $d\tau_2 = S_2 \, dl_2$. On peut alors écrire :

$$S_2 = \frac{I_2}{j_2} = \frac{d\tau_2}{dl_2} \Rightarrow I_2 \, d\vec{l}_2 = \vec{j}_2 \, d\tau_2 \quad (1.8)$$

Donc on peut écrire la force de Laplace comme :

$$\boxed{dF_{1 \rightarrow 2} = \vec{j}_2 \wedge \vec{B}_1 \, d\tau_2} \quad (1.9)$$

D'autre part, la relation entre la densité de courant et la densité de charges mobiles ρ_m permet d'écrire une dernière forme de la loi de Laplace.

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v} = - \frac{dn_e |e|}{d\tau} \vec{v} \quad (1.10)$$

D'où, avec les deux équations au dessus :

$$\vec{F} = - \, dn_e |e| \vec{v}_2 \wedge \vec{B}_1 \quad (1.11)$$

Ce qui donne pour la force ressentie par chaque électron de conduction du matériau 2 dans le champ créé par le fil 1 :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow |e|} = -|e| \vec{v}_2 \wedge \vec{B}_1 \quad (1.12)$$

et sur une quantité de charges q :

$$\boxed{\vec{F}_{1 \rightarrow |e|} = q \vec{v}_2 \wedge \vec{B}_1} \quad (1.13)$$

1.3 Propriétés de la force magnétique.

1.3.1 Travail d'une force magnétique.

Considérons une charge q animée d'une vitesse \vec{v} . Un champ magnétique $\vec{B}_1(\vec{r})$ règne dans l'espace dans lequel se déplace cette charge. L'origine du champ \vec{B} , n'est pas discuté. Elle peut être complètement quelconque (créé par des fils de forme quelconque). Le travail que les sources du champ magnétique exerce sur la charge, entre les temps t et $t + dt$, est :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (1.14)$$

où $d\vec{l}$ est la segment parcouru pendant le temps dt . On a donc :

$$d\vec{l} = \vec{v} dt \quad (1.15)$$

D'autre part, la force magnétique est donnée par la forme $F = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. On a donc :

$$\delta W = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \quad (1.16)$$


Comme $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est perpendiculaire à \vec{v} , la quantité au dessus est toujours nulle.


 **Propriété 9** : Travail d'une force magnétique est toujours nul : $W = 0$

De plus, le théorème de l'énergie cinétique dit que la variation d'énergie cinétique d'un système, ΔE_K , pendant un certain temps est égal au travail reçu pendant ce même temps :

$$\Delta E_K = W \quad (1.17)$$

Donc, l'énergie cinétique d'un système soumis à la seule force magnétique est constante. Comme $E_K = mv^2/2$, la norme de la vitesse de la particule est donc constante. Le corrolaire de ce résultat est que :

 **Propriété 10** : Une charge au repos soumise à une force magnétique reste au repos.

 **Propriété 11** : Une charge se déplaçant avec une certaine vitesse, soumise à une force magnétique, conserve la norme de sa vitesse.

1.3.2 Relativité galiléenne.

Considérons une particule portant une charge q , située en M et se déplaçant à une vitesse \vec{v} exprimée dans le référentiel galiléen \mathcal{R} dans un espace où règnent un champ électrique et un champ magnétique. La force totale ressentie par la charge dans \mathcal{R} est la somme de la force de Coulomb et de celle de Laplace.

$$\vec{F}_L = q(\vec{E}(M) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M)) \quad \text{dans } \mathcal{R} \quad (1.18)$$

Considérons maintenant un référentiel \mathcal{R}' en translation à la vitesse uniforme et constante \vec{V} par rapport à \mathcal{R} . On a :

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \quad (1.19)$$

On a

$$\vec{F}'_L = q'(\vec{E}'(M) + \vec{v}' \wedge \vec{B}'(M)) \quad \text{dans } \mathcal{R}' \quad (1.20)$$

En relativité galiléenne la valeur de la charge d'une particule ne dépendent du référentiel dans lequel elles sont mesurées. On a donc $q' = q$. Il en est de même pour la force. Quelque soit le référentiel galiléen, la charge doit ressentir la même force :

$$\vec{F}_L = \vec{F}'_L \quad (1.21)$$

ce qui conduit à :

$$\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} - \vec{E}' + \vec{v}' \wedge (\vec{B} - \vec{B}') = \vec{0} \quad (1.22)$$

Ce résultat doit être vérifié quelque soit la vitesse à laquelle se déplace la charge (c'est à dire quelque soit \vec{v}'). Il faut donc que les deux membres soient nuls. On a alors les relations suivantes par changement de référentiel :

La transformation des champs électrique et magnétique par changement de référentiels galiléens conduit à



Propriété 12 :

$$\begin{aligned} \vec{E}'(M) &= \vec{E}(M) + \vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{B} \\ \vec{B}'(M) &= \vec{B}(M) \end{aligned} \quad (1.23)$$

1.4 Applications.

1.4.1 Roue de Barlow.



La roue de Barlow est un moteur électrique présentant un fonctionnement très simple. Elle a été inventé en 1822. Elle est constituée d'un disque conducteur dont la base baigne dans un bain de mercure. Le mercure est le seul métal liquide à température ambiante ; c'est donc un conducteur. Les deux bornes d'un générateur sont reliées à l'axe du disque libre de tourner et au bain de mercure. Il y a donc un courant vertical de l'axe du disque vers le bain qui passe dans le conducteur. Un champ magnétique constant est appliqué perpendiculairement au disque.

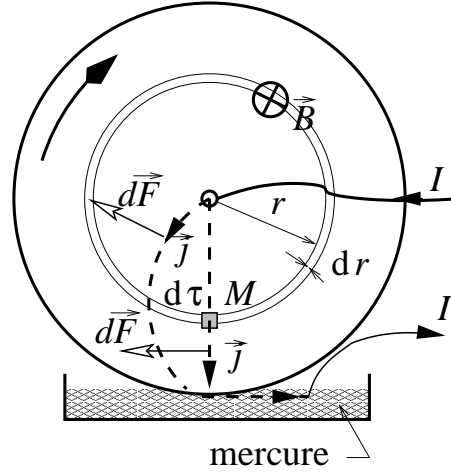


Figure 1.7: La roue de Barlow.

Un élément de volume $d\tau$ autour d'un point M du conducteur est soumis à la force de Laplace :

$$d\vec{F}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau \quad (1.24)$$

Cette force crée un couple :

$$\begin{aligned} d\vec{\Gamma} &= \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_L \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{B} d\tau) \\ &= (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B}) \vec{j} d\tau - (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}) \vec{B} d\tau \end{aligned} \quad (1.25)$$

Comme $\overrightarrow{OM} \perp \vec{B}$, le premier terme est nul. Le couple peut être écrit :

$$\vec{\Gamma} = -\vec{B} \iiint_{\text{Roue}} \overrightarrow{OM} \vec{j} \, d\tau - \vec{B} \iiint_{\text{Roue}} \overrightarrow{OM} \vec{j} \, d\vec{r} \, d\vec{S} \quad (1.26)$$

où \vec{j} est le vecteur densité de courant qui coupe la petite surface $r \, d\theta \, dz$. On a donc :

$$\vec{\Gamma} = -\vec{B} \iint_{\text{cyl rayon } r} \vec{j} \, d\vec{S} \int_{r=0}^R \overrightarrow{OM} \, d\vec{r} \quad (1.27)$$

Hors on a $\iint_{\text{cyl rayon } r} \vec{j} \, d\vec{S}$ qui est l'intensité du courant qui traverse le cylindre de rayon r et de hauteur égale à celle de la roue. Cette quantité est une constante quel que soit r et vaut I . De plus, on a $\overrightarrow{OM} = OM \vec{u}_r = r \vec{u}_r$ et $d\vec{r} = dr \vec{u}_r$, d'où la deuxième intégrale qui s'écrit :

$$\int_{r=0}^R \overrightarrow{OM} \, d\vec{r} = \frac{R^2}{2} \quad (1.28)$$

D'où on a :

$$\vec{\Gamma} = -I \frac{R^2}{2} \vec{B} \quad (1.29)$$

Ce couple met donc la roue en mouvement de rotation autour de son axe.

1.4.2 Effet Hall

Considérons un conducteur métallique parcouru par un courant I placé dans un champ \vec{B} perpendiculaire au conducteur. Nous supposons que toutes les charges ont la même vitesse et chaque

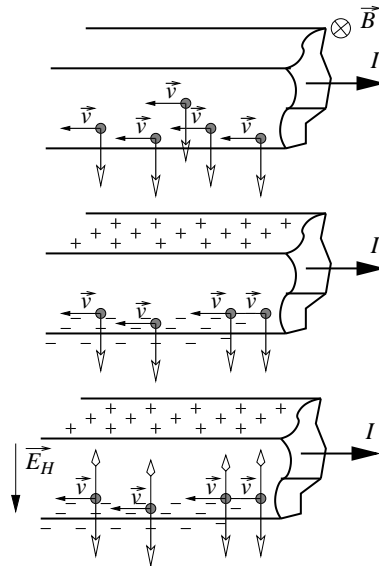


Figure 1.8: Effet Hall.

charge de conduction ressent la force de Laplace :

$$\vec{F}_L = -|e| \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (1.30)$$

Elle est perpendiculaire au courant et au champ magnétique. Cette force tend à guider les charges négatives vers une paroi et donc à laisser une population en ions positifs majoritaire sur l'autre

paroi. La séparation des charges conduit à l'apparition d'un champ électrique longitudinal dans le matériau appelé champ de Hall et noté \vec{E}_H . Ce champ électrique exerce une force de Coulomb sur chaque électron opposée à \vec{F}_L .

$$\vec{F}_C = -|e|\vec{E}_H \quad (1.31)$$

qui tend à le ramener vers la paroi déficitaire. La densité d'électrons de conduction dans le matériau atteint un équilibre stationnaire quand les deux forces sont égales :

$$F_C = F_L \quad (1.32)$$

, Ce qui permet de trouver le champ de Hall : Ce champ est constant dans le matériau.

On peut mesurer la différence de potentiel entre les armatures du conducteur :

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int_2^1 \vec{E}_H \cdot d\vec{l} \\ &= avB \end{aligned} \quad (1.33)$$

où a est la dimension du conducteur perpendiculaire à \vec{B} et b est celle parallèle. On peut exprimer v , à l'aide des relations $j = \rho_m v$ et $I = jS$ avec $S = ab$, il vient

$$v = \frac{I}{ab\rho_m} \quad (1.34)$$

d'où on trouve :

$$\Delta V = R_H I \frac{B}{b} \quad (1.35)$$

avec $R_H = \frac{1}{nq}$ est la constante de Hall du matériau.

Cet effet est très utilisé pour deux raisons.

- Il permet de déterminer facilement le nombre de porteurs et leur charge. Pour un champ magnétique fixé, on peut facilement déterminer la courbe $\Delta V(I)$ en faisant varier I et en mesurant ΔV . Connaissant l'épaisseur du conducteur on en déduit R_H .
- Il permet aussi de mesurer le champ magnétique. On utilise un petit barreau de semi conducteur dont on connaît les propriétés de conduction et après un étalonnage préalable on mesure ΔV qui est proportionnel à B .

En résumé



- Deux fils **perpendiculaires** parcourus par des courants ne s'influencent pas.



- Deux fils **parrallèles** parcourus par des courants s'attirent ou se repoussent par l'intermédiaire d'une force de Lorentz.



- La force de Lorentz ne travaille pas.



- La force de Lorentz exercée par un fil 1 sur un fil 2 peut être écrite : $d\vec{F}_{1\rightarrow 2} = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1(r)$ où $\vec{B}_1(r)$ est le champ magnétique créé par 1.



- Le champ magnétique créé par un fil est orthoradial $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$.
-

QCM. 1 : Les premières pierres d'aimant furent trouvées en

- 1: Grèce
- 2: Turquie
- 3: Chine

QCM. 2 : Qui utilisa en premier les aimants pour en faire des boussoles :

- 1: les grecques
- 2: les turcs
- 3: les chinois

QCM. 3 : Une aiguille aimantée

- 1: présente toujours un pôle nord et un pôle sud.
- 2: peut présenter un pôle nord et un pôle sud.
- 3: présente un pôle unique

QCM. 4 : Les pôles nord de deux aiguilles aimantées :

- 1: se repoussent
- 2: s'attirent
- 3: ne s'influencent pas

QCM. 5 : Dans quelle direction s'oriente une aiguille aimantée placée près d'un fil parcouru par un courant

- 1: dans la direction Nord-Sud
- 2: parallèlement au fil
- 3: perpendiculairement au fil

QCM. 6 : La force exercée par un courant sur une aiguille à une distance d est

- 1: proportionnelle à d
- 2: inversement proportionnelle à d
- 3: inversement proportionnelle à d^2

QCM. 7 : Les premières expériences d'interaction entre un fil et un aimant furent menées par :

- 1: Biot et Savart
- 2: Ampère
- 3: Oersted

QCM. 8 : Deux fils parcourus par des courants s'attirent ou se repoussent

- 1: toujours
- 2: s'ils sont perpendiculaires
- 3: s'ils sont parallèles

QCM. 9 : La force d'interaction entre deux fils parcourus par des courants I_1 et I_2 est proportionnelle à

- 1: $I_1^2 I_2^2$
- 2: $I_1 I_2$
- 3: $I_1 + I_2$

QCM. 10 : La force d'interaction entre deux fils distant de r parcourus par des courants est

- 1: proportionnelle à r
- 2: inversement proportionnelle à r^2
- 3: inversement proportionnelle à r

QCM. 11 : Le champ magnétique créé par un fil rectiligne parcouru par un courant I_1 à une distance r est

- 1: $\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \vec{u}_r$
- 2: $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$
- 3: $\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \vec{u}_\theta$

QCM. 12 : Le champ magnétique est créé par

- 1: des charges fixes
- 2: des dipôles électrostatiques
- 3: des charges en mouvement

QCM. 13 : La force de Laplace ressentie par un élément $d\vec{l}$ d'un fil parcouru par un courant I dans un champ magnétique \vec{B} est

- 1: $\vec{F} = I d\vec{l}B$
- 2: $\vec{F} = I d\vec{l}\vec{B}$
- 3: $\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$

QCM. 14 : Le travail de la force de Laplace \vec{F} ressentie par une charge se déplaçant de $d\vec{l}$ est

- 1: toujours négatif
- 2: toujours nul
- 3: toujours positif

QCM. 15 : Une charge électrique au repos dans un champ magnétique

- 1: se déplace vers les sources du champ magnétique
- 2: s'éloigne des sources du champ magnétique
- 3: reste au repos

QCM. 16 : Une charge électrique se déplaçant dans un champ magnétique

- 1: conserve la norme de sa vitesse
- 2: accélère
- 3: ralentit

QCM. 17 : La force de Laplace ressentie par une charge q ayant une vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} est

- 1: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
- 2: $\vec{F} = qv\vec{B}$
- 3: $\vec{F} = q\vec{v}B$

QCM. 18 : Les aimants les plus puissants créent des champs de l'ordre de :

- 1: 1. T.
- 2: 10. T.
- 3: 1 000 T.

Chapitre 2

Le champ magnétique.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'étude de l'interaction entre des courants électriques peut être entreprise en considérant qu'un courant crée un champ magnétique qui agit sur l'autre courant. Nous allons maintenant étudier comment calculer le champ magnétique créé par un conducteur quelconque traversé par un courant.

2.1 Symétrie des champs magnétiques.

2.1.1 Plan de symétrie.

Considérons deux fils parallèles parcourus par des courants identiques. Le plan médian parallèle aux deux fils est un plan de symétrie du problème. Considérons maintenant deux points M et M' symétriques par rapport au plan de symétrie. Notons, $a = PM = P'M'$ et $b = P'M = PM'$ et

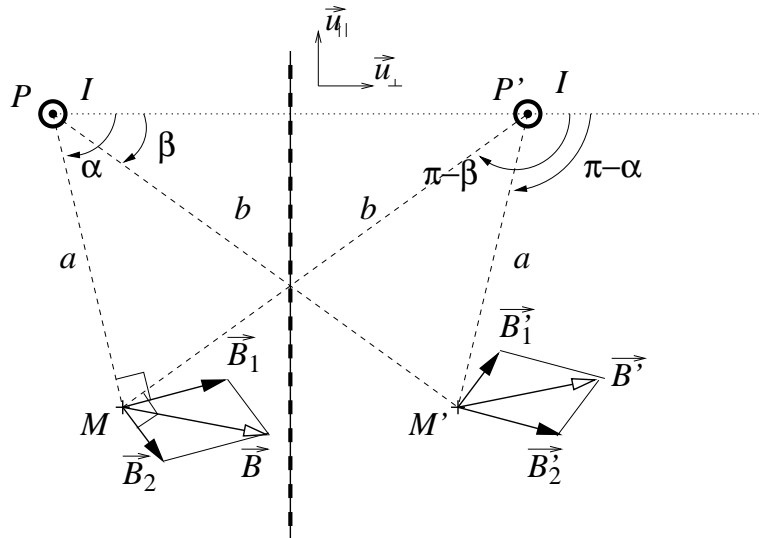


Figure 2.1:

\vec{B}_1 et \vec{B}_2 les champs magnétiques créés en M respectivement par le fil passant par P et par P' . De même \vec{B}'_1 et \vec{B}'_2 sont les champs magnétiques créés en M' respectivement par le fil passant par P et par P' .

Comme les deux courants I sont égaux, l'intensité des champs magnétiques ne dépend que de la distance entre le fil qui les crée et le point où il sont mesurés. On a donc :

$$B_1 = B_2' \quad B_2 = B_1'$$

Chacun de ces champs peut être écrit comme la somme d'une contribution parallèle et d'une contribution perpendiculaire au plan de symétrie :

$$\vec{B} = B^{\parallel} \vec{u}_{\parallel} + B^{\perp} \vec{u}_{\perp}$$

De plus en utilisant les notations de la figure ci-dessus et quelques considérations de géométrie élémentaire, nous obtenons facilement les relations suivantes au point M :

$$\begin{aligned} B_1^{\parallel} &= B(a) \cos \alpha & B_1^{\perp} &= B(a) \sin \alpha \\ B_2^{\parallel} &= -B(b) \sin \beta & B_2^{\perp} &= B(b) \cos \beta \end{aligned}$$

On trouve les contributions du champ \vec{B} en M

$$\begin{aligned} B^{\parallel} &= B_1^{\parallel} + B_2^{\parallel} = B(a) \cos \alpha - B(b) \sin \beta \\ B^{\perp} &= B_1^{\perp} + B_2^{\perp} = B(a) \sin \alpha + B(b) \cos \beta \end{aligned}$$

De même en M' , on a

$$\begin{aligned} B_1'^{\parallel} &= B(b) \sin \beta & B_1'^{\perp} &= B(b) \cos \beta \\ B_2'^{\parallel} &= -B(a) \cos \alpha & B_2'^{\perp} &= B(a) \sin \alpha \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} B'^{\parallel} &= B_1'^{\parallel} + B_2'^{\parallel} = -B(a) \cos \alpha + B(b) \sin \beta \\ B'^{\perp} &= B_1'^{\perp} + B_2'^{\perp} = B(a) \sin \alpha + B(b) \cos \beta \end{aligned}$$


D'où on trouve les relations fondamentales :

$$\boxed{\begin{aligned} B^{\parallel} &= -B'^{\parallel} \\ B^{\perp} &= B'^{\perp} \end{aligned}}$$

Si on place maintenant le point M sur le plan de symétrie, on a $M \equiv M'$, ce qui donne

$$B^{\parallel} = -B^{\parallel} \quad \text{et} \quad B^{\perp} = B^{\perp}$$

La première relation mène à $B^{\parallel} = 0$ d'où la propriété suivante :

 **Propriété 13** : **Le champ magnétique est perpendiculaire aux plans de symétrie.**

2.1.2 Plan d'antisymétrie.

Considérons deux fils parallèles parcourus par des courants identiques mais opposés. Le plan médian parallèle au deux fils est un plan d'antisymétrie du problème. Considérons maintenant deux points M et M' symétriques par rapport au plan d'antisymétrie. En utilisant les mêmes notations et le même raisonnement qu'au-dessus, on trouve facilement :

$$\begin{aligned} B_1^{\parallel} &= B(a) \cos \alpha & B_1^{\perp} &= B(a) \sin \alpha \\ B_2^{\parallel} &= B(b) \cos \beta & B_2^{\perp} &= -B(b) \sin \beta \end{aligned}$$

Ce qui donne pour les composantes de \vec{B} :

$$\begin{aligned} B^{\parallel} &= B(a) \cos \alpha + B(b) \cos \beta \\ B^{\perp} &= B(a) \sin \alpha - B(b) \sin \beta \end{aligned}$$

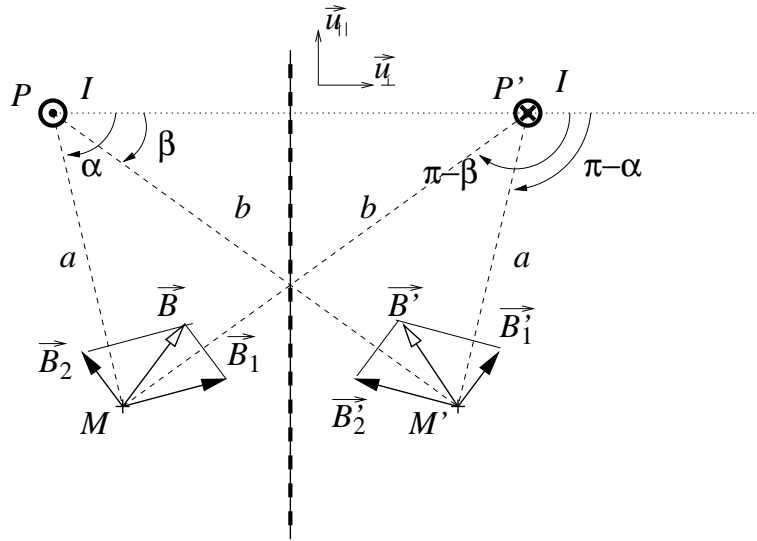


Figure 2.2:

De même pour les contributions du champ en M' :

$$\begin{aligned} B'_1{}^{\parallel} &= B(b) \cos \beta & B'_1{}^{\perp} &= B(b) \sin \beta \\ B'_2{}^{\parallel} &= B(a) \cos \alpha & B'_2{}^{\perp} &= -B(a) \sin \alpha \end{aligned}$$

ce qui donne pour les composantes de \vec{B}' :

$$\begin{aligned} B'^{\parallel} &= B(a) \cos \alpha + B(b) \cos \beta \\ B'^{\perp} &= -B(a) \sin \alpha + B(b) \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^{\parallel} &= B'^{\parallel} \\ B^{\perp} &= -B'^{\perp} \end{aligned}$$

Si on place maintenant le point M sur le plan de symétrie, on a $M \equiv M'$, ce qui donne

$$B^{\parallel} = B^{\parallel} \quad \text{et} \quad B^{\perp} = -B^{\perp}$$

La deuxième relation mène à $B^{\perp} = 0$ d'où la propriété suivante :



Propriété 14 : Le champ magnétique est parallèle aux plans d'antisymétrie.

2.2 Loi de Biot et Savart.

Considérons un circuit \mathcal{C}_1 parcouru par un courant I_1 et un autre circuit \mathcal{C}_2 parcouru par un courant I_2 . Pour calculer la force magnétique créée en un point M du circuit \mathcal{C}_2 par le circuit \mathcal{C}_1 , Ampère a utilisé le théorème de superposition. Concernant l'électrostatique ce principe, nous disait qu'on pouvait calculer la force qu'exerce un ensemble de charges sources sur une charge objet en isolant chacune des charges sources et en sommant indépendamment chaque contribution.

Ampère a essayé de calculer la force magnétique en découpant le circuit source et le circuit objet en petits éléments et il obtenait un résultat compliqué. Il faut noter qu'il y a une grosse différence entre l'approche de la superposition en électrostatique (ou on peut isoler les charges les unes des autres) et en magnétostatique. Le courant qui circule dans un élément de fil y est entré et doit en sortir et on ne peut plus négliger les effets des éléments de fil connectés aux bouts de

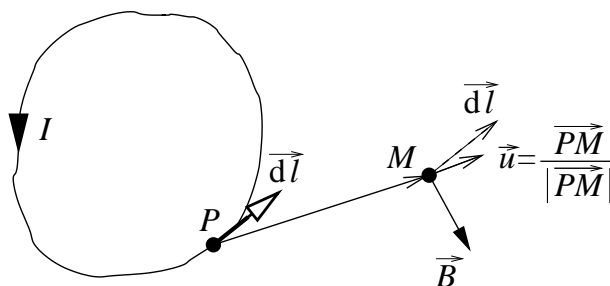


Figure 2.3:

l'élément qu'on considère. Le fait d'isoler un bout de fil n'a pas de sens physique mais on peut tout à fait utiliser ce découpage comme un traitement mathématique intégral du problème.

Ce circuit crée en champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ en tout point M de l'espace repéré par le vecteur \vec{r}_M . $d\vec{l}_1$ est un élément du circuit au point P repéré par le vecteur \vec{r}_P qui crée une contribution $d\vec{B}(M)$ au champ magnétique total. Cette contribution est perpendiculaire à $d\vec{l}$ et à $\vec{u}_{PM} = \vec{PM}/PM$.

De plus, il faut absolument que si le circuit étudié est un fil infini on retrouve le postulat précédent pour avoir une théorie du magnétisme cohérente. Avec la forme correcte de $d\vec{B}$, on doit retrouver :

$$\int_{\text{fil } \infty} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Biot et Savart ont proposé d'écrire que son module est proportionnel à I/PM^2 :

$$d\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

La loi de Biot et Savart donne le champ magnétique total en M comme étant la somme vectorielle des contributions au dessus :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{|\vec{r}_M - \vec{r}_P|^2}$$

Le champ magnétostatique calculé par la loi de Biot et Savart est bien un vecteur axial parce qu'il résulte du produit vectoriel. De plus il est proportionnel au courant I qui lui donne naissance. Enfin, l'intégrale sur le contour parcouru est nécessairement fermée puisque le courant qui circule dans la portion de fil étudié va d'une borne d'un générateur à une autre.

Cette loi est un *postulat* de la magnétostatique.

Il faut dans un premier temps appliquer cette loi au calcul du champ magnétique créé par un fil infini et vérifier qu'on retrouve bien la forme trouvée par Ampère.

2.2.1 Champ magnétique créé par un fil infini.

Considérons un fil infini parcouru par un courant I . On voit déjà que l'intégrale fermée écrite au dessus pose un problème ici puisqu'un fil rectiligne infini ne peut pas être fermé. Cette situation n'a pas de sens physique réel. On considère qu'elle est réalisée si la distance entre le point M où on calcule le champ magnétique est grande devant la longueur du fil et que celui-ci se referme sur le générateur de courant suffisamment loin de M . On utilise les coordonnées cylindriques. L'origine du repère O est la projection perpendiculaire de M sur le fil. Le problème est invariant par rotation du fil autour de \vec{u}_z et par translation du fil selon \vec{u}_z . La solution du problème ne dépend donc que de r , la distance OM . La portion de fil $d\vec{l}$ située en P tel $OP = z$ et le vecteur \vec{u}_{PM} s'écrivent :

$$d\vec{l} = dz \vec{u}_z$$

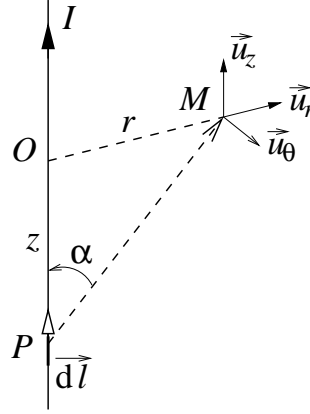


Figure 2.4:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} &= r\vec{u}_r - z\vec{u}_z \\ PM^2 &= r^2 + z^2\end{aligned}$$

donc on a :

$$\vec{u}_{PM} = \frac{r\vec{u}_r - z\vec{u}_z}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

La loi de Biot et Savart donne donc :

$$\begin{aligned}\vec{B}(r) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fil}} \frac{dz \vec{u}_z \wedge (r\vec{u}_r - z\vec{u}_z)}{|r\vec{u}_r - z\vec{u}_z|^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{r dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

En considérant le triangle POM , on trouve facilement les relations suivantes :

$$\begin{aligned}z = \frac{r}{\tan \alpha} &\Rightarrow dz = r \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha} \\ \frac{1}{r^2 + z^2} &= \frac{\sin^2 \alpha}{r^2}\end{aligned}$$

On peut alors récrire le champ magnétique comme :

$$\begin{aligned}\vec{B}(r) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \vec{u}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} [-\cos \alpha]_0^\pi \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta}$$

on reconnait bien dans ce résultat la forme du champ magnétique créé par un fil infini.

La loi de Biot et Savart est bien valide pour le fil infini. En fait, elle l'est pour toute distribution imaginable.

2.2.2 Distribution volumique de courants.

On peut aussi exprimer la loi de Biot et Savart en fonction du vecteur densité de courant \vec{j} qui traverse une section S du fil. Par définition on a :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Donc le champ magnétique créé par le fil est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} d\tau$$

où l'intégrale est effectuée sur tout le volume du conducteur.

2.2.3 Charge en mouvement.

On peut encore exprimer la loi de Biot et Savart à partir de la vitesse de charges libres. En injectant la définition suivante,

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}$$

qui relie la densité et la vitesse du courant, dans l'équation au dessus on a :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \rho_m \frac{\vec{v} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} d\tau$$

Hors on a $\rho_m = nq$ où n est la densité volumique des porteurs de charges et donc $n d\tau$ est le nombre de porteurs de charges dans le volume $d\tau$. Donc l'intégrale au dessus sur $n d\tau$ revient à sommer les contributions de tous les porteurs. On peut donc opérer le remplacement suivant :

$$\iiint_V n_e \dots d\tau \rightarrow \sum_{\text{charges}}$$

On peut donc écrire le champ magnétique créé par les charges i du courant permanent du circuit est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\text{charges}} q \frac{\vec{v}_i \wedge \vec{u}_i}{P_i M^2}$$



Il faut noter que cette expression est obtenue à partir de la loi de Biot et Savart qui est valable et vérifiée pour les courants permanents. Une particule isolée chargée en mouvement ne constitue pas un courant permanent. L'étude de ce cas sort donc de ce cours consacré à la magnétostatique. On ne peut donc pas à priori lui appliquer la relation au dessus. Cependant aux termes de calcul compliqués on peut montrer que si la vitesse d'une particule est faible devant la vitesse de la lumière et que son accélération est faible on a :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_i \frac{\vec{v}_i \wedge \vec{u}_i}{P_i M^2} \quad \text{si } v \ll c \text{ et si } dv/dt \rightarrow 0$$

où $P_i M$ est la distance entre la charge et le point M .

2.3 Propriété du champ magnétique.

2.3.1 Ligne et tube de champ magnétique.

Tout comme pour le champ électrique, on peut définir les lignes de champ magnétique. Les lignes de champ sont des courbes continues qui sont en tout point tangentes au champ magnétique. Par exemple, les lignes de champ magnétique créées par un fil infini parcouru par un courant sont les cercles centrés sur le fil. On peut facilement démontrer la propriété suivante à l'aide de la même démonstration qui a été appliquée aux lignes de champ électrostatiques.



Propriété 15 : Les lignes de champ magnétique ne se coupent jamais.

En effet, supposons que ce ne soit pas le cas et que deux lignes de champ se coupent en un point M . Cela veut dire qu'en ce point particulier les lignes de champ sont orientées dans deux directions particulières et donc que le champ magnétique est selon deux directions. Cela est impossible, puisque le champ est défini de façon univoque en chaque point de l'espace.

2.3.2 Divergence du champ magnétique

Nous pouvons calculer la divergence du champ magnétique en utilisant la loi de Biot et Savart. On cherche à établir les formes de la divergence et du rotationnel du champ magnétique. Ces relations locales nous renseignent sur les variations du champ lorsqu'on effectue une variation infinitésimale de la position où on regarde le champ.

Bien entendu, on suppose que le circuit qui crée le champ est fixe. Cela n'a donc pas de sens de faire varier la position d'un point physique du circuit (même si le courant qui circule dedans bouge). Dans la loi de Biot et Savart, nous avons posé que le point P est un point du circuit source du champ magnétique et que le point M est un point de l'espace où on calcule le champ magnétique. Le calcul de la divergence revient à déterminer comment le champ magnétique varie autour du point M . La divergence du champ magnétique est un opérateur faisant intervenir des dérivées spatiales par rapport au point M . Dans tout ce qui suit, on affecte pas le point P où est créé le champ magnétique mais le point M où on calcule le champ.

Dans un premier temps, nous allons calculer le gradient de la fonction $\frac{1}{|\vec{r}_P - r_M|}$ par rapport au point M .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}_M \frac{1}{|\vec{r}_P - r_M|} &= \frac{d}{dr_M} \frac{1}{|\vec{r}_P - r_M|} \vec{u}_{PM} \\ &= \frac{\vec{u}_{PM}}{|\vec{r}_P - r_M|^2} \end{aligned}$$

Cette relation nous sera utile par la suite.

La divergence du champ magnétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B}(M) &= \vec{\nabla}_M \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}_{PM}}{|\vec{r}_M - \vec{r}_P|^2} d\tau \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{\nabla}_M \cdot \left(\vec{j} \wedge \frac{\vec{u}_{PM}}{|\vec{r}_M - \vec{r}_P|^2} \right) d\tau \end{aligned}$$

où $\vec{\nabla}_M$ montre que les dérivées sont calculées par rapport à M .

En utilisant la relation

$$\vec{\nabla}_M (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} (\vec{\nabla}_M \wedge \vec{A}) - \vec{A} (\vec{\nabla}_M \wedge \vec{B})$$

et en remarquant que

$$\vec{\nabla}_M \wedge \vec{j}(P) = \vec{0}$$

car l'opérateur $\vec{\nabla}$ ne s'applique qu'au point M et $\vec{j}(P)$ ne dépend que du point P , on trouve :

$$\text{div } \vec{B}(M) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V -\vec{j} \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{u}_{PM}}{|\vec{r}_P - r_M|^2} d\tau$$

On reconnaît ici la quantité calculée au dessus et donc on a :

$$\text{div } \vec{B}(M) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V -\vec{j} \left[\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r_P^2 - r_M^2} \right) \right] d\tau$$

Comme on a toujours $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \cdot \vec{X} = \vec{0}$, $\forall \vec{X}$, on trouve finalement la relation de Maxwell suivante :

Equation de Maxwell : $\text{div } \vec{B} = 0$

Cette équation ne souffre d'aucune exception. Elle est toujours vraie même si les courants étudiés varient dans le temps et elle est un fondement de la magnétisme.

Elle exclut la possibilité de créer un champ magnétique à partir de charges monopolaires immobiles. Si c'était le cas, on aurait comme en électrostatique, $\text{div } \vec{B} = K \rho_{\text{magn}}$, où K serait une constante universelle et ρ_{magn} la densité volumique de charges magnétiques à l'endroit où on calcule $\text{div } \vec{B}$. Elle implique la propriété fondamentale suivante :



Propriété 16 : Il ne peut pas exister de charges magnétiques qui créeraient un champ radial.

2.3.3 Flux de champ magnétique.

De même que pour le champ électrostatique l'élément de flux du champ magnétique à travers un élément de surface $d\vec{S}$ orientée est :

$$d\Phi(\vec{B}_I) = \vec{B}_I \cdot d\vec{S}$$

Dans le système d'unité international le flux de champ magnétique est exprimé en Weber (Wb) et on a donc $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T}\cdot\text{m}^2$.

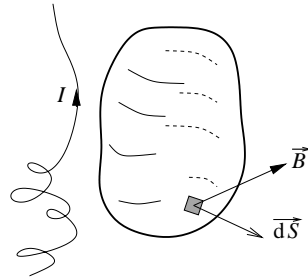


Figure 2.5: Ligne de champ magnétique créé par un fil.

Le flux de champ magnétique à travers la surface fermée Σ est :



Définition 4 : Flux de champ magnétique à travers la surface Σ : $\Phi_{\Sigma}(\vec{B}_I) = \oiint_{\Sigma} \vec{B}_I \cdot d\vec{S}$

En utilisant le théorème d'Ostrogradski, on trouve immédiatement :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}_I) = \iiint_{V_{\Sigma}} \text{div } \vec{B} \, d\tau$$

où V est le volume intérieur à la surface Σ . Comme $\text{div } \vec{B} = 0$, on a



Propriété 17 : $\Phi_{\Sigma}(\vec{B}_I) = 0$ si Σ est une surface fermée.

On a introduit un terme pour caractériser le champ qui présente la propriété au dessus :



Définition 5 : Un champ est à flux *conservatif* si le flux de ce champ à travers n'importe quelle surface fermée est nul.

Donc, en utilisant cette définition, on a la propriété suivante qui est exactement la même que celle énoncée mathématiquement au dessus :



Propriété 18 : Le champ magnétique est à flux conservatif.

Cela signifie que si le champ magnétique est dirigé vers l'intérieur de la surface en un point donné, (on a donc $\vec{B} \cdot d\vec{S} < 0$ en ce point) il faut qu'il y ait un autre point de la surface où on a $\vec{B} \cdot d\vec{S} > 0$.

D'autre part, supposons qu'une ligne de champ traverse la surface Σ et ne ressorte pas. Cela veut dire qu'elle s'arrêterait en un point à l'intérieur de Σ , que nous notons F . Considérons maintenant une surface infinitésimale autour de F . La ligne de champ en question entrerait à l'intérieur de la surface et aucune ligne de champ n'en ressortirait. On aurait donc $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} \neq 0$, ce qui est impossible. Donc une ligne de champ n'a ni début ni fin.

Nous pouvons voir les choses aussi de la façon suivante. Comme nous avons vu précédemment qu'il n'y a pas de charges magnétiques qui créeraient un champ magnétique radial qui partirait ou aboutirait sur ces charges, les lignes de champ magnétiques n'ont donc ni début ni fin.

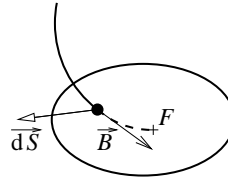


Figure 2.6: Ligne de champ magnétique qui s'arrêterait en un point F .

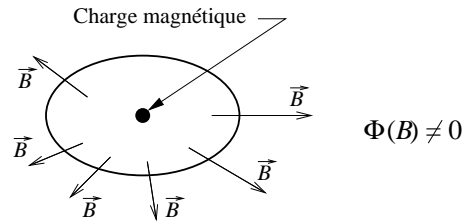


Figure 2.7: Ligne de champ magnétique qui serait créé par un monopole.



Propriété 19 : Une ligne de champ magnétique est une courbe fermée qui entoure les élément de courant dans le sens donné par la loi de Biot et savart.

Par exemple, nous avons déjà montré que le champ créé par un fil a la forme $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$. Les lignes de champ magnétique du fil sont donc des cercles centré sur le fil.

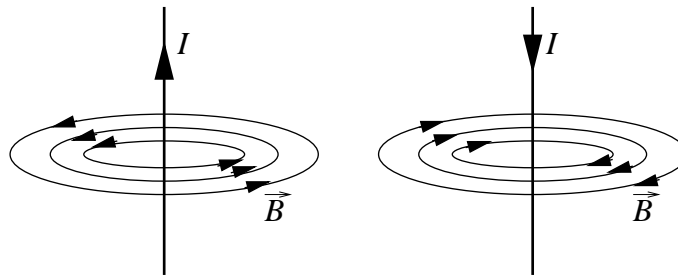


Figure 2.8: Ligne de champ magnétique créé par un fil.

2.3.4 Circulation du champ magnétique.

Considérons un circuit fermé \mathcal{C}_1 dans lequel circule un courant d'intensité I . La circulation du champ magnétique créé par ce courant sur un contour fermé \mathcal{C}_2 est, par définition :

$$\mathcal{C} = \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

où $d\vec{l}_2$ est l'élément différentiel du contour au point P_2 et \vec{B}_1 est le champ magnétique au point P_2 du contour \mathcal{C}_2 donné par :

$$\vec{B}(P_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{u}_{P_1 P_2}}{r_{P_1 P_2}^2}$$

On a donc :

$$\mathcal{C} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{(d\vec{l}_1 \wedge \vec{u}_{P_1 P_2}) \cdot d\vec{l}_2}{r_{P_1 P_2}^2}$$

La propriété des produits mixtes suivante

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

permet de récrire la circulation comme :

$$C = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\vec{u}_{P_1 P_2} \cdot (\vec{dl}_2 \wedge \vec{dl}_1)}{r_{P_1 P_2}^2}$$

Le produit $\vec{dl}_2 \wedge \vec{dl}_1$ est la surface $d\vec{S}$ du parallélogramme ayant pour cotés \vec{dl}_2 et \vec{dl}_1 . Le

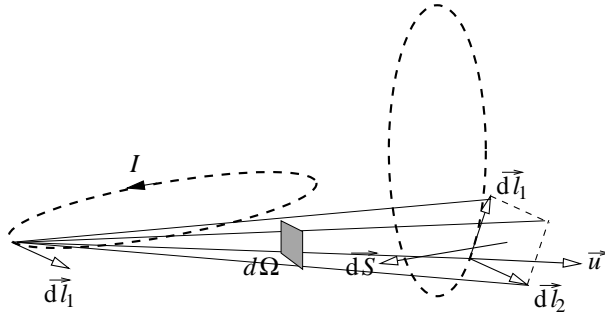


Figure 2.9:

produit $\vec{u}_{P_1 P_2} \cdot d\vec{S}$ est la projection de $d\vec{S}$ sur $\vec{u}_{P_1 P_2}$ (vecteur unitaire). C'est aussi la valeur de la projection de $d\vec{S}$ sur le plan perpendiculaire à $\vec{u}_{P_1 P_2}$. Enfin la quantité $\frac{\vec{u}_{P_1 P_2} \cdot (\vec{dl}_2 \wedge \vec{dl}_1)}{r_{P_1 P_2}^2}$ est l'opposé (car $d\vec{S} \cdot \vec{u}_{P_1 P_2} < 0$) de l'angle solide $d^2\Omega$ sous lequel on voit $\vec{dl}_2 \wedge \vec{dl}_1$ depuis P_2 .

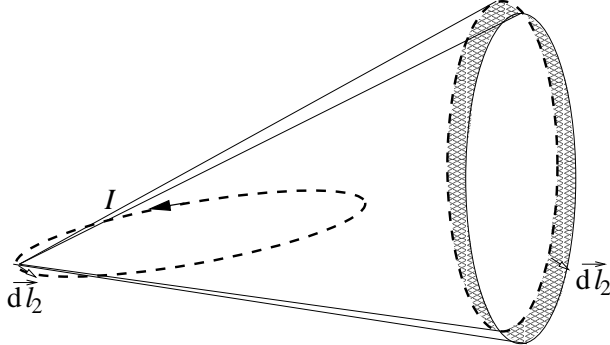


Figure 2.10:

L'intégrale sur \vec{dl}_1 est l'angle solide sous lequel on voit le circuit C_1 depuis P_2 . Ensuite nous devons considérer deux cas.

- Si les circuits ne s'entrelacent pas, alors l'intégrale est égale à 0
- Si les circuits s'entrelacent, alors l'intégrale est égale à 4π .

Ce résultat nous permet de conclure que :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad \text{si la courbe } C \text{ entoure le courant } I$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{si la courbe } C \text{ n'entoure pas le courant } I$$

De plus si la courbe C entoure N fils parcourus par des courants I_k (k variant de 1 à N), on a :

Théorème d'Ampère : $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k$

A titre d'exemple, le courant total qui traverse la surface C de la figure ci dessous sont comptés positivement lorsqu'il traverse vers le haut et négativement vers le bas. On a donc :

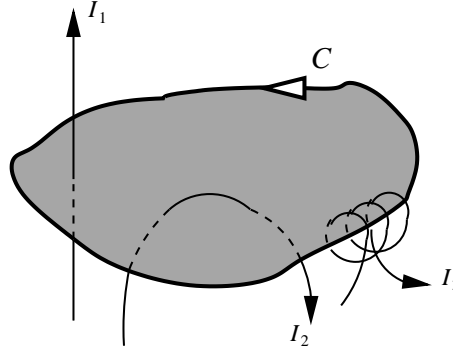


Figure 2.11:

$$\sum_{k=1}^n I_k = I_1 + (I_2 - I_2) - 3I_3 = I_1 - 3I_3$$

2.3.5 Rotationnel du champ magnétique.

Si S_C est la surface intérieure au contour C , on a par définition du vecteur \vec{j} :

$$I = \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

A partir du résultat précédent, nous pouvons écrire :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

De plus d'après le théorème de Stokes, on a

$$\iint_{S_C} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Comme cette relation est valable quelque soit le contour C et donc la surface S_C alors on a l'expression locale du théorème d'Ampère :

Equation de Maxwell-Ampère : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

2.4 Equation de passage du champ magnétique.

2.4.1 Composante normale de \vec{B} .

Considérons une surface entre deux milieux 1 et 2. Ces milieux peuvent être le siège de courant volumique et la surface peut être le siège de courant surfacique. Considérons un petit cylindre, fermé par deux disques S_1 et S_2 , d'axe perpendiculaire à la surface. Notons \vec{n}_{12} le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface dirigé de 1 vers 2. Le flux de champ magnétique à travers le cylindre est nul, par définition, et a :

$$\iint_{\text{cyl}} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} -\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{12} \, dS + \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{12} \, dS = 0$$

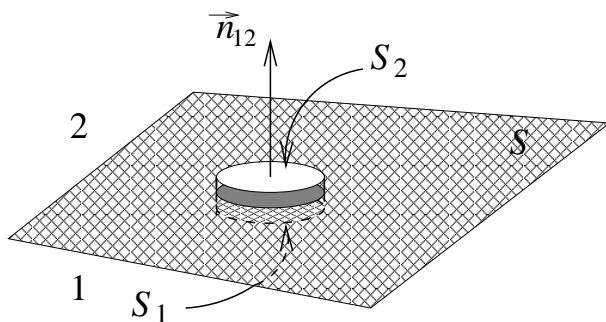


Figure 2.12:

Si la hauteur du cylindre tend vers 0, le premier terme s'annule et on a :

$$\iint_S (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} dS = 0$$

Cette relation étant vraie quelque soit la surface S , on a

$$\boxed{(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0}$$

ce qui conduit à énoncer la propriété fondamentale suivante :



Propriété 20 : La composante normale du champ magnétique est toujours continue.

Nous n'avons fait aucune hypothèse pour arriver à cette conclusion. Elle ne souffre d'aucune exception.

2.4.2 Composante tangentielle de \vec{B} .

Considérons un contour quelconque $ABCD$ dont les segments AD et BC sont orthogonaux à la surface décrite précédemment et AB et CD sont parallèles à cette surface (voir figure ci-dessous). La circulation de \vec{B} sur le contour $ABCD$ s'écrit :

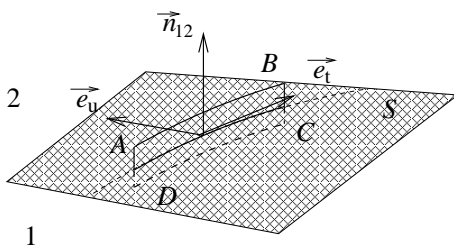


Figure 2.13:

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Le courant susceptible de traverser la surface $ABCD$ peut être écrit :

$$I = \iint_{S_{ABCD}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{ABCD}} \vec{j} \cdot \vec{e}_u dS$$

où S_{ABCD} est la surface intérieure au contour $ABCD$ et \vec{e}_u le vecteur unitaire perpendiculaire à cette surface. On a donc :

$$\int_A^B \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_{ABCD}} \vec{j} \cdot \vec{e}_u dS$$

Faisons tendre $h = AD = BC$ vers 0. Les points A et D sont confondus avec M et les points C et B sont confondus avec N . L'intégrale au dessus devient :

$$\begin{aligned} \iint_{S_{ABCD}} \vec{j} \cdot \vec{e}_u \, dS &= \int_0^h dz \int_M^N \vec{j} \cdot \vec{e}_u \, dS \\ &= \int_M^N \vec{j} h \cdot \vec{e}_u \, dS \\ &= \int_M^N \vec{j}_s \cdot \vec{e}_u \, dS \end{aligned}$$

où on a introduit la densité de courant surfacique définie comme :

$$\vec{j}_s = \vec{j} \cdot h$$

Donc, on trouve :

$$\int_M^N \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} + \int_N^M \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_M^N \vec{j}_s \cdot \vec{e}_u \, dl$$

en remplaçant $d\vec{l} = dl \vec{e}_u \wedge \vec{n}_{12}$, on a :

$$\int_M^N (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{e}_u \wedge \vec{n}_{12} \, dl = \mu_0 \int_M^N \vec{j}_s \cdot \vec{e}_u \, dl$$

quelque soit le segment MN . En effectuant finalement un produit scalaire par \vec{e}_u sur les deux membres de l'équation, on a :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot (\vec{e}_u \wedge \vec{n}_{12}) \cdot \vec{e}_u = \mu_0 \vec{j}_s \cdot (\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u)$$

Ce qui nous permet d'écrire l'équation de passage :

$$\boxed{\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s}$$

et d'écrire :



Propriété 21 : La composante tangentielle du champ magnétique est dis-continue à la traversée d'une distribution surfacique de courant.

2.5 Exemple de calculs de champ magnétique.

2.5.1 Champ magnétique créé par un courant volumique dans un conducteur cylindrique.

Considérons un fil rectiligne conducteur de rayon a de longueur infinie. Le fil est parcouru par un courant I et nous cherchons le champ magnétique en tout point M de l'espace. Ce problème admettant une symétrie cylindrique, nous affectons le repère $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ au point M . Ce problème admettant une haute symétrie, nous allons déterminer les plans de symétrie et d'antisymétrie passant par M en vu d'utiliser le théorème d'Ampère.

- le plan (\vec{u}_r, \vec{u}_z) est plan de symétrie
- le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan d'antisymétrie
- le plan $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est un plan quelconque.

Le champ magnétique est toujours perpendiculaire au plan de symétrie du problème donc on a :

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_\theta$$

De plus ce problème est indépendant de z et de θ donc on a :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$$

Le contour que nous devons utiliser pour appliquer le théorème d'Ampère doit respecter la symétrie du problème et passer par M . \mathcal{C} est donc le cercle de rayon r centré sur le fil. L'élément différentiel de parcours sur ce fil est : $d\vec{l} = dl \vec{u}_\theta$. Le théorème d'Ampère

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{\text{int } \mathcal{C}} I$$

s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} B(r) \vec{u}_\theta \cdot dl \vec{u}_\theta &= \mu_0 \sum_{\text{int } \mathcal{C}} I \\ \oint_{\mathcal{C}} B(r) dl &= \mu_0 \sum_{\text{int } \mathcal{C}} I \\ B(r) \oint_{\mathcal{C}} dl &= \mu_0 \sum_{\text{int } \mathcal{C}} I \\ B(r) 2\pi r &= \mu_0 \sum_{\text{int } \mathcal{C}} I \end{aligned}$$

Maintenant nous devons considérer deux cas pour déterminer la somme des intensités des courants intérieur au contour \mathcal{C} .

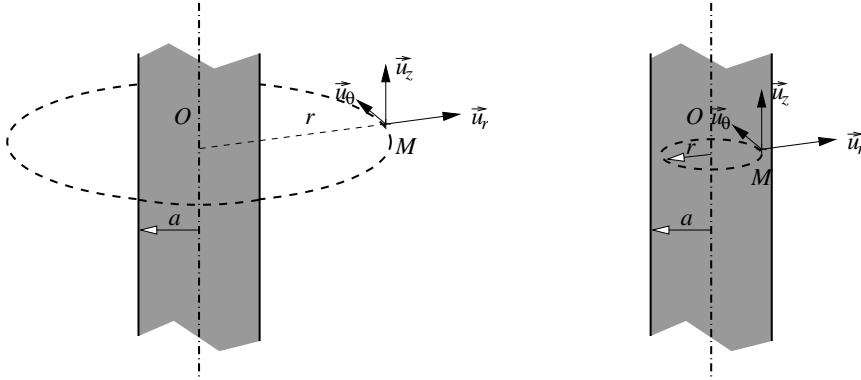


Figure 2.14:

- Si $r > a$, le fil est à l'intérieur du contour \mathcal{C} . Le courant qui traverse \mathcal{C} est I . Donc on a

$$B_e(r) 2\pi r = \mu_0 I$$

- Si $r < a$, le contour \mathcal{C} est à l'intérieur du fil. La densité de courant en chaque point du fil est :

$$j = \frac{I}{\pi a^2}$$

. Le courant qui traverse \mathcal{C} est celui qui traverse la surface πr^2 intérieure au fil c'est à dire :

$$\sum_{\text{int } \mathcal{C}} I = j \pi r^2 = I \frac{r^2}{a^2}$$

Donc le champ magnétique à l'intérieur du fil est :

$$B_i(r) \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

Ce que nous pouvons écrire :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{si } r > a \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta & \text{si } r < a \end{cases}$$

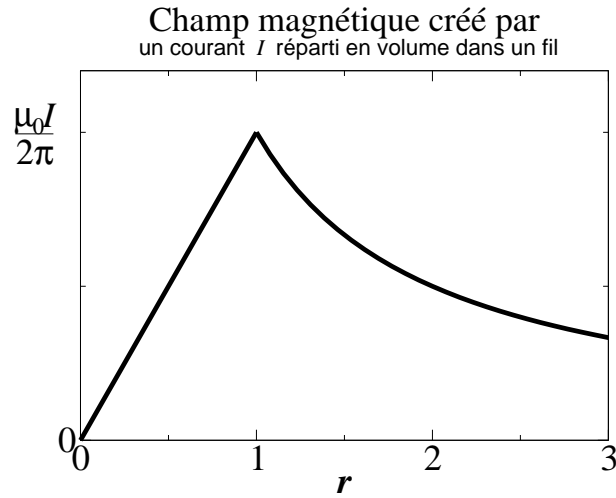


Figure 2.15:

Les composantes radiale et tangentielle du champ magnétique sont bien continue au passage de la surface du fil

$$\vec{B}_i(a) = \vec{B}_e(a)$$

ce qui est en bon accord avec les relations de passage écrites dans le paragraphe précédent puisqu'il n'y a pas de courants surfaciques dans ce problème.

2.5.2 Champ magnétique créé par un courant surfacique dans un conducteur cylindrique.

Considérons maintenant un fil rectiligne infini dans lequel circule un courant *surfacique* d'intensité I . La symétrie de ce système est la même que celle du précédent. Les étapes qui ont amenées a :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 \sum_{\text{int } \mathcal{C}} I$$

sont les mêmes et ce résultat est donc valide. Maintenant considérons les deux cas que nous avons envisagés :

- Si $r > a$, le fil est à l'intérieur du contour \mathcal{C} . Le courant qui traverse \mathcal{C} est I . Donc on a encore

$$B_e(r) 2\pi r = \mu_0 I$$

- Si $r < a$, le contour \mathcal{C} est à l'intérieur du fil. Comme le courant I est réparti sur la surface du fil, la somme des courants à l'intérieur de \mathcal{C} est nulle. On a

$$B_i(r) = 0$$

Ce qui donne :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{si } r > a \\ 0 & \text{si } r < a \end{cases}$$

On constate ici une discontinuité du champ magnétique au passage de la surface du fil. En $r = a$ on a,

$$\vec{B}_i(a) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{B}_e(a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_\theta$$

La relation de passage des composantes du champ donne

$$(\vec{B}_i(a) - \vec{B}_e(a)) \cdot \vec{n} = B_i(a) \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_r = 0$$

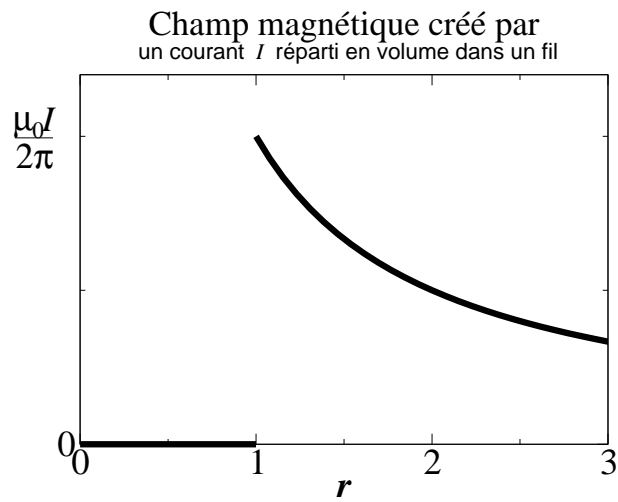


Figure 2.16:

et

$$(\vec{B}_i(a) - \vec{B}_e(a)) \wedge \vec{n} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = \mu_0 \vec{j}_s$$

car $\vec{j}_s = \frac{I}{2\pi a} \vec{u}_z$ par définition. Nous avons vérifié que cette discontinuité est en accord avec les relations de passage formulées au dessus.

2.5.3 Champ magnétique créé par un solénoïde infini.

X

X

En résumé



Force	⇒	Champ
$d\vec{F} \propto I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1$	$\xrightarrow{\text{postulat}}$	$d\vec{B}_1 \propto \frac{I_1 d\vec{l}_1 \wedge \vec{u}}{r^2}$
Laplace	$\xleftarrow{\text{validation}}$	Biot et Savart



Equations de Maxwell	
Eq. Intégrale	Eq. Locale
$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$	$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
$\oiint \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\text{div} \vec{B} = 0$



$\oiint \vec{B} d\vec{S} = 0$	⇒	Composante normale de \vec{B} continue
$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$	⇒	Composante tangentielle de \vec{B} discontinue

QCM. 19 : Le champ magnétique est créé par

- 1: les charges électrostatiques au repos
- 2: les courants électriques
- 3: les champs électrostatiques.

QCM. 20 : Le champ magnétique est :

- 1: perpendiculaire aux plans de symétrie
- 2: parallèle aux plans de symétrie

QCM. 21 : Les lignes de champ magnétique

- 1: sont parallèles
- 2: sont perpendiculaires
- 3: ne se coupent jamais

QCM. 22 : Une équation de Maxwell s'écrit :

- 1: $\operatorname{div} \vec{B} = \rho$
- 2: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
- 3: $\operatorname{div} \vec{B} = \mu_0 \rho$

QCM. 23 : Comment sont orientées les lignes de champ magnétique par rapport aux éléments de courant qui les créés :

- 1: elles les entourent
- 2: elles leur sont parallèles
- 3: elles leur sont perpendiculaires

QCM. 24 : La circulation du champ magnétique sur un contour fermé entourant des courant I vaut :

- 1: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$
- 2: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = I$
- 3: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

QCM. 25 : A l'interface avec une nappe de courant parcouru par un courant j , la composante normale du champ magnétique

- 1: varie de $\mu_0 j$
- 2: est continue
- 3: varie de j

QCM. 26 : Le champ magnétique créé en un point M par un circuit \mathcal{C} parcouru par un courant I est donné par

- 1:
- 2:

QCM. 27 : Le flux de champ magnétique à travers une surface fermée vaut :

- 1: $\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \mu_0 I$
- 2: $\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = I$
- 3: $\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = 0$

QCM. 28 : Le champ magnétique est :

- 1: perpendiculaire aux plans d'antisymétrie
- 2: parallèle aux plans de d'antisymétrie

QCM. 29 : A l'interface avec une nappe de courant parcouru par un courant j , la composante tangentielle du champ magnétique

- 1: varie de $\mu_0 j$
- 2: est continue
- 3: varie de j

QCM. 30 : L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

- 1: $\operatorname{rot} \vec{B} = \rho$
- 2: $\operatorname{rot} \vec{B} = 0$
- 3: $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

QCM. 31 : Les équations de Maxwell prédisent que

- 1: il n'existe pas de charge magnétique
- 2: les charges électrostatique sont les mêmes que celle du magnétisme
- 3: il existe des charges magnétique dans les courants.

QCM. 32 : Une lignes de champ magnétique

- 1: relie les courants électriques et l'infini
- 2: est toujours une boucle
- 3: relie les courants électriques

Chapitre 3

Le potentiel magnétique.

Tout comme en électrostatique, il est souvent intéressant d'utiliser un potentiel magnétique pour traiter les problèmes de magnétisme. Nous allons montrer la relation simple qui existe entre le potentiel magnétique et le champ magnétique. Puis après avoir étudié les propriétés mathématiques fondamentales de ce potentiel, nous montrerons qu'il peut être simplement relié à la quantité de mouvement d'une particule.

3.1 Le potentiel vecteur magnétique.

3.1.1 Expression de \vec{A} en fonction des courants.

Considérons un ensemble de conducteurs parcourus par des courants électriques. La distribution de courants au point P repéré par rapport à l'origine du repère par $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$ est notée $\vec{j}(\vec{r}_P)$.

La relation de Biot et Savart est la relation générale qui permet de calculer le champ magnétique créé en un point M repéré par rapport à l'origine du repère par $\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$ par la répartition des densités de courants :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}_{PM}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|^2} d\tau$$

où $d\tau$ est l'élément différentiel autour de \vec{r}_P .

D'autre part nous pouvons écrire le laplacien en M de la quantité suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} \right) &= \frac{d}{dr_M} \left(\frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} \right) \vec{u}_{PM} \\ &= \frac{-\vec{u}_{PM}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|^2} \end{aligned}$$

Il faut noter que sur la première ligne, la dérivé s'effectue bien par rapport à \vec{r}_M (et non \vec{r}_P) car c'est le laplacien en M qui est calculer. Autrement dit, on cherche à déterminer de combien varie le chmp magnétique si on déplace le point M de $d\vec{r}_M$. D'où, en injectant dans \vec{B} :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left[\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} \right) \wedge \vec{j} \right] d\tau$$

Connaissant l'identité vectorielle :

$$\vec{\nabla} \wedge (f\vec{G}) = f \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{G} + \vec{\nabla} f \wedge \vec{G}$$

on a

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{\nabla} \wedge \left[\frac{\vec{j}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} \right] d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{j}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} d\tau$$

$\vec{\nabla}$ est un opérateur lié aux dérivées spatiales du point M où on calcule le champ magnétique, donc une dérivée par rapport à r_M . Le vecteur \vec{j} est quant à lui un vecteur dépendant de \vec{r}_P . On a donc $\vec{\nabla} \wedge \vec{j} = \vec{0}$.

Il reste :

$$\vec{B}(\vec{r}_M) = \vec{\nabla} \wedge \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} d\tau \right]$$

Cette relation a été obtenue sans effectuer aucune hypothèse ni approximation. Elle est toujours vraie.



Définition 6 : Le potentiel magnétique est défini par : $\vec{A}(\vec{r}_M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} d\tau$



Propriété 22 : La relation suivante est toujours valable : $\boxed{\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}}$

En introduisant l'intensité $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ dans l'équation au dessus, on a :

$$\vec{A}(\vec{r}_M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|}$$

Cette relation est moins générale que la précédente.

3.1.2 Equation de Maxwell $\text{div } \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0$ et potentiel magnétique.

Considérons un champ de vecteur \vec{A} quelconque et calculons la quantité : $\text{div } \vec{\text{rot}} \vec{A}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\text{rot}} \vec{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne en réorganisant les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\text{rot}} \vec{A} &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cette démonstration est a été effectuée en coordonnées cartésiennes, mais elle reste valable dans les autres systèmes de coordonnées. En utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$, on trouve immédiatement : $\text{div } \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0$. Comme on effectue le produit de $\vec{\nabla}$ avec un vecteur perpendiculaire à $\vec{\nabla}$, on obtient toujours 0.

Elle prouve que la définition du potentiel vecteur magnétique, $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$, est consistante avec la propriété fondamentale du champ magnétique vu dans le chapitre précédent :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

3.1.3 Circulation de \vec{A}

Considérons un potentiel vecteur magnétique \vec{A}_1 associé à un champ magnétique \vec{B}_1 défini tout deux en tout point de l'espace. De plus, considérons un contour \mathcal{C} quelconque. D'après le théorème de Stokes, la circulation de \vec{A}_1 sur le contour \mathcal{C} peut s'écrire :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \vec{\text{rot}} \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

où $\Sigma(\mathcal{C})$ est une surface s'appuyant sur le contour \mathcal{C} , $d\vec{l}_2$ est un élément différentiel du contour \mathcal{C} et $d\vec{S}_2$ est un élément différentiel de surface $\Sigma(\mathcal{C})$. En remplaçant $\vec{\text{rot}} \vec{A}$ par \vec{B} , on a :

 **Propriété 23** :
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

3.2 Choix de jauge

Le potentiel vecteur magnétique est un outil mathématique au même titre que le potentiel électrostatique. Il sert à calculer le champ magnétique qui sert à calculer la force de Laplace s'appliquant sur un élément de circuit parcouru par un courant.

Comme tout potentiel, il est défini à une constante près qui disparaît par l'application de l'opération de dérivée, c'est à dire, ici par l'application du rotationnel. Les relations entre les opérateurs permettent d'écrire :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} f = 0 \quad \forall f$$


Cette relation se démontre facilement en utilisant la notation avec $\vec{\nabla}$: $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = 0$. Donc si on remplace le potentiel vecteur magnétique \vec{A} par

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\text{grad}} f$$


en tout point de l'espace, on trouve pour le nouveau champ magnétique :

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{\text{rot}} \vec{A}' \\ &= \vec{\text{rot}} \vec{A} + \vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} f \\ &= \vec{\text{rot}} \vec{A} \\ &= \vec{B} \end{aligned}$$

Donc si ajoute le gradient de n'importe quelle fonction à la formule du potentiel magnétique définie au dessus, on trouve toujours le même champ magnétique.

 **Propriété 24** : **Le potentiel magnétique est défini au gradient d'une fonction près : $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\text{grad}} f$ donne le même champ magnétique que \vec{A}**

On en déduit que :

 **Propriété 25** : **Il existe une infinité de potentiel magnétique pour un même problème.**

En magnétostatique, il est cependant judicieux d'appliquer la règle suivante que nous appelons un choix de jauge :

 **Propriété 26** : **Jauge de Lorentz consiste à choisir f tel que $\text{div} \vec{A} = 0$**

Ce choix n'est pas obligatoire mais il permet de simplifier le calcul comme nous allons le voir.

3.3 Potentiel vecteur et quantité de mouvement.

Considérons une charge q qui à un instant t_1 est au point M_1 repéré par \vec{r}_1 et qui a une quantité de mouvement \vec{p}_1 . A l'instant t_2 , elle est un point M_2 repéré par \vec{r}_2 et elle a une quantité de mouvement \vec{p}_2 . Au point M_1 le potentiel vecteur magnétique, créé par des sources extérieures est $\vec{A}(\vec{r}_1)$ et au point M_2 , il vaut $\vec{A}(\vec{r}_2)$.

En tout point de l'espace, la force de Lorentz exercée par les sources du champ magnétique sur la charge vaut :

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= q\vec{v} \wedge \vec{B} \\ &= q\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \\ &= q \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})\end{aligned}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la charge s'écrit :

$$\begin{aligned}m\vec{a} &= \vec{F}_L \\ m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{F}_L \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= q \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})\end{aligned}$$

Si le potentiel vecteur est constant en fonction du temps, on a :

$$d\vec{p} = q d\vec{r} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

La partie a droite de l'équation peut être développée, en utilisant l'égalité : $\vec{X} \wedge (\vec{Y} \wedge \vec{Z}) = (\vec{X} \cdot \vec{Y}) \cdot \vec{Z} - (\vec{Y} \cdot \vec{Z}) \cdot \vec{X}$ et on a :

$$d\vec{r} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) d\vec{r}$$

La jauge de Lorentz implique que $\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Le deuxième membre de l'équation au dessus est donc nul.

Pour calculer le premier membre, on peut le développer en coordonnées cartésiennes par exemple :

$$\begin{aligned}(d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} &= \left[\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right] \cdot \vec{A} \\ &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} dz\end{aligned}$$


On reconnaît sur la dernière ligne la définition de la différentielle totale exacte de \vec{A} :

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} dz$$

Ce résultat se retrouve dans tous les systèmes de coordonnées. On a donc :

$$d\vec{p} = q d\vec{A}$$

On a donc la propriété suivante :

 **Propriété 27** : **La variation de quantité de mouvement d'une charge dans un champ magnétique est égal à la valeur de la charge fois la variation de potentiel scalaire**

Hors la force magnétique ne travaillant pas, elle conserve toujours le module de vitesse on a donc les relations cinétiques :

 **Propriété 28** :

$\begin{aligned}dp &= 0 \\ d\vec{p} &= q d\vec{A}\end{aligned}$

3.4 Equation local de \vec{A} .

La relation de Maxwell Ampère, qui relie le champ magnétique à ces sources de courants, s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Ce qui peut toujours se récrire avec le potentiel vecteur magnétique :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

D'autre part, on peut montrer (voir en appendice) que la relation suivante est toujours vraie (quelque soit le vecteur \vec{A}) :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

où $\Delta \vec{A}$ est l'opérateur laplacien vectoriel.



Définition 7 : Le laplacien vectoriel est défini par : $\Delta \vec{V} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$

Il s'applique à un champ de vecteur et son résultat est un autre champ de vecteur qui est donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\Delta \vec{A} = \begin{cases} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

Si la jauge du potentiel vecteur vérifie bien $\text{div} \vec{A} = 0$ alors l'équation au dessus devient :



Propriété 29 :

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Cette propriété se traduit simplement en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = -\mu_0 j_x \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} = -\mu_0 j_y \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu_0 j_z \end{cases}$$

3.5 Analogie avec le potentiel électrostatique.

3.6 Exemple : potentiel magnétique d'une boucle de courant.

Considérons une boucle conductrice, de rayon a , parcourue par un courant d'intensité I . Nous reperons un point M quelconque de l'espace par ses coordonnées sphériques et pour simplifier les calculs nous plaçons le repère (O, x, y, z) de sorte à ce que $\phi = 0$, ce qui revient à placer M de sorte à ce que $y = 0$:

$$M = M(r, \theta, 0)$$

3.6.1 Calcul de \vec{A} .

Le potentiel magnétique vecteur est défini en tout point de l'espace par :

$$\vec{A}(\vec{r}_M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|}$$

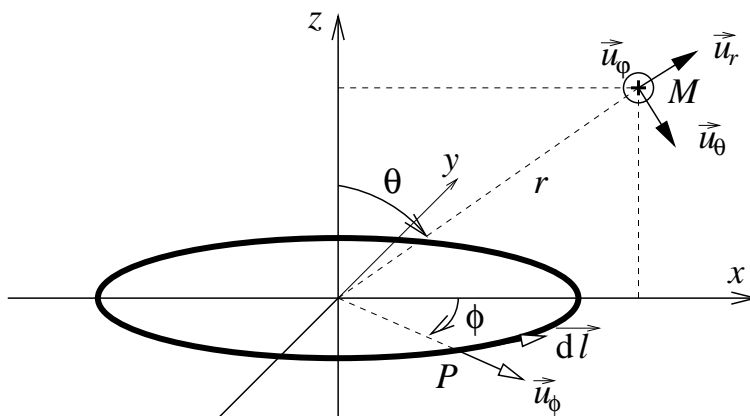


Figure 3.1:

où l'intégrale est effectuée sur la boucle de courant.

MONTRER QUE A EST SELON U PHI

$$\vec{A} = A_\psi \vec{u}_\psi \Rightarrow A_\psi = \vec{A} \cdot \vec{u}_\psi$$

$$A_\psi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{u}_\psi \cdot d\vec{l}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|}$$

Il faut donc maintenant déterminer quelle est la bonne variable d'intégration et exprimer les quantités dans l'intégrale en fonction de cette variable. La figure ci dessous représente la projection selon Oxy du problème. Le point P où circule l'élément différentiel de courant est repéré par sa coordonnée polaire ϕ qui est la bonne variable d'intégration à intégrer entre 0 et 2π .

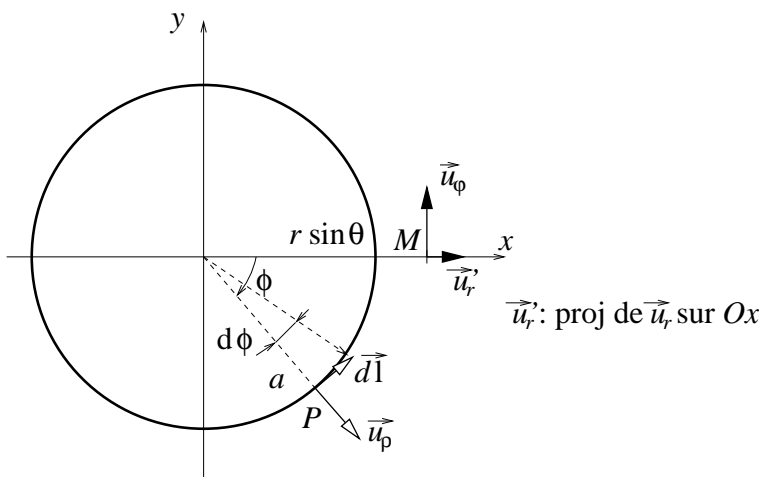


Figure 3.2:

Exprimons maintenant $|\vec{r}_P - \vec{r}_M|$. Dans la base sphérique affectée au point M et dans la base cylindrique affectée au point P , on a :

$$\vec{r}_M = r \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad \vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_z + \sin \theta \vec{u}_x$$

$$\vec{r}_P = a \vec{u}_\rho \quad \text{avec} \quad \vec{u}_\rho = \cos \phi \vec{u}_x + \sin \phi \vec{u}_y$$

On remarque qu'on a donc :

$$\vec{r}_M \cdot \vec{r}_P = a \cdot r \cdot \sin \theta \cos \phi$$

On a donc :

$$\begin{aligned} |\vec{r}_P - \vec{r}_M| &= [(\vec{r}_P - \vec{r}_M)^2]^{1/2} \\ &= [r_P^2 + r_M^2 - 2\vec{r}_M \cdot \vec{r}_P]^{1/2} \\ &= [r_P^2 + r_M^2 - 2a \cdot r \cdot \sin \theta \cos \phi]^{1/2} \end{aligned}$$

Comme $r \gg a$, on peut écrire :

$$|\vec{r}_P - \vec{r}_M| = [r^2(1 - 2\frac{r}{a} \sin \theta \cos \phi + \frac{r^2}{a^2})]^{1/2}$$

En utilisant le développement limité, $(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon$, on a :

$$|\vec{r}_P - \vec{r}_M| =$$

Calculons maintenant $\vec{u}_\psi \cdot d\vec{l}$.

$$d\vec{l} = dl\vec{u}_\phi = a \phi \vec{u}_\phi$$

3.6.2 Calcul du rotationnel .

3.6.3 Calcul de la divergence.

En résumé



- Il existe toujours une infinité de champs de vecteur \vec{A} tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$.



- On choisit \vec{A} tel que $\text{div} \vec{A} = 0$ (Jauge de Lorentz).



- On a toujours : $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$.



- La circulation de \vec{A} sur un contour est égale au flux de \vec{B} sur n'importe quelle surface appuyée sur ce contour.
-

QCM. 33 : Il existe toujours un potentiel magnétique

\vec{A} défini par

1: $\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}} |\vec{A}|$

2: $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$

3: $\vec{A} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$

QCM. 34 : La circulation du potentiel vecteur sur un contour \mathcal{C} enfermant une surface Σ est égale

1: 0

2: $\mu_0 \vec{j}$

3: au flux de \vec{B} à travers Σ

QCM. 35 : Le potentiel vecteur donne le même champ magnétique si on lui ajoute

1: le gradient de n'importe quelle fonction scalaire

2: le rotationnel de n'importe quelle fonction vectorielle

3: le produit vectoriel de n'importe quel couple de vecteurs

QCM. 36 : La variation de quantité de mouvement d'une charge peut être reliée à la variation de potentiel potentiel vecteur par :

1: $q\Delta\vec{p} = \Delta\vec{A}$

2: $\Delta p = q\Delta A$

3: $\Delta\vec{p} = q\Delta\vec{A}$

QCM. 37 : Le laplacien du potentiel vecteur est égal à

1: $\Delta\vec{A} = \vec{B}$

2: $\Delta\vec{A} = 0$

3: $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$

QCM. 38 : La jauge de Lorentz consiste à fixer le potentiel vecteur de sorte à

1: $\text{div} \vec{A} = 0$

2: $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0$

3: $\vec{A} \wedge \vec{k} = 0$

QCM. 39 : La variation du module de la quantité de mouvement d'une charge peut être reliée à la variation de potentiel potentiel vecteur par :

1: $q\Delta p = \Delta A$

2: $\Delta p = q\Delta A$

3: $\Delta p = 0$

Chapitre 4

Le moment magnétique.

4.1 Le moment magnétique.

4.1.1 Définition.

Considérons un courant permanent, circulant dans un circuit indéformable \mathcal{C} .

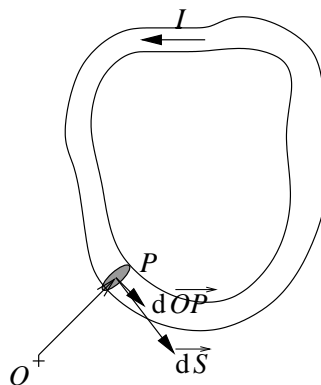


Figure 4.1: .

Cherchons maintenant une grandeur qui soit une caractéristique du circuit, c'est à dire une quantité qui donne une information à la fois de l'intensité qui circule dans le circuit mais aussi de la topologie du circuit.

Par définition de l'intensité du courant $I = \iint \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}$ et sachant que cette intensité est une constante dans le circuit quel que soit le point P , nous pouvons remarquer que :

$$\begin{aligned} \iiint \vec{j}(P) \, d\tau &= \oint_{\mathcal{C}} \iint \vec{j}(P) \cdot d\vec{S} \, d\vec{OP} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} I \, d\vec{OP} \\ &= I \oint_{\mathcal{C}} d\vec{OP} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Nous voyons que la circulation du circuit est toujours nulle. Elle ne peut donc pas être une caractéristique du circuit. Cette quantité est manifestement trop simple.

En revanche, par analogie avec le moment mécanique, nous pouvons calculer le moment de la quantité au dessus :

Définition 8 : Moment magnétique : $\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint \vec{OP} \wedge \vec{j}(P) \, d\tau$

La raison de l'apparition du facteur 1/2 dans l'équation au dessus sera élucidée après le calcul de l'intégrale au dessus.

4.1.2 Indépendance de l'origine.

Si quantité définie au dessus décrit bien les propriétés de la boucle de courant, elle ne doit pas dépendre du choix de l'origine O qui apparait dans la formule. Calculons donc le moment magnétique, \vec{M}' , de la boucle de courant en choisissant une autre origine O' .

$$\begin{aligned} \vec{M}' &= \frac{1}{2} \iiint \vec{O'P} \wedge \vec{j}(P) \, d\tau \\ &= \frac{1}{2} \iiint (\vec{O'O} + \vec{OP}) \wedge \vec{j}(P) \, d\tau \\ &= \frac{1}{2} \iiint \vec{O'O} \wedge \vec{j}(P) \, d\tau + \frac{1}{2} \iiint \vec{OP} \wedge \vec{j}(P) \, d\tau \\ &= \frac{1}{2} \vec{O'O} \wedge \iiint \vec{j}(P) \, d\tau + \vec{M} \\ &= \vec{M} \end{aligned}$$

4.1.3 Simplification de l'écriture.

Nous pouvons écrire en introduisant l'intensité du courant :

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{2} \iiint \vec{OP} \wedge \vec{j}(P) \, d\tau \\ &= \frac{1}{2} \oint_C \iint_S \vec{OP} \wedge \vec{j}(P) \, d\vec{S} \, d\vec{OP} \\ &= \frac{1}{2} \oint_C \vec{OP} \wedge I \, d\vec{OP} \\ &= I \oint_C \frac{1}{2} \vec{OP} \wedge d\vec{OP} \end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord, que le produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est la surface du parallélogramme défini par les vecteurs \vec{U} et \vec{V} .

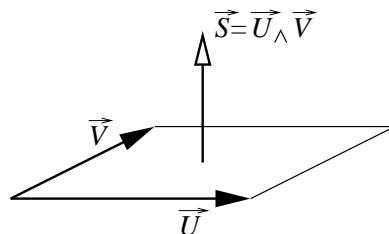


Figure 4.2: Produit vectoriel et surface.

Nous pouvons constater que le produit vectoriel $\frac{1}{2} \vec{OP} \wedge d\vec{OP}$ n'est rien d'autre que la surface du triangle quelconque représenté sur la figure au dessous : Chaque droite issue de O coupant le circuit en un point P le coupe aussi en un autre point P' . Les vecteurs $\vec{OP} \wedge \vec{OP}$ et $\vec{OP}' \wedge \vec{OP}'$

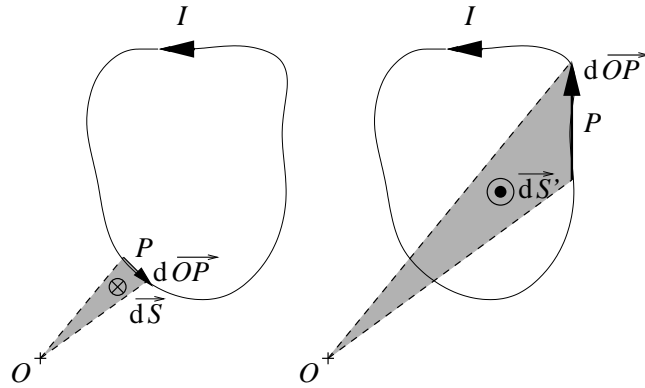


Figure 4.3: .

sont forcément orientés dans des directions opposées. Si nous prenons $dOP' = dOP \frac{OP'}{OP}$, alors la surface extérieure au contour \mathcal{C} est comptée une fois dans un sens et une autre dans l'autre. Il reste :

$$\frac{1}{2} \vec{OP} \wedge d\vec{OP} = \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} d\vec{S}$$

et donc le moment magnétique s'exprime comme:



Propriété 30 : Le moment magnétique à la propriété : $\vec{M} = I \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} d\vec{S}$

4.2 Force ressentie par un circuit dans un champ uniforme.

Considérons maintenant qu le circuit \mathcal{C} baigne dans un champ magnétique \vec{B} uniforme. La force qui s'exerce sur un élément différentiel $d\vec{OP}$ du circuit est donné par :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

et la force exercé par le champ magnétique sur le barycentre du circuit est :

$$\begin{aligned} \vec{F}_G &= \oint_{\mathcal{C}} I d\vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= I \oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \wedge \vec{B} && \text{car } I \text{ est constant} \\ &= I \left(\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} && \text{car } \vec{B} \text{ est constant} \\ &= 0 && \text{car l'intégrale de } d\vec{l} \text{ sur un contour fermé est nulle} \end{aligned}$$

On peut comprendre ce résultat en remarquant que pour tout point P , il existe un point P' pour lequel la force de Laplace est exactement opposée. On a donc la propriété suivante :



Propriété 31 : La force exercée par un champ magnétique uniforme sur le barycentre d'un circuit électrique est nulle.

4.3 Couple ressenti par un circuit dans un champ uniforme.

Par définition, le couple mécanique, par rapport à un point O , ressenti par un système soumis à des forces extérieures $d\vec{F}(P)$ agissant au point P du système est :

$$\Gamma_O = \iiint_{\text{syst}} \vec{OP} \wedge d\vec{F}(P)$$

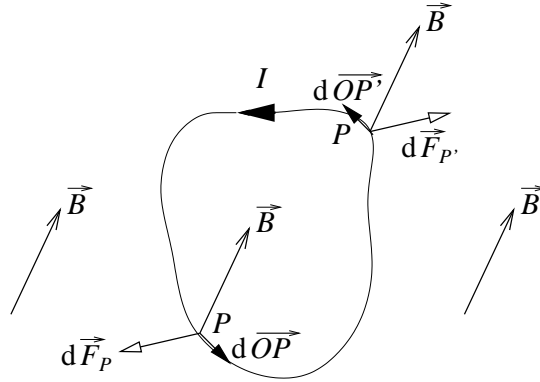


Figure 4.4: .

En considérant le circuit suffisamment fin, on peut écrire le couple ressenti par le circuit par rapport à un point O donné, sous l'effet des forces magnétiques :

$$\Gamma_O = I \oint_C \overrightarrow{OP} \wedge (d\vec{l} \wedge \vec{B})$$

et en développant le produit vectoriel, on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_O &= I \oint_C (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) d\vec{l} - I \oint_C (\overrightarrow{OP} \cdot d\vec{l}) \vec{B} \\ &= I \oint_C (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) d\vec{l} - I \oint_C d\frac{\overrightarrow{OP}^2}{2} \vec{B} && \text{car } d\vec{l} = d\overrightarrow{OP} \\ &= I \oint_C (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) d\vec{l} - I \vec{B} \oint_C d\frac{\overrightarrow{OP}^2}{2} && \text{car } \vec{B} \text{ uniforme} \\ &= I \oint_C (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) d\vec{l} \end{aligned}$$

Projetons maintenant ce résultat sur l'axe Ox pour calculer la contribution selon Ox . Les autres contributions se calculeront par analogie.

$$\begin{aligned} \Gamma_{Ox} &= I \oint_C ((\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) d\vec{l}) \vec{u}_x \\ &= I \oint_C ((\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B})) \vec{u}_x d\vec{l} \\ &= I \iint_{\Sigma(C)} \overrightarrow{\text{rot}} ((\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) \vec{u}_x) d\vec{S} && \text{par application du théorème de Stokes} \\ &= I \iint_{\Sigma(C)} (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{u}_x) d\vec{S} \\ &\quad + I \iint_{\Sigma(C)} (\overrightarrow{\text{grad}} (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) \wedge \vec{u}_x) d\vec{S} && \text{car } \overrightarrow{\text{rot}} (f\vec{u}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{u} \\ &= -I \vec{u}_x \iint_{\Sigma(C)} [\overrightarrow{\text{grad}} (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B})] \wedge d\vec{S} && \text{car } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_x = \vec{0} \end{aligned}$$

Calculons maintenant la quantité à intégrer en développant l'opérateur gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) = \overrightarrow{OP} \cdot \text{div } \vec{B} + \vec{B} \cdot \overrightarrow{OP}$$

Or $\text{div } \vec{B} = 0$ et $\text{div } \overrightarrow{OP} = \vec{u}_P \frac{dr_P \vec{u}_P}{dr_P} = 1$ Donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) = \vec{B}$$

En tenant compte du fait que \vec{B} est homogène, l'intégrale au dessus s'écrit :

$$\begin{aligned}\Gamma_{Ox} &= -I \vec{u}_x \iint_{\Sigma(C)} \vec{B} \wedge d\vec{S} \\ &= \vec{u}_x \left(I \iint_{\Sigma(C)} d\vec{S} \right) \wedge \vec{B} \\ &= \vec{u}_x \vec{M} \wedge \vec{B}\end{aligned}$$

On peut écrire une expression similaire pour les contributions selon \vec{u}_y et \vec{u}_z .
 Γ_{Ox} étant la projection de Γ sur \vec{u}_x , on peut aussi écrire :

$$\Gamma_{Ox} = \vec{u}_x \cdot \Gamma$$

D'où la propriété :

Couple ressenti par un circuit dans un champ magnétique :



Propriété 32 :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

Cette propriété est très intéressante pour déterminer l'évolution cinétique d'un moment magnétique dans un champ magnétique.

4.4 Energie magnétique d'un moment en interaction avec un champ.

Mécaniquement, la contribution translationnelle de l'énergie potentielle d'un système se déplaçant d'une longueur $d\vec{l}$ sous l'action d'une force \vec{F}_G appliquée sur son barycentre est

$$dU_t = \vec{F}_G \cdot d\vec{l}$$

Ici, la force exercée sur le barycentre est nulle et donc on a :

$$dU_t = 0$$

D'autre part, nous pouvons définir l'angle θ entre \vec{M} et \vec{B} . Cet angle est défini selon le vecteur \vec{u} perpendiculaire à \vec{M} et \vec{B} c'est à dire selon $\vec{\Gamma}$. La contribution rotationnelle de l'énergie potentielle

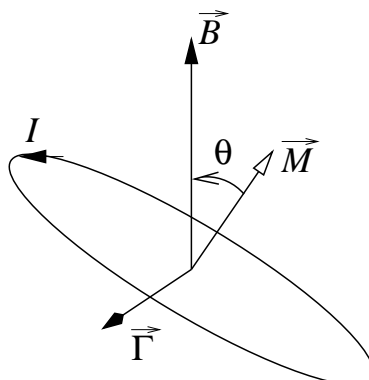


Figure 4.5: .

d'un système effectuant une rotation de $d\theta$ autour de axe \vec{u} sous l'action du couple $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}$ est :

$$dU_r = \Gamma \vec{u} \cdot d\theta \vec{u} = \Gamma d\theta$$

. Le module du couple peut être écrit :

$$\Gamma = M B \sin \theta$$

et on a :

$$dU_r = M B \sin \theta d\theta$$

ce qui donne :

$$U_r = -M B \cos \theta$$

D'après la définition du produit vectoriel, on peut écrire :

Energie d'interaction d'un circuit avec un champ magnétique :

Propriété 33 :

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

La trajectoire d'un circuit magnétique dans un champ magnétique constant peut facilement être déduit de la relation au dessus si le système est isolé. Dans ce cas, on a :

$$U = \text{cste}$$

ce qui entraîne que le produit scalaire $\vec{M} \cdot \vec{B} = M B \cos \theta$, où θ est l'angle entre les deux vecteurs, est constant. Comme chacun des deux vecteurs a une norme constante et que \vec{B} est fixe, on a donc $\theta = \text{cste}'$

4.5 Potentiel magnétique créé par un moment.

Calculons maintenant le potentiel magnétique créé en un point M par un circuit \mathcal{C} :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{l}}{PM}$$

où P est un point du circuit et on a :

$$d\vec{l} = \overrightarrow{OP}$$

et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} &\implies PM^2 = \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM} \\ &= (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}) \\ &= OM^2 + OP^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} \\ &= r^2 + r_p^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} \quad \text{si } r \gg r_p, \text{ on a} \\ &= r^2 \left(1 - \frac{2}{r^2} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{r_p^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

En utilisant le développement limité $(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon$, avec $\epsilon = -\frac{2}{r^2} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}$ et $n = -1/2$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{PM} &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} \right) \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{OP}}{r^2} \quad \text{avec } \vec{u} = \overrightarrow{OM}/OM \end{aligned}$$

L'intégrale apparaissant dans la formule du potentiel magnétique est donc :

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{l}}{PM} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\overrightarrow{OP}}{r} + \oint_{\mathcal{C}} \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{OP}}{r^2} d\overrightarrow{OP}$$

Comme $r = OM$ est indépendant de \vec{OP} , on peut le sortir de l'intégrale qui vaut alors $\oint d\vec{OP} = 0$. La seconde intégrale peut être écrite en utilisant le développement :

$$\begin{aligned}\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \\ \Rightarrow (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} &= \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) + (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}\end{aligned}$$

soit en posant : $\vec{A} = \vec{u}$, $\vec{B} = d\vec{OP}$ et $\vec{C} = \vec{OP}$, on a :

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{d\vec{l}}{PM} &= \frac{1}{r^2} \left(\oint_C \vec{OP} d\vec{OP} \right) \vec{u} + \frac{1}{r^2} \vec{u} \wedge \oint_C d\vec{OP} \wedge \vec{OP} \\ &= \frac{1}{r^2} \oint_C d\frac{OP^2}{2} + \frac{1}{r^2} \left(\oint_C \vec{OP} \wedge d\vec{OP} \right) \wedge \vec{u} \\ &= 0 + \frac{1}{r^2} \left(\oint_C \vec{OP} \wedge d\vec{OP} \right) \wedge \vec{u}\end{aligned}$$

et donc le potentiel magnétique est :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^2} \left(\oint_C \vec{OP} \wedge d\vec{OP} \right) \wedge \vec{u}$$

d'où en utilisant la définition du moment magnétique :

Potentiel magnétique créé par un moment \vec{M} :



Propriété 34 :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Il faut noter la simplicité de ce résultats comparée au calcul intégral qui pourrait être beaucoup plus lourd.

4.6 Champ magnétique créé par un moment.

4.6.1 Champ magnétique créé par une boucle de courant.

Considérons une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I . Le champ magnétique en un point M quelconque de l'espace est donné par la loi de Biot et Savart en intégrant sur tous les points P du circuit :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

L'origine du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est au centre de la spire. L'axe Oz est selon l'axe de la spire. Les axes Ox et Oy sont selon deux diamètres perpendiculaires et ils sont choisis de sorte à ce que la coordonnée de M selon Ox soit nulle.

Nous allons d'abord calculer \vec{PM} puis en déduire PM^{-3} et enfin la quantité $d\vec{l} \wedge \vec{PM}$ puis intégrer la loi de Biot et Savart. La variable d'intégration sera ϕ et on doit donc écrire une intégrale où apparaîtra $d\phi$.

Avec les notations de la figure 4.6.1

$$\vec{OM} = \rho \vec{j} + Z \vec{k} \quad \text{avec} \quad \rho = r \sin \theta \quad \text{et} \quad Z = r \cos \theta$$

$$\vec{OP} = R \cos \phi \vec{i} + R \sin \phi \vec{j}$$

Le vecteur \vec{PM} est donc :

$$\vec{PM} = -R \cos \phi \vec{i} + (\rho - R \sin \phi) \vec{j} + Z \vec{k}$$

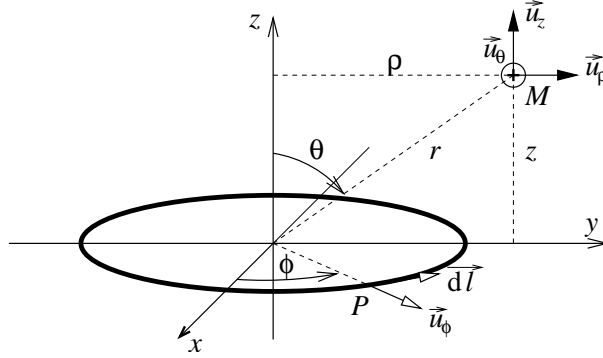


Figure 4.6: Spire de courant.

Calculons $d\vec{l}$ qui est orienté dans le sens du courant I :

$$\begin{aligned} d\vec{l} &= d\vec{OP} \\ &= -R \sin \phi \, d\phi \, \vec{i} + R \cos \phi \, d\phi \, \vec{j} \end{aligned}$$

On exprime, maintenant, le produit vectoriel apparaissant dans la loi de Biot et Savart :

$$\begin{aligned} d\vec{l} \wedge \vec{PM} &= \begin{pmatrix} -R \sin \phi \, d\phi \\ R \cos \phi \, d\phi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \rho - R \cos \phi \\ -R \sin \phi \\ Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} RZ \cos \phi \, d\phi \\ RZ \sin \phi \, d\phi \\ (R^2 - R\rho \cos \phi) \, d\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le carré scalaire de \vec{PM} est :

$$\begin{aligned} PM^2 &= \vec{PM} \cdot \vec{PM} \\ &= R^2 + \rho^2 - 2R\rho \sin \phi + Z^2 \\ &= r^2 - 2rR \sin \phi \sin \theta + R^2 \\ &= r^2 \left(1 - 2\frac{R}{r} \sin \phi \sin \theta + \frac{R^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Nous allons nous placer dans le cas où M est loin de la spire, c'est à dire

$$r \gg R$$

Le terme r^2/R^2 , très petit, est négligé. On peut récrire :

$$PM^2 = r^2(1 + \varepsilon) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = -\frac{2R}{r} \sin \phi \sin \theta \ll 1$$

En utilisant le développement limité $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$,

$$PM^{-3} = (PM^2)^{3/2} = r^{-3} \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon \right) = \frac{1}{r^3} \left(1 + 3\frac{R}{r} \sin \theta \sin \phi \right)$$

Finalement, la quantité à intégrer dans de la loi de Biot et Savart s'écrit :

$$\frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^3} \left(1 + 3\frac{R}{r} \sin \phi \sin \theta \right) RZ \cos \phi \, d\phi \\ \frac{1}{r^3} \left(1 + 3\frac{R}{r} \sin \phi \sin \theta \right) RZ \sin \phi \, d\phi \\ \frac{1}{r^3} \left(1 + 3\frac{R}{r} \sin \phi \sin \theta \right) (R^2 - R\rho \cos \phi) \, d\phi \end{pmatrix}$$

Le souvenir de quelques formules élémentaires de trigonométrie ¹ permet d'intégrer facilement les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi &= \int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\phi = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin 2\phi \, d\phi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi &= \pi \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi &= \pi \end{aligned}$$

et donc d'obtenir

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} 0 \\ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(3\pi \frac{R^2}{r^4} Z \sin \theta \right) \\ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(2\pi \frac{R^2}{r^3} - 6\pi \frac{R^2}{r^4} \rho \sin \theta \right) \end{cases} \quad \text{dans la base } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

Nous pouvons récrire ce résultat en remplaçant $\sin \theta = \rho/r$:

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} B_\rho = 3 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \pi R^2 \frac{\rho Z}{r^5} \\ B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \pi R^2 \frac{1}{r^3} \left[2 - 3 \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \right] \\ 0 \end{cases} \quad \text{dans la base } (\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$$

On obtient les coordonnées sphériques de \vec{B} en utilisant le changement de variables :

$$\begin{cases} B_r = B_\rho \sin \theta + B_z \cos \theta \\ B_\theta = B_\rho \cos \theta - B_z \sin \theta \end{cases}$$

ce qui donne finalement

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho^3} \pi R^2 \cos \theta \\ \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho^3} \pi R^2 \sin \theta \\ 0 \end{cases} \quad \text{dans la base } (\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$$

On constate dans ce résultat que le champ magnétique peut être écrit comme le produit d'une fonction des sources (dans laquelle apparaît I et R) et d'une fonction de la position où on calcule le champ magnétique.

Concernant la fonction des sources du champ magnétique, nous pouvons introduire la définition suivante :



Définition 9 : Moment magnétique de la boucle de courant: $M = IS$

Ici $S = \pi R^2$. Cette quantité ne dépend que des caractéristiques de la source de champ magnétique. Il a les propriétés suivantes :



Propriété 35 : Le moment magnétique d'une boucle de courant caractérise complètement la source du champ.

On peut énoncer la propriété suivante en examinant le résultat du calcul au dessus :



Propriété 36 : Le champ magnétique créé par une boucle est proportionnel à son moment magnétique

¹ $\sin 2\phi = 2 \sin \phi \cos \phi$
 $\cos 2\phi = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi = 2 \cos^2 \phi - 1 = 1 - 2 \sin^2 \phi$

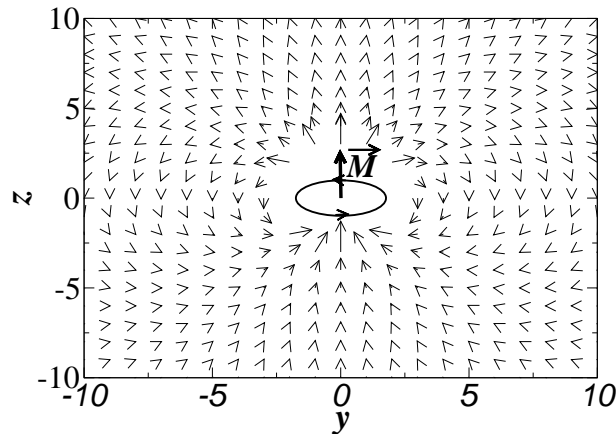


Figure 4.7:

4.7 Moment magnétique atomique dans le modèle de Bohr.

En 1911, à la suite d'expérience au court desquelles, il bombardait une plaque de mica avec des particules α , Rutherford a suggéré son modèle atomique dans lequel un atome peut être vu comme un cortège d'électrons gravitant autour du noyau. Dans un mouvement à force centrale, on toujours :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{u}_r$$

et donc le principe fondamental de la dynamique dans lequel la force exercée par le proton sur l'électron est simplement de nature électrostatique :

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Ce modèle souffre du fait qu'en électromagnétisme, une charge accélérée rayonne et donc perd de l'énergie et devrait s'écraser sur le noyau.

En 1913, Bohr suggère d'ajouter deux contraintes au modèle de Rutherford. L'une d'elle est que l'électron ne rayonne pas et qu'il est sur une orbite stable. Il ajoute que le moment cinétique de l'électron, $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$, est quantifié est vaut un nombre entier fois la constante de Planck $n\hbar$. Comme $\vec{r} \perp \vec{p}$ et $p = mv$, on a donc

$$mvr = n\hbar$$

Les deux équations au dessus mènent à écrire le rayon de l'orbite associé au nombre n :

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 n^2 \frac{\hbar^2}{me^2}$$

Considérons l'un de ces électrons qui tourne autour du noyau sur une orbite à une distance a_0 avec une vitesse \vec{v} et une pulsation ω . On a donc la relation $v = \omega a_0$.

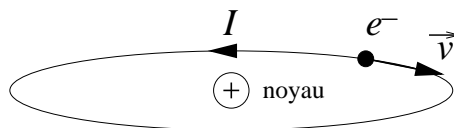


Figure 4.8: .

L'électron repasse par le même point P de sa trajectoire un nombre de fois gigantesque par seconde qui vaut :

$$n_{\text{tours/sec}} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Le cercle décrivant la trajectoire de l'électron peut être vu comme une boucle parcouru par un courant I créé par le passage incessant de l'électron en n'importe quel point du circuit. L'intensité de ce courant est par définition la quantité de charge électrique qui passe en n'importe quel point P du circuit par seconde, c'est à dire :

$$I = \frac{\delta q}{\delta t} = -n_{\text{tours/sec}} \cdot |e|$$

ou bien

$$I = -|e| \frac{\omega}{2\pi} = -|e| \frac{v}{2\pi r_n}$$

La surface de la boucle de courant est $S = \pi r_n^2$ et donc le moment magnétique associé à cet électron est :

$$\vec{M} = -\frac{evr_n}{2} \vec{u} = -\frac{e\omega a_0^2}{2} \vec{u}$$

Finalement, en se souvenant que $v_n r_n = n \frac{\hbar}{m}$, on obtient :

$$\vec{M} = n\mu_B \vec{u} \quad \text{avec} \quad \mu_B = -\frac{e\hbar}{2m}$$

où μ_B est le magnéton de Bohr.

En résumé



- Le moment magnétique d'une distribution de courant est : $\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint \vec{OP} \wedge \vec{j}(P) \, d\tau$



- Il vaut toujours : $\vec{M} = I \iint_{\Sigma(c)} d\vec{S}$



- Le couple ressenti par un circuit de moment \vec{M} dans un champ \vec{B} est $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$



- L'énergie d'interaction d'un circuit de moment \vec{M} avec un champ \vec{B} est $U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$



- Le potentiel magnétique créé par un moment \vec{M} en un point M est $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{u}}{r^2}$



- Le champ magnétique créé par un moment \vec{M} en un point M est $\vec{B}(M) =$

QCM. 40 : Quelle est la définition du moment magnétique ?

1: $\vec{M} = \iiint \vec{j}(P) \, d\tau$

2: $\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint \vec{OP} \wedge \vec{j}(P) \, d\tau$

3: $\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint \vec{j}(P) \, d\tau$

QCM. 48 : Quel est le potentiel magnétique créé par un moment \vec{M}

1: 0

2: $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{u}}{r^2}$

3: $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{M}}{r^2}$

QCM. 41 : Quelle propriété à le moment magnétique d'une boucle de courant ?

1: $\vec{M} = \iint_{\Sigma(C)} \vec{j} \, d\vec{S}$

2: $\vec{M} = |e| \iint_{\Sigma(C)} d\vec{S}$

3: $\vec{M} = I \iint_{\Sigma(C)} d\vec{S}$

QCM. 42 : Quelle est la force ressentie par une boucle de courant dans un champ magnétique

1: 0

2: $|e| \vec{M}$

3: $\vec{M} \wedge \vec{B}$

QCM. 43 : Quel est le moment magnétique d'une spire de rayon a parcourue par un courant I

1: $\pi a^2 I$

2: $2\pi a I$

3: $4\pi a^2 I$

QCM. 44 : Quel est le couple ressenti par une boucle de courant dans un champ magnétique

1: 0

2: $\vec{B} \, d\vec{S}$

3: $\vec{M} \wedge \vec{B}$

QCM. 45 : Un moment magnétique décrit complètement :

1: l'interaction magnétique entre deux fils

2: un circuit parcouru par un courant

3: l'interaction entre deux circuits parcourus par des courants

QCM. 46 : Quel est l'énergie d'interaction entre une boucle de courant et un champ magnétique

1: 0

2: $\vec{M} \cdot \vec{B}$

3: $-\vec{M} \cdot \vec{B}$

QCM. 47 : Le champ magnétique créé par une boucle de courant est :

1: inversement proportionnel à son moment magnétique

2: proportionnel au carré de son moment magnétique

3: proportionnel à son moment magnétique

Chapitre 5

Influence magnétique

5.1 L'expérience de Faraday.

5.1.1 Circuits fixes.

En 1831, Mickael Faraday a réalisé les expériences suivantes qui furent la base de l'électromagnétisme. Il a enroulé un fil électrique de résistance R autour d'un cylindre en bois. Il a fait plusieurs tours et a relié ce fil à un générateur de courant de tension U et à un interrupteur. Cet ensemble sera appelé le circuit C_1 . Il a ensuite enroulé un second fil sur le même cylindre en bois et il l'a relié simplement à un ampèremètre. C'est le circuit C_2 . Il faut noter ici que le cylindre en bois ne joue aucun role dans les phénomènes électrique et magnétique. Il ne sert qu'à s'assurer que les deux enroulements sont bien coaxiaux. D'autre part, il faut aussi remarquer qu'il n'y a pas de générateur dans le circuit C_2 .

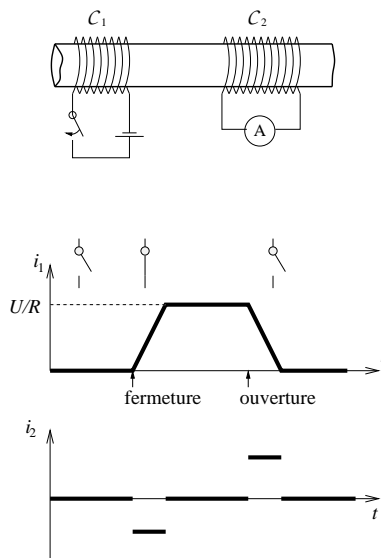


Figure 5.1: Expérience de Faraday.

Lorsque l'interrupteur est ouvert, l'intensité du courant dans le circuit C_1 est nulle. Lorsque

l'interrupteur est fermé, l'intensité du courant dans le circuit \mathcal{C}_1 est égale à U/R après que le circuit ait relaxé. Entre le moment de la fermeture de l'interrupteur et l'équilibre électrocinétique du circuit, l'intensité passe de façon continue de 0 à U/R . De même, lors de l'ouverture de l'interrupteur, l'intensité dans le circuit \mathcal{C}_1 passe de façon continue de U/R à 0 puis s'équilibre à 0.

Faraday a alors constaté la chose suivante. Lorsque le courant est constant dans le circuit \mathcal{C}_1 , c'est à dire lorsqu'il vaut 0 ou U/R , l'intensité dans le circuit \mathcal{C}_2 est nulle. En revanche, pendant les périodes de relaxation où l'intensité dans le circuit \mathcal{C}_1 varie, il apparaît une intensité non nulle dans le circuit \mathcal{C}_2 . Si cette intensité est positive lors de la fermeture de l'interrupteur, elle est alors négative lors de l'ouverture.

5.1.2 Circuits mobiles.

Faraday fit la deuxième expérience suivante. Il ferma l'interrupteur du circuit \mathcal{C}_1 et laissa le courant s'installer. Dès que le courant fut installé, l'intensité dans le circuit \mathcal{C}_2 est nul. Il fit alors bouger le circuit \mathcal{C}_2 le long du guide en bois.

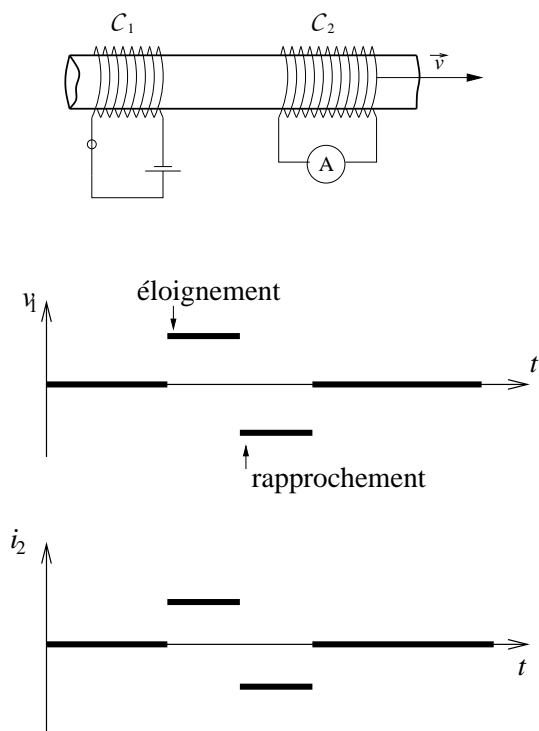


Figure 5.2: Expérience de Faraday.

Il vit apparaître une intensité positive dans le second circuit lorsque celui-ci s'éloigne du circuit \mathcal{C}_1 et une intensité négative lorsque les deux circuits se rapprochent. D'autre part, il a constaté que plus la vitesse avec laquelle le circuit \mathcal{C}_2 bougeait était grande, plus la valeur absolue de l'intensité était grande.

5.1.3 Circuits constitués de différents matériaux.

Lors d'une troisième expérience, il modifia la nature du circuit \mathcal{C}_2 . Lorsque le circuit \mathcal{C}_2 est constitué d'un matériau de résistance R_2 , l'intensité lue sur l'ampèremètre est i_2 . Lorsqu'il est constitué d'un matériau de résistance R'_2 , la même expérience donne une intensité i'_2 différente de i_2 . Faraday a constaté qu'on a toujours :

$$i'_2 = i_2 \frac{R_2}{R'_2}$$

5.1.4 Force électromotrice induite

L'apparition d'un courant dans les circuits utilisés dans les expériences décrite au dessus fait penser qu'il y a eu création d'une différence de potentiel (ce qui est équivalent à un champ) qui a mis les électrons en mouvement sous l'effet de la force de Coulomb. Ceci est confirmé par la dernière expérience où on constate qu'on a :


$$R_2 i_2 = R'_2 i'_2$$

Faraday a noté e cette différence de potentiel et il a appelé cette différence de potentiel, la force électromotrice induite (f.e.m.).

Les deux premières expériences suggèrent que cette différence de potentiel apparaît dans le circuit lorsqu'il y a une *variation* du flux du champ magnétique à travers le circuit où s'installe le courant. La f.e.m. s'exprime donc comme une dérivée temporelle d'une certaine quantité qu'il faut déterminer. Comme cette f.e.m. apparaît dans le circuit 2, lorsqu'on fait varier le champ magnétique dans le circuit 1, il semble bien qu'elle soit reliée à une variation du flux du champ magnétique créé par le circuit 1 à travers le circuit 2, $\Phi_{1 \rightarrow 2}$.

Enfin en étudiant le sens du courant dans le circuit 2, lors de l'établissement du champ magnétique dans le circuit 1, on trouve le signe entre la variation de flux et la f.e.m.

On a alors :

 **Définition 10** : f.e.m. :
$$e = - \frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt}$$

5.2 Induction mutuelle.

5.2.1 Phénomène d'induction entre deux circuits.

Considérons un circuit électrique \mathcal{C}_1 parcouru par un courant i_1 . Ce courant crée un champ magnétique, $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$, en tout point P de l'espace repéré par \vec{r}_P .

Le relation de Biot et Savart montre que

$$\vec{B}_1(\vec{r}_P) = i_1 \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{|\vec{r}_M - \vec{r}_P|^2}$$

où le résultat de l'intégrale ne dépend que de la forme du circuit \mathcal{C}_1 et de la position relative du circuit \mathcal{C}_1 et du point P . Le champ magnétique est donc simplement proportionnel à l'intensité i_1 .

Considérons maintenant un second circuit fermé \mathcal{C}_2 . Le flux du champ magnétique créé par le circuit \mathcal{C}_1 à travers le circuit \mathcal{C}_2 est :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

$$e_2 = - \frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt}$$

Si les circuits \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont rigides et fixes alors la dérivée par rapport au temps de l'équation ci dessus ne s'applique qu'à i_1 et on peut écrire :

$$e_2 \propto - \frac{di_1}{dt}$$

Le coefficient d'induction mutuelle, M_{12} , entre deux circuits est tel que

 **Définition 11** :
$$e_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

où i_1 est l'intensité du courant dans le circuit \mathcal{C}_1 et e_2 la f.e.m. dans le circuit \mathcal{C}_2 .

5.2.2 Coefficient d'induction mutuelle.

En utilisant le théorème de Stokes, nous pouvons écrire le flux de champ magnétique créé par \mathcal{C}_1 à travers \mathcal{C}_2 , comme :

$$\begin{aligned}\Phi_{1 \rightarrow 2} &= \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{\text{rot}} \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_2 \\ &= \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2\end{aligned}$$

En reprenant la formule générale du potentiel magnétique

$$\vec{A}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{d\vec{l}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

on a

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

d'où, la f.e.m. dans le circuit \mathcal{C}_2 :

$$e_2 = \left[-\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right] \frac{di_1}{dt}$$

Dans la formule du coefficient d'induction :

Formule de von Neumann :

 **Propriété 37** :

$$M_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Le coefficient d'induction

 **Propriété 38** :

- ne dépend que de leur géométries et position respective.
- peut être positif ou négatif selon l'orientation des circuits.
- se mesure en Henry (H)

La relation démontrée au dessus utilise une approximation valable pour les circuit filiforme.

5.2.3 Symétrie des coefficients.

Calculons maintenant le coefficient d'induction mutuelle M_{21} du circuit \mathcal{C}_2 sur le circuit \mathcal{C}_1 . Pour cela, nous supposons qu'un courant i_2 circule dans \mathcal{C}_2 , créé un champ magnétique $B_2(\vec{r}_1)$ et un potentiel magnétique $\vec{A}_2(\vec{r}_1)$ en tout \vec{r}_1 du circuit \mathcal{C}_1 . Le flux de champ magnétique à travers \mathcal{C}_1 est :

$$\begin{aligned}\Phi_{2 \rightarrow 1} &= \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 \\ &= \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l}_1 \\ &= \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}\end{aligned}$$

d'où, la f.e.m. dans le circuit \mathcal{C}_1 :

$$e_1 = \left[-\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right] \frac{di_2}{dt}$$

Par définition le coefficient d'induction, M_{21} étant donné par :

$$e_1 = -M_{21} \frac{di_2}{dt}$$

on a :

$$M_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Ce résultat est le même que celui obtenu pour M_{21} .



Propriété 39 : Le coefficient d'induction d'un circuit \mathcal{C}_1 sur un circuit \mathcal{C}_2 est le même que celui du circuit \mathcal{C}_2 sur le circuit \mathcal{C}_1 . On l'appelle coefficient d'induction mutuelle : $M = M_{12} = M_{21}$

5.2.4 Coefficient d'induction entre deux spires.

On considère deux spires \mathcal{C}_1 de rayon a_1 et \mathcal{C}_2 de rayon a_2 . Les deux spires sont parallèles et leurs axes sont confondus. La spire \mathcal{C}_1 est parcourue par un courant i_1 . Le champ magnétique créé par

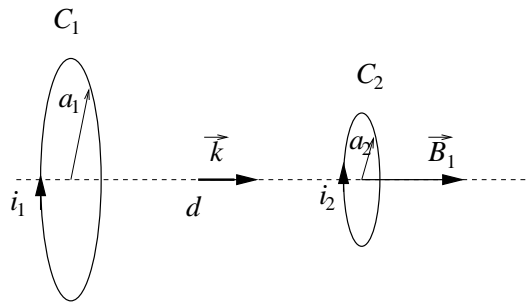


Figure 5.3: Deux spires en influences mutuelles.

la spire \mathcal{C}_1 en un point P de son axe, repéré par \vec{r}_2 , est ¹ :

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 a_1^2 i_1}{2r^3} \vec{k}$$

où \vec{k} est un vecteur unitaire perpendiculaire à la spire. Si les deux spires sont suffisamment éloignées $d > a_1$ et $d > a_2$, on considère que le champ magnétique qui traverse la spire \mathcal{C}_2 est homogène et vaut :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 a_1^2 i_1}{2d^3} \vec{k}$$

et son flux à travers la spire est donc simplement :

$$\begin{aligned} \Phi_{1 \rightarrow 2} &= \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \\ &= \iint_{\mathcal{S}_2} B_1 \, dS_2 \\ &= B_1 \iint_{\mathcal{S}_2} dS_2 \\ &= \frac{\mu_0 \pi a_1^2 a_2^2 i_1}{2d^3} \end{aligned}$$

Le coefficient d'inductance mutuelle de ces deux bobines est donc :

$$M = -\frac{\mu_0 \pi a_1^2 a_2^2}{2d^3}$$

Ce résultat est valable pour deux spires parallèles et d'axes confondus. On voit bien qu'il ne dépend que de la géométrie de la spire 1 (par a_1) et de la spire 2 (par a_2) et de leur position relative (par d).

¹On pose $\theta = 0$ dans les résultats obtenus dans les chapitres précédents. De plus on pose ici $\vec{k} \equiv \vec{u}_r$,

Si i_1 est variable, on a alors apparition d'une f.e.m. dans \mathcal{S}_2

$$e_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$

Si on note R_2 la résistance du fil du circuit \mathcal{S}_2 , on a

$$i_2 = -\frac{M}{R} \frac{di_1}{dt}$$

On a bien un courant dans le fil \mathcal{S}_2 sans générateur dans le circuit.

Si on fait bouger la spire 2 autour de la spire 1, le flux de champ magnétique à travers la spire 2 varie. Cependant on ne peut plus calculer le coefficient d'induction mutuelle de ce système puisque celui ne serait plus constant et dépendrait du temps.

5.3 Auto-induction

Si on considère un circuit parcouru par un courant $i(t)$ variable avec le temps. Ce courant crée un champ magnétique variable en tout point de l'espace. Le flux de champ magnétique, créé par le circuit, à travers le circuit lui-même est donc aussi variable. On a alors apparition d'une f.e.m. dans le circuit.



Définition 12 : le phénomène d'**auto-induction** dans un circuit est le résultat de la variation de flux magnétique à travers le circuit lui-même.

5.3.1 Coefficient d'auto-induction

Comme d'après la loi de Biot et Savart, le champ magnétique est proportionnel au courant I qui circule dans le circuit, alors si celui-ci est indéformable, le flux de champ magnétique est aussi proportionnel à I . Finalement, il existe donc une relation de proportionnalité entre la f.e.m. et le courant qui circule dans le circuit :



Définition 13 : Le **coefficient d'auto-induction**, L , d'un circuit est défini comme $\Phi(\vec{B}) = L I$

Le coefficient d'auto-induction d'un circuit :



Propriété 40 :

- ne dépend que de la géométrie du circuit.
- toujours positif
- s'exprime en Henry (H).

5.3.2 Auto-induction et loi de Lenz.

Considérons un instant t pendant lequel l'intensité du courant augmente : $\frac{di}{dt} > 0$. On a alors la f.e.m. induite dans le circuit, $e = -L \frac{di}{dt} < 0$, ce qui donne une intensité induite, $\Delta i = \frac{e}{R} < 0$.

Donc, que l'intensité $i(t)$ soit positive ou négative, si le générateur de courant tend à la faire augmenter, alors l'auto-induction tend à la faire diminuer.



Propriété 41 : Le courant d'auto-induction s'oppose à sa cause. Il vérifie la loi de Lenz.

5.3.3 Coefficient d'auto-induction d'une bobine.

Considérons un solénoïde constitué de N spires de rayon a et de longueur l . Notons $n = N/L$, le nombre de spires par unités de longueur. Si le solénoïde est considéré comme parfait, le champ magnétique est constant et vaut :

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{k}$$

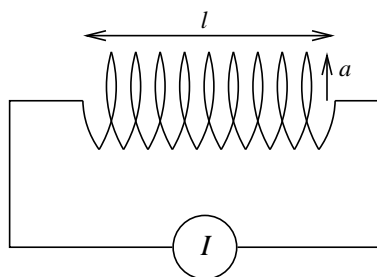


Figure 5.4:

où \vec{k} est un vecteur unitaire selon l'axe du solénoïde. Le flux du champ magnétique à travers une spire est :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{sp}}(\vec{B}) &= \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{\text{spire}} B \cdot dS \quad \text{car } d\vec{S} = dS \cdot \vec{k} \\ &= B \iint_{\text{spire}} dS \\ &= \mu_0 n I \pi a^2\end{aligned}$$

Le flux de champ magnétique à travers le solénoïde tout entier est :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{sol}} &= N \Phi_{\text{sp}}(\vec{B}) \\ &= \mu_0 \pi n^2 a^2 l I\end{aligned}$$

Le coefficient d'induction d'un solénoïde est donc :

$$L = \mu_0 \pi n^2 a^2 l$$

On peut l'écrire aussi en introduisant la longueur du fil du solénoïde : $\mathcal{L} = 2\pi a n l$:

$$L = \frac{\mu_0 \mathcal{L}}{4\pi l}$$

Le coefficient d'auto-induction d'un solénoïde est proportionnel



Propriété 42 :

- à longueur
- au rayon
- au carré du nombre de spires par unités de longueur.

Une bobine classique de salle de TP mesure environ $l = 10$ cm, $a = 5$ cm et est constituée de 500 tours de fil. Son coefficient d'auto-induction est donc de : $L = 0.2$ mH.

5.3.4 Circuit RL .

Considérons un circuit constitué d'une résistance R et d'une bobine de coefficient d'auto-induction L . Il est alimenté par un générateur continu de tension (différence de potentiel) U . On ferme l'interrupteur. A ce moment une variation d'intensité est ressentie dans le circuit. On a donc :

$$U + e = Ri(t)$$

avec

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

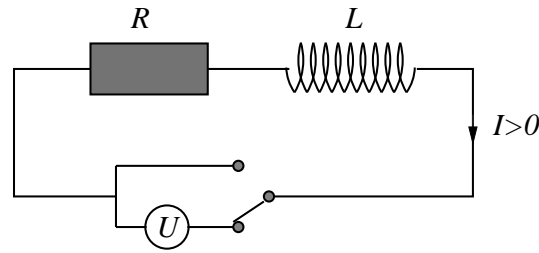


Figure 5.5:

L'intensité dans le circuit répond alors à l'équation différentielle suivante :

$$U = Ri + L \frac{di}{dt}$$

qu'on résout simplement ²

$$i(t) = \frac{U}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right]$$

Quand on ouvre l'interrupteur, on a alors $U = 0$ et l'intensité varie rapidement dans le circuit. On a :

$$0 = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Ce qui donne :

$$i(t) = \frac{U}{R} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

Ces deux résultats montrent qu'on ne peut ni établir ni arrêter brutalement un courant dans un circuit inductif.

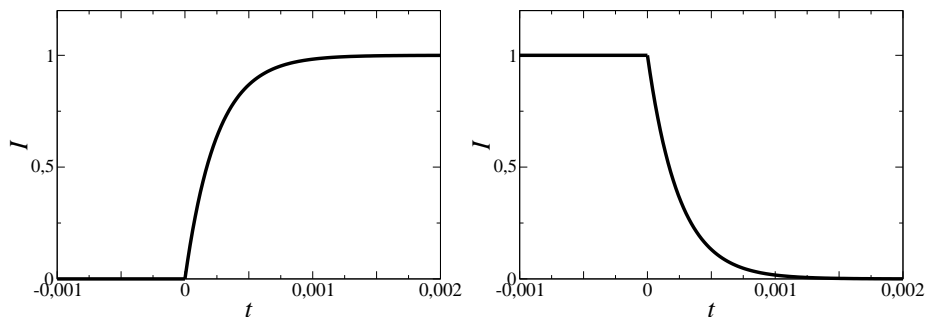


Figure 5.6: Intensité en fonction du temps dans un circuit inductif.

Étudions maintenant ce qu'il se passe s'il n'y a pas la branche de délestage en considérant le montage en dessous. Lorsque l'interrupteur est fermé et que le système est relaxé, une intensité $i = U/R$ circule dans le circuit. Lorsque l'interrupteur est ouvert, nous venons de voir que l'intensité ne chute pas brutalement à zéro mais décroît exponentiellement. Il y a donc un courant qui *circule* avec l'interrupteur ouvert. Donc une quantité de charges négatives $-Q$ s'accumulent sur une partie de l'interrupteur et des charges positives $+Q$ (en fait un déficit de charges négatives) sur l'autre.

²Sans second membre, on a $Ri + L \frac{di}{dt} = 0$, ce qui donne $i(t) = K \exp(-Rt/L)$ puis on ajoute la solution particulière pour obtenir le résultat.

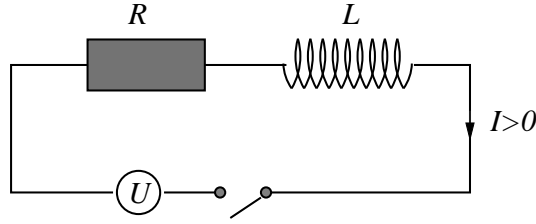


Figure 5.7:

L'interrupteur est devenu un condensateur chargé. Ses petites dimensions font que sa capacité C_s est très petite. On a :

$$U = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C}$$

D'autre part, on peut écrire :

$$i = \frac{dQ}{dt} = C_s \frac{dV}{dt}$$

avec $V = U_B - U_C$. D'où :

$$LC_s \frac{d^2V}{dt^2} + RC_s \frac{dV}{dt} + V = U$$

qui est l'équation différentielle du système électromagnétique. La résolution passe par le calcul du discriminant :

$$\Delta = R^2 C_s^2 - 4LC = C_s^2 \left(R^2 - 4 \frac{L}{C_s} \right)$$

Ici, on a : $\Delta < 0$, car C_s est très petit.

La solution de l'équation caractéristique est :

$$x_{+/-} = -a \pm ib \quad \text{avec} \quad a = \frac{R}{2L} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C_s}}{2L}$$

La solution de l'équation différentielle est donc :

$$V(t) = U \left[1 - \left(\cos \omega t + \frac{R}{2L\omega} \sin \omega t \right) \exp \left(-\frac{R}{2L} t \right) \right] \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C_s}}{2L}$$

Le premier maximum de cette fonction en valeur absolue est (environ) obtenu pour $\sin \omega t = 1$ ce qui correspond à $t = \frac{\pi}{2\omega}$. Il vaut

$$V\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) \approx UU$$

La tension aux bornes de l'interrupteur est momentanément le double de celle du générateur. On peut

5.4 Couplage de systèmes inductifs.

5.4.1 Coefficient de couplage.

On considère deux circuits \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 parcourus par des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$. On a :

$$\begin{cases} \Phi_{11} = L_1 i_1 \\ \Phi_{21} = M i_2 \\ \Phi_{22} = L_2 i_2 \\ \Phi_{12} = M i_1 \end{cases}$$

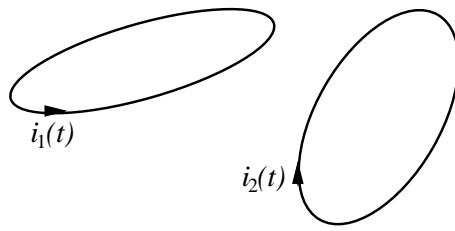


Figure 5.8:

On peut écrire

$$\Phi_{12} = \frac{M}{L_1} \Phi_{11} = k_1 \Phi_{11}$$

$$\Phi_{21} = \frac{M}{L_2} \Phi_{22} = k_2 \Phi_{22}$$

Ce qui permet d'écrire la relation de couplage, en introduisant le coefficient de couplage :

Définition 14 : Le **coefficient de couplage**, K , est tel que $M^2 = K L_1 L_2$ avec $K = k_1 k_2$

Propriété 43 :
 • si $K = 0$, alors les circuits sont isolés magnétiquement ($M = 0$).
 • si $K = 1$, alors les circuits s'influencent au maximum ($M^2 = L_1 L_2$).

Propriété 44 : Dans le cas où on a $K = 1$, toutes les lignes de champ du circuit \mathcal{C}_1 traversent le circuit \mathcal{C}_2 et réciproquement.

5.4.2 Inductance équivalente.

Considérons deux bobines \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 parcourus par des courants i_1 et i_2 . On a les flux de champ magnétiques à travers les bobines :

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12} = L_2 i_2 + M i_1$$

Connectons maintenant les deux bobines comme sur la figure 1. L'intensité du courant qui

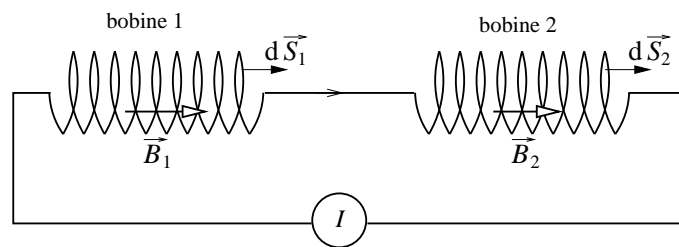


Figure 5.9:

traverse les deux solénoïdes est la même :

$$I = i_1 = i_2$$

Le courant circule dans le même sens dans les deux solénoïdes. Les deux champs magnétiques sont donc colinéaires. De plus, le vecteur $d\vec{S}$ est perpendiculaire à une spire et dans le sens tel qu'on *voit* en suivant I (c'est le même que \vec{B}).

On a donc :

$$\Phi_{12} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \iint B_1 \cdot dS_2 = MI$$

avec

$$M > 0$$

Considérons maintenant le circuit constitué des deux solénoïdes. Le circuit résultant a pour flux :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = LI$$

et L est l'inductance équivalente des deux circuits.

On a

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{21} = L_1 I + MI \\ \Phi_2 &= \Phi_{22} + \Phi_{12} = L_2 I + MI \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\Phi = 2MI + (L_1 + L_2)I$$

d'où l'inductance équivalente :

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

Connectons maintenant les bobines comme sur la figure 2. Maintenant le courant ne circule

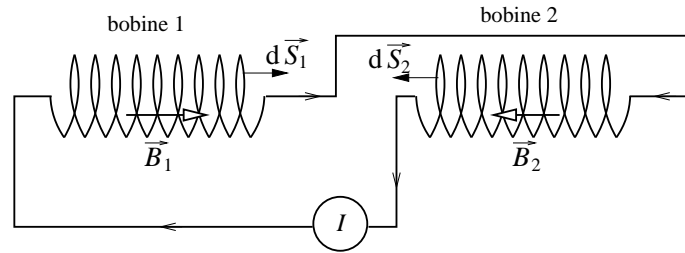


Figure 5.10:

plus dans le même sens dans les deux bobines. Les vecteurs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 sont donc opposés de même pour $d\vec{S}_1$ et $d\vec{S}_2$. On a donc :

$$\Phi_{12} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = - \iint B_1 \cdot dS_2 = -MI$$

avec

$$M < 0$$

Le circuit résultant a pour flux :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = LI$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{21} = L_1 I - |M|I \\ \Phi_2 &= \Phi_{22} + \Phi_{12} = L_2 I - |M|I \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\Phi = -2|M|I + (L_1 + L_2)I = LI$$

d'où l'inductance équivalente :

$$L = L_1 + L_2 - 2|M|$$

• si le couplage est lâche ($K = 0$), c'est à dire si les deux bobines sont très éloignées l'une de l'autre, alors on a $M = 0$ et donc

$$L = L_1 + L_2$$

comme pour le cas au dessus.

- si le couplage est serré ($K = 1$), c'est à dire si les deux bobines sont très proches l'une de l'autre, alors on a $M^2 = L_1 L_2$ et donc

$$L = 0$$



Propriété 45 : Deux bobines alignées dans lesquelles circule le même courant mais opposé constitue un circuit résistant sans inductance.

5.5 Application

Les applications d'induction magnétique sont très nombreuses.

5.5.1 Générateur de courant alternatif.



Considérons une spire circulaire mobile autour d'un de ses diamètres, entraînée en rotation autour de ce diamètre par une action extérieure. Cette spire est placée dans un champ magnétique \vec{B}_0 constant, homogène et perpendiculaire à \vec{B}_0 . Plaçons un repère orthonormé de sorte à ce que \vec{B} soit

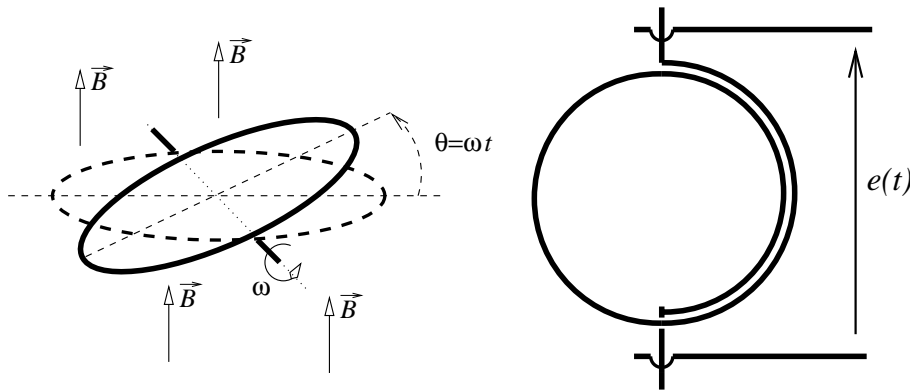


Figure 5.11: Générateur de courant alternatif.

selon Oz , l'axe de rotation de la spire selon Ox . Au temps t , le diamètre de la spire perpendiculaire à Ox fait un angle $\theta = \omega t$ avec Oy . On a donc :

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \Phi_M \cos \omega t \\ &= B_0 S \cos \omega t\end{aligned}$$

Il existe donc dans la spire une f.e.m. qui vaut :

$$e = -B_0 S \omega \cos \omega t$$

qui donne naissance à un courant alternatif de pulsation ω .

5.5.2 Transformateur.



Dans un transformateur, une bobine constituée de N_1 spire est reliée à un générateur de courant alternatif et une autre produit un courant alternatif pour influence magnétique. La première bobine est l'inducteur et la seconde est l'induit. On recherche un couplage magnétique très fort entre les

deux circuits magnétiques. Pour ce faire, on utilise un matériau ferromagnétique (un aimant) qui traverse la bobine de chaque circuit. Ce genre de matériau a la propriété de conduire les lignes de champ magnétique sans pertes. En fait, avec le ferromagnétique, toutes les lignes de champ qui sortent de l'inducteur traversent l'induit. Ce montage permet donc de réaliser le couplage le plus serré possible ($k = 1$). Le coefficient d'auto-induction de l'inducteur est noté L_1 et celui de

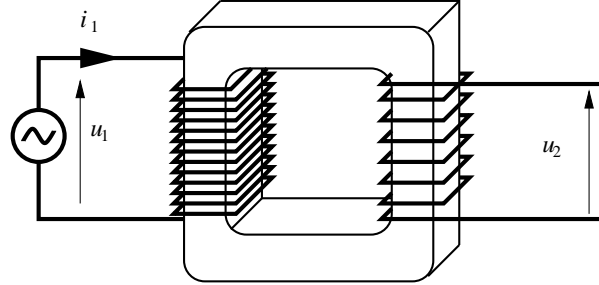


Figure 5.12: Transformateur de courant alternatif.

l'induit L_2 . Le coefficient d'induction mutuelle est M . Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= R_1 i_1(t) + \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2(t) &= R_2 i_2(t) + \frac{d\Phi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

Les fils des bobines sont choisis dans des matériaux très bon conducteur et on a les termes $R_1 i_1$ et $R_2 i_2$ qui sont négligeables. Exprimons, maintenant di_1/dt dans les deux équations :

$$\frac{di_1}{dt} = \begin{cases} \frac{u_1}{L_1} - \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \\ \frac{u_2}{M} - \frac{L_2}{M} \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

En égalisant les deux équations, on peut exprimer u_2 :

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{M^2}{L_1} \frac{di_2}{dt} + \frac{M}{L_1} u_1$$

Comme le couplage est serré, on a $M^2 = L_1 L_2$. Le terme $L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{M^2}{L_1} \frac{di_2}{dt}$ est donc nul et on a :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{M}{L_1}$$

Dans le cas de solénoïdes, on a $L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} \pi R^2$ et $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi R^2$ ce qui donne :

$$\boxed{\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

Cette relation est fondamentale pour l'étude des transformateurs. Elle montre comment augmenter ou diminuer très simplement la tension d'un générateur.

Chapitre 6

L'énergie magnétique.

INTRO

6.1 Energie magnétique d'un circuit.

6.1.1 Coefficient d'auto-induction d'un circuit.

Considérons un circuit électrocinétique, \mathcal{C} , constitué uniquement d'un générateur de courant continu, d'une résistance R et d'un interrupteur K .

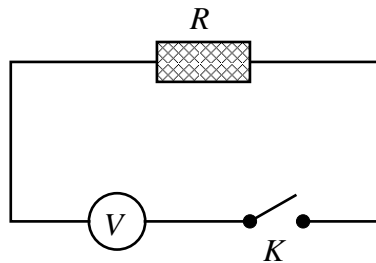


Figure 6.1:

Lorsque l'interrupteur K est fermé, un courant circule dans le circuit. A l'équilibre, l'intensité de ce courant vaut : $I = V/R$. Ce circuit (comme tout circuit) étant fermé, il peut être assimilé à une boucle de courant qui crée un champ magnétique perpendiculaire à la surface de la boucle. Il y a alors un flux de champ magnétique à travers le circuit. Une variation de l'intensité dans le circuit entraîne une variation du flux du champ magnétique qui donne naissance à une f.e.m. :

$$e = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{int}\mathcal{C}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = -L \frac{di}{dt}$$

Ce qui permet, au moins en principe, de définir le coefficient d'auto-induction de ce circuit bien qu'il n'y ait aucune bobine dans sa constitution.

6.1.2 Puissance dissipée par le circuit.

Considérons que l'interrupteur K est ouvert, pour $t < 0$. Il n'y a donc aucun courant qui circule dans le circuit et aucun champ magnétique produit. Cet état est l'état d'énergie de référence du système. On lui affecte une énergie magnétique nulle.

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Le courant s'établit dans le circuit. La tension aux bornes de la résistance est donnée par l'équation :

$$V + e = Ri$$

qui donne l'équation différentielle :

$$V - Ri = L \frac{di}{dt}$$

Cette équation admet comme solution :

$$i(t) = \frac{V}{R} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$

et on a bien $i(t) \rightarrow I$ quand $t \gg 0$.

D'autre part, nous pouvons écrire le bilan de puissance du circuit. La puissance instantanée fournie par le générateur au temps t est :

$$P_G = Vi(t)$$

La puissance instantanée perdue par effet Joule au temps t est :

$$P_J = Ri^2$$

La puissance instantanée stockée par le circuit à l'instant t est :

$$P = P_G - P_J$$

ce qui donne :

$$P(t) = (V - Ri)i$$

Nous reconnaissons dans le membre de gauche une partie de l'équation différentielle écrite au dessus. On a donc :

$$\boxed{P(t) = Li \frac{di}{dt}}$$

6.1.3 Énergie emmagasinée par le circuit

Comme l'énergie potentielle emmagasinée par un système entre un temps t_1 et un temps t_2 est simplement donnée par :

$$U = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

On a l'énergie emmagasinée par le système entre le temps $t = 0$ et le temps t :

$$\begin{aligned} U &= \int_0^t Li \frac{di}{dt} dt \\ &= \int_0^t Li di \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$U = \frac{1}{2} Li^2(t)$$

Quand $t \gg 0$ on a alors :

$$\boxed{U = \frac{1}{2} LI^2}$$

Cette énergie emmagasinée par le circuit est restituée au générateur lorsqu'on ouvre l'interrupteur K .

On voit que cette énergie est proportionnelle au coefficient d'auto-induction du circuit. Elle d'autant plus grande que la section du circuit est grande.

Par exemple, l'énergie magnétique emmagasinée par un solénoïde est : $U_m^{\text{sol}} = \frac{1}{2} \mu_0 \pi n^2 a^2 l I^2$. Elle est proportionnelle au nombre de spires et à la section des spires. Une bobine de TP, parcourue par un courant de 1 A., emmagasine donc $U_m^{\text{sol}} = 0.1$ J.

6.1.4 Forme local de l'énergie d'un circuit.

Pour utiliser cette formule, il faut connaître le coefficient d'auto-induction du circuit qui peut être délicat à déterminer.

On peut donner une forme locale de l'énergie magnétique. Reprenons la définition du flux de champ magnétique :

$$\Phi = LI$$

qu'on injecte dans l'équation au dessus, on a :

$$U = \frac{1}{2}\Phi I$$

On va redonner les définitions locales des deux grandeurs Φ et I et les injecter dans l'équation ci dessus. Hors, d'après le théorème de Stokes, nous avons vu que le flux pouvait être écrit avec le potentiel magnétique :

$$\Phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

D'autre part, l'intensité peut aussi être définie de façon intégrale :

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

où $d\vec{S}$ est un élément de surface d'une section du circuit. Remarquons tout de suite que le produit $d\vec{l} \cdot d\vec{S}$ donne l'élément de volume $d\tau$ du circuit. ce qui permet d'écrire l'énergie magnétique du

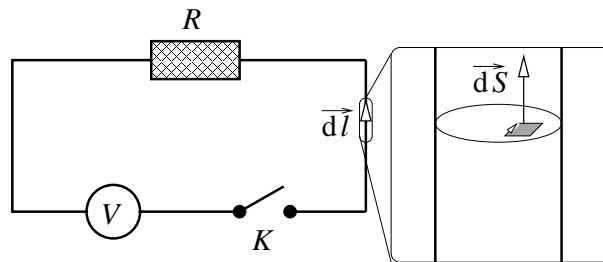


Figure 6.2:

circuit sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{Vol} \vec{J} \cdot \vec{A} \, d\tau$$

Nous démontrerons par la suite que cette équation est générale.

6.2 Energie magnétique de deux circuits.

Nous allons considérer maintenant un cas plus général de deux circuits magnétiques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 composés de résistances R_1 et R_2 et de bobines d'inductance L_1 et L_2 et alimentés par deux générateurs de courant continu V_1 et V_2 . A des temps $t < 0$, les deux interrupteurs sont ouverts. Aucun courant ne circule ni dans le circuit \mathcal{C}_1 ni dans le circuit \mathcal{C}_2 . Cet état où il n'y a ni courant ni champ magnétique est l'état de référence du système et son énergie est donc nulle.

Les deux interrupteurs sont fermés au temps $t = 0$. Les courants qui circulent dans les deux circuits créent des champs magnétiques partout dans l'espace. A travers la surface de chaque circuit, il y a donc un flux de champ magnétique dont une contribution vient du circuit \mathcal{C}_1 et une autre du circuit \mathcal{C}_2 . Ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 &= L_2 i_2 + M i_1 \end{aligned}$$

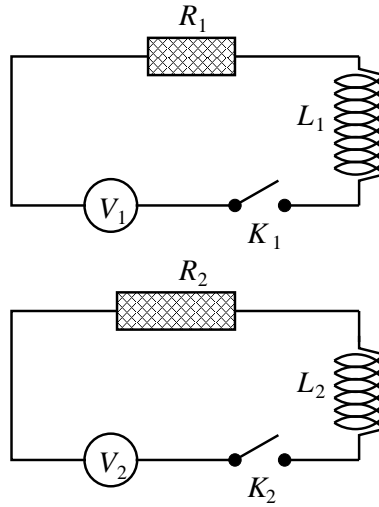


Figure 6.3:

Si ces flux varient (pendant l'établissement du courant par exemple), ils donnent apparition à des f.e.m. dans chaque circuit

$$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

La différence de potentiel aux bornes de chaque résistance est donc :

$$V_1 + e_1 = R_1 i_1$$

$$V_2 + e_2 = R_2 i_2$$

ce qui permet d'écrire les deux équations différentielles couplées suivantes :

$$V_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

6.2.1 Puissances emmagasinées par les circuits.

La puissance instantanée cédée par chaque générateur est :

$$P_{G_1} = V_1 i_1$$

$$P_{G_2} = V_2 i_2$$

La puissance instantanée perdue par effet Joule est :

$$P_{J_1} = R_1 i_1^2$$

$$P_{J_2} = R_2 i_2^2$$

Donc la puissance emmagasinée par chaque circuit est :

$$P_1 = P_{G_1} - P_{J_1} = (V_1 - R_1 i_1) i_1$$

$$P_2 = P_{G_2} - P_{J_2} = (V_2 - R_2 i_2) i_2$$

ce qui peut être récrit avec les relations au dessus :

$$P_1 = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right) i_1$$

$$P_2 = \left(L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \right) i_2$$

6.2.2 Energie emmagasinée par le système.

Au temps t les deux circuits ont donc emmagasiné une énergie :

$$\begin{aligned} U_m &= \int_0^t (P_1 + P_2) dt \\ &= \int_0^t L_1 i_1 di_1 + \int_0^t L_2 i_2 di_2 + \int_0^t M(i_2 di_1 + i_1 di_2) \\ &= \int_0^t L_1 i_1 di_1 + \int_0^t L_2 i_2 di_2 + \int_0^t M d(i_1 i_2) \end{aligned}$$

D'où :

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t)$$

Ce résultat ne dépend pas de la façon dont on a établi les courants. Que i_1 et i_2 soient établis en même temps ou que l'un soit établi après l'autre ne change pas le résultat. Donc quelque soit le protocole expérimental, les états initiaux et finaux sont les mêmes. C'est ce phénomène qui permet de définir l'énergie de l'état final.

6.2.3 Forme locale de l'énergie de deux circuits.

A partir, de la formule ci dessus, on va maintenant écrire l'énergie magnétique sous une forme intégrale en exprimant Φ_1 , Φ_2 , I_1 et I_2 sous forme intégrale.

En utilisant les formules des flux de champ magnétique donnée au début du paragraphe, on peut écrire l'énergie magnétique sous la forme :

$$U_m = \frac{1}{2} (\Phi_1 I_1 + \Phi_2 I_2)$$

On peut bien sur toujours réécrire le flux comme :

$$\Phi_1 = \oint_{C_1} \vec{A} d\vec{l}_1$$

où $d\vec{l}_1$ est l'élément différentiel de contour du circuit C_1 et \vec{A} est le potentiel magnétique dont une contribution est due au courant dans C_1 et une autre contribution est due au courant dans C_2 . De même, on a $\Phi_2 = \oint_{C_2} \vec{A} d\vec{l}_2$.

Les intensités I_1 et I_2 s'écrivent :

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S}_1 \\ I_2 &= \iint_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S}_2 \end{aligned}$$

On a donc :

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_{\text{fil } 1} \vec{J}_1 \cdot \vec{A} d\tau_1 + \frac{1}{2} \iiint_{\text{fil } 2} \vec{J}_2 \cdot \vec{A} d\tau_2$$

6.3 Energie magnétique de N circuits.

De la même façon que précédemment, on considère N circuits électriques. Le circuit k est constitué de bobines dont l'induction équivalente est L_k . Il a une résistance équivalente R_k et il est alimenté par un générateur de tension V_k .

6.3.1 Puissance emmagasinée par les circuits.

Le flux de champ magnétique à travers le circuit k peut s'écrire :

$$\Phi_k(t) = L_k i_k(t) + \sum_{k' \neq k} M_{kk'} i_{k'}(t)$$

La f.e.m. qui apparait dans le circuit k suite à la variation d'intensité dans n'importe quel circuit est :

$$e_k(t) = -L_k \frac{di_k(t)}{dt} - M_{kk'} \frac{di_{k'}(t)}{dt}$$

et la différence de potentielle aux bornes de la résistance R_k est :

$$V_k + e_k(t) = R_k i_k(t)$$

La puissance cédée au circuit \mathcal{C}_k par son générateur est

$$P_{G_k} = V_k i_k(t)$$

et la perte de puissance par effet Joule est :

$$P_{J_k} = R_k i_k^2(t)$$

D'où la puissance emmagasinée par le circuit \mathcal{C}_k :

$$P_k = P_{G_k} - P_{J_k} = (V_k - R_k i_k(t)) i_k(t) = e_k(t) i_k(t)$$

Après un temps t , le circuit a emmagasiné une énergie :

$$U_{m;k} = \int_0^t P_k dt = \int_0^t e_k(t) i_k(t) dt$$

avec $e_k(t)$ qui a été exprimé au dessus :

$$U_{m;k} = \int_0^t \left(L_k \frac{di_k(t)}{dt} + M_{kk'} \frac{di_{k'}(t)}{dt} \right) dt$$

6.3.2 Energie emmagasinée par les circuits.

L'énergie totale emmagasinée par le circuit :

$$\begin{aligned} U_m &= \sum_k U_{m;k} \\ &= \sum_k \int_0^{i_k(t)} L_k i_k di_k + \sum_k \sum_{k' < k} \int_0^{i_{k'}(t)} M_{kk'} i_k di_{k'} \\ &= \sum_k \int_0^{i(t)} L_k i_k di_k + \sum_k \sum_{k' > k} \int_0^{i(t)} (M_{kk'} i_k di_{k'} + M_{k'k} i_{k'} di_k) \\ &= \sum_k \int_0^t L_k i_k di_k + \sum_k \sum_{k' > k} \int_0^{i(t)} M_{kk'} (i_k di_{k'} + i_{k'} di_k) \\ &= \sum_k \frac{1}{2} L_k i_k^2(t) + \sum_k \sum_{k' > k} M_{kk'} i_k(t) i_{k'}(t) \end{aligned}$$

Pour des temps plus long que le temps de relaxation du système, on a $i_k(t) \rightarrow I_k$ et on a alors :

$$U_m = \sum_k \frac{1}{2} L_k I_k^2 + \sum_k \sum_{k' > k} M_{kk'} I_k I_{k'}$$

Ce qui peut être réécrit en utilisant la définition du flux :

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k I_k$$

6.3.3 Forme locale de l'énergie magnétique.

On peut réécrire le flux de champ magnétique à travers le circuit k et l'intensité circulant dans le circuit k comme :

$$\Phi_k = \oint_{C_k} \vec{A} \, d\vec{l}_k$$

$$I_k = \iint_{S_k} \vec{J}_k \, d\vec{S}_k$$

où $d\vec{l}_k$ est l'élément différentiel de contour du circuit $C_{||}$ et $d\vec{S}_k$ est un élément différentiel de surface d'une section du fil du circuit $C_{||}$. On a donc l'élément différentiel de volume du circuit $C_{||}$ qui vaut : $d\tau_k = d\vec{l}_k \cdot d\vec{S}_k$.

L'énergie magnétique peut être réécrite :

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_k \iiint_{\text{circuit } k} \vec{J}_k \cdot \vec{A} \, d\tau_k$$

Considérons maintenant un point de l'espace hors des circuits. En ce point, le vecteur densité de courant est donc nul : $\vec{J} = \vec{0}$. Donc la contribution de l'intégrale ci-dessus, $\vec{J} \cdot \vec{A}$ est donc nulle aussi. On peut donc étendre l'intégrale ci-dessus à tout l'espace car les contributions hors des circuits n'apportent aucune contributions. On a donc :

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_{\text{univers}} \vec{J} \cdot \vec{A} \, d\tau_k$$

Cette intégrale n'est pas toujours facile à utiliser car elle nécessite d'effectuer le produit scalaire $\vec{J} \cdot \vec{A}$ qui n'est pas toujours facile à effectuer ni à intégrer. On peut remarquer que cette l'intégrale, on peut réécrire :

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$$

qui est l'équation de Maxwell-Ampère. De plus, à l'aide de la relation :

$$\text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

on a :

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \iiint_{\text{univers}} \vec{J} \cdot \vec{A} \, d\tau_k \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{univers}} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \, d\tau \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{univers}} \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) \, d\tau + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{univers}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \, d\tau \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{\text{univers}}} \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) \, d\tau + \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\text{univers}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \, d\tau \end{aligned}$$

La première intégrale de la dernière ligne a été obtenu à l'aide du théorème de Stokes. La surface sur laquelle cette intégrale s'effectue est rejetée à l'infini et à une surface infinie. En d'autres termes, tout point M de la surface est tel que

$$r = |\overrightarrow{OM}| \rightarrow \infty$$

D'autre part, en ce point M , on a

$$\begin{aligned} \vec{A}(M) &\propto \frac{1}{r^2} \\ \vec{B}(M) &\propto \frac{1}{r^3} \\ d\vec{A} &= r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'intégrale de surface, à intégrer dans un domaine où pour tous les points, on a $r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\mu_0} \oiint_{S_{\text{univers}}} \operatorname{div} \left(\frac{K}{r^5} \right) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{K}{r^4} \oiint_{S_{\text{univers}}} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc pour l'énergie magnétique :

$$U_m = \iiint_{\text{univers}} \frac{B^2}{2\mu_0} \, d\tau$$

Liste des Figures

1.1	L'expérience fondamentale.	1
1.2	Expérience avec deux boussoles.	2
1.3	L'expérience d'Oersted.	3
1.4	Inversion du courant dans l'expérience d'Oersted.	3
1.5	L'expérience d'Ampère.	4
1.6	Gauche : Le champ magnétique créé par un fil parcouru par un courant. Droite : Force ressenti par un fil dans un champ magnétique.	6
1.7	La roue de Barlow.	9
1.8	Effet Hall.	10
2.1	15
2.2	17
2.3	18
2.4	19
2.5	Ligne de champ magnétique créé par un fil.	22
2.6	Ligne de champ magnétique qui s'arrêterait en un point F	23
2.7	Ligne de champ magnétique qui serait créé par un monopole.	23
2.8	Ligne de champ magnétique créé par un fil.	23
2.9	24
2.10	24
2.11	25
2.12	26
2.13	26
2.14	28
2.15	29
2.16	30
3.1	38
3.2	38
4.1	41
4.2	Produit vectoriel et surface.	42
4.3	43
4.4	44
4.5	45
4.6	Spire de courant.	48
4.7	50
4.8	50
5.1	Expérience de Faraday.	53
5.2	Expérience de Faraday.	54
5.3	Deux spires en influences mutuelles.	57
5.4	59
5.5	60

5.6	Intensité en fonction du temps dans un circuit inductif.	60
5.7	61
5.8	62
5.9	62
5.10	63
5.11	Générateur de courant alternatif.	64
5.12	Transformateur de courant alternatif.	65
6.1	67
6.2	69
6.3	70

Table des Matières

1	Le magnétisme.	1
1.1	Historique - Résultats expérimentaux.	1
1.1.1	La première expérience.	1
1.1.2	Expérience avec une boussole.	1
1.1.3	Expérience avec deux boussoles.	2
1.1.4	Expérience avec une boussole et un courant.	3
1.1.5	Expériences avec deux courants.	4
1.1.6	La force magnétique.	4
1.2	Loi de Laplace.	5
1.2.1	Le champ magnétique	5
1.2.2	Unité.	6
1.2.3	Ordre de grandeurs.	7
1.2.4	Autres écritures de la force de Laplace.	7
1.3	Propriétés de la force magnétique.	8
1.3.1	Travail d'une force magnétique.	8
1.3.2	Relativité galiléenne.	8
1.4	Applications.	9
1.4.1	Roue de Barlow.	9
1.4.2	Effet Hall	10
2	Le champ magnétique.	15
2.1	Symétrie des champs magnétiques.	15
2.1.1	Plan de symétrie.	15
2.1.2	Plan d'antisymétrie.	16
2.2	Loi de Biot et Savart.	17
2.2.1	Champ magnétique créé par un fil infini.	18
2.2.2	Distribution volumique de courants.	19
2.2.3	Charge en mouvement.	20
2.3	Propriété du champ magnétique.	20
2.3.1	Ligne et tube de champ magnétique.	20
2.3.2	Divergence du champ magnétique	21
2.3.3	Flux de champ magnétique.	22
2.3.4	Circulation du champ magnétique.	23
2.3.5	Rotationnel du champ magnétique.	25
2.4	Equation de passage du champ magnétique.	25
2.4.1	Composante normale de \vec{B}	25
2.4.2	Composante tangentielle de \vec{B}	26
2.5	Exemple de calculs de champ magnétique.	27
2.5.1	Champ magnétique créé par un courant volumique dans un conducteur cylindrique.	27
2.5.2	Champ magnétique créé par un courant surfacique dans un conducteur cylindrique.	29
2.5.3	Champ magnétique créé par un solénoïde infini.	30

3	Le potentiel magnétique.	33
3.1	Le potentiel vecteur magnétique.	33
3.1.1	Expression de \vec{A} en fonction des courants.	33
3.1.2	Equation de Maxwell $\text{div } \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0$ et potentiel magnétique.	34
3.1.3	Circulation de \vec{A}	35
3.2	Choix de jauge	35
3.3	Potentiel vecteur et quantité de mouvement.	36
3.4	Equation local de \vec{A}	37
3.5	Analogie avec le potentiel électrostatique.	37
3.6	Exemple : potentiel magnétique d'une boucle de courant.	37
3.6.1	Calcul de \vec{A}	37
3.6.2	Calcul du rotationnel	39
3.6.3	Calcul de la divergence.	39
4	Le moment magnétique.	41
4.1	Le moment magnétique.	41
4.1.1	Définition.	41
4.1.2	Indépendance de l'origine.	42
4.1.3	Simplification de l'écriture.	42
4.2	Force ressentie par un circuit dans un champ uniforme.	43
4.3	Couple ressenti par un circuit dans un champ uniforme.	43
4.4	Energie magnétique d'un moment en interaction avec un champ.	45
4.5	Potentiel magnétique créé par un moment.	46
4.6	Champ magnétique créé par un moment.	47
4.6.1	Champ magnétique créé par une boucle de courant.	47
4.7	Moment magnétique atomique dans le modèle de Bohr.	50
5	Influence magnétique	53
5.1	L'expérience de Faraday.	53
5.1.1	Circuits fixes.	53
5.1.2	Circuits mobiles.	54
5.1.3	Circuits constitués de différents matériaux.	54
5.1.4	Force électromotrice induite	55
5.2	Induction mutuelle.	55
5.2.1	Phénomène d'induction entre deux circuits.	55
5.2.2	Coefficient d'induction mutuelle.	56
5.2.3	Symétrie des coefficients.	56
5.2.4	Coefficient d'induction entre deux spires.	57
5.3	Auto-induction	58
5.3.1	Coefficient d'auto-induction	58
5.3.2	Auto-induction et loi de Lenz.	58
5.3.3	Coefficient d'auto-induction d'une bobine.	58
5.3.4	Circuit RL	59
5.4	Couplage de systèmes inductifs.	61
5.4.1	Coefficient de couplage.	61
5.4.2	Inductance équivalente.	62
5.5	Application	64
5.5.1	Générateur de courant alternatif.	64
5.5.2	Transformateur.	64

6	L'énergie magnétique.	67
6.1	Energie magnétique d'un circuit.	67
6.1.1	Coefficient d'auto-induction d'un circuit.	67
6.1.2	Puissance dissipée par le circuit.	67
6.1.3	Energie emmagasinée par le circuit	68
6.1.4	Forme local de l'énergie d'un circuit.	69
6.2	Energie magnétique de deux circuits.	69
6.2.1	Puissances emmagasinées par les circuits.	70
6.2.2	Energie emmagasinée par le système.	71
6.2.3	Forme locale de l'énergie de deux circuits.	71
6.3	Energie magnétique de N circuits.	71
6.3.1	Puissance emmagasinée par les circuits.	72
6.3.2	Energie emmagasinée par les circuits.	72
6.3.3	Forme locale de l'énergie magnétique.	73