# Plan du polycopié

**I – INTRODUCTION : Les causes du mouvement : force, inertie, masse**

**II – LES LOIS DU MOUVEMENT**

***II – 1 Le principe d'inertie ou 1ère loi de Newton – Référentiels galiléens***

***II – 2 Le principe fondamental de la dynamique ou 2ème loi de Newton***

***II – 2 – a*** *: Différents types de forces*
***II – 2 – b*** *: Masse : masse inertielle et masse grave*

***II – 3 Principe de l'action et de la réaction ou 3ème loi de Newton***

**III – APPLICATION PRATIQUE DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE**

***III – 1 Un exemple d'application***

**IV – CAS DES REFERENTIELS NON GALILEENS**

***IV – 1 Invariance galiléenne***

***IV – 2 Le principe fondamental de la dynamique dans les référentiels non galiléens – Forces d'inertie***

***IV – 3 Une application : poids des corps sur une terre en rotation***

***IV – 4 Le principe d'équivalence***

**V – THEOREMES ET DEFINITIONS**

***V – 1 Théorème de la conservation de la quantité de mouvement***

***V – 1 – a*** *: Reformulation du principe fondamental de la dynamique*
***V – 1 – b*** *: Equation de la dynamique pour les corps de masse variable*

***V – 2 Moment d'une force – Moment cinétique – Théorème du moment cinétique***

***V – 2 – a*** *: Cas particulier important des forces centrales*

***V – 3 Travail – Energie cinétique – Théorème de l'énergie cinétique***

***V – 4 Energie potentielle – Energie mécanique – Théorème de la conservation de l'énergie mécanique***

***V–4– a*** *: Transformation de l'énergie : exemple de l'oscillateur harmonique*

***V – 5 Exemple d'application : résolution graphique qualitative d'un problème de dynamique à une dimension***

**VI – LOIS DE KEPLER – MOUVEMENT DES PLANETES ET COMETES**

***VI – 1 Préliminaires : le problème à deux corps – conservation de la quantité de mouvement***

***VI – 2 Equation du mouvement – Théorème du moment cinétique***

***VI – 3 Formule de Binet – Trajectoire***

***VI – 4 Une autre constante du mouvement : l'énergie mécanique***

***VI – 5 La troisième loi de Kepler***

**VII – EQUILIBRE – STABILITE – ECARTS A L'EQUILIBRE**

***VII – 1 Stabilité d'une position d'équilibre***

***VII – 2 Recherche de la stabilité d'une position d'équilibre***

***VII – 3 Un exemple : le pendule plan***

***VII – 4 Le même exemple avec un autre point de vue***

***VII – 5 Cas où les forces dérivent d'une énergie potentielle***

# LE MOUVEMENT ET SES CAUSES : DYNAMIQUE

**Complément au cours de dynamique du point matériel**
**Première année universitaire**

## I – INTRODUCTION - Les causes du mouvement : force, inertie, masse

La dynamique se préoccupe des causes du mouvement : qu'est-ce qui fait que tel ou tel objet adopte tel ou tel type de mouvement ? La dynamique newtonienne que nous allons étudier affirme que le mouvement d'un corps, s'il est autre que rectiligne uniforme, est dû à l'existence de **forces** qui agissent sur le corps en question. Le principe fondamental de la dynamique ($\vec{F} = m\,\vec{a}$), ou seconde loi de Newton, permet en effet de connaître le mouvement d'un corps (via son accélération $\vec{a}$) si on se donne la ou les forces ($\vec{F}$) qui agissent sur lui [♣]. Inversement, cette loi permet de connaître la force totale qui agit sur le corps si on se donne son mouvement via le vecteur accélération ($\vec{a}$).

- ***Forces*** - C'est donc au travers de la notion de force que la dynamique de Newton prétend expliquer les différents types de mouvements rencontrés dans la nature. La notion qualitative de force est très ancienne : depuis longtemps en effet, on avait constaté expérimentalement qu'il fallait produire une certaine action sur un corps pour qu'il se meuve, et que tôt ou tard ce corps finissait par s'arrêter si plus rien n'agissait sur lui. Aristote (-384 ;-322) en avait conclu que « *Tout mobile suppose nécessairement un moteur* ». Aujourd'hui, 2300 ans après Aristote, on a reconnu que si le corps finit par s'arrêter, ça n'est pas parce que plus rien n'agit sur lui, mais bien au contraire parce qu'il subsiste encore des forces appelées forces de frottements qui continuent d'agir sur lui et le poussent à s'arrêter. Si aucune force n'agissait sur ce corps, il continuerait de se mouvoir dans un mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire à vitesse constante : c'est la première loi de Newton appelée aussi principe d'inertie. Ainsi, dans la dynamique newtonienne ***le rôle d'une force n'est pas de créer le mouvement comme le pensaient les aristotéliciens, mais de le modifier***, la nature de cette modification étant précisée dans la deuxième loi ($\vec{a} = \vec{F}/m$). Des articles et même des livres entiers ont été consacrés à définir de façon précise ce qu'est une force et comment la mesurer. Contentons-nous ici d'affirmer que c'est une grandeur vectorielle proportionnelle au vecteur accélération ainsi que l'énonce le principe fondamental de la dynamique.

- ***Masse et inertie*** - Les Anciens avaient aussi remarqué que pour un même effort (i.e. pour une même force), un corps se déplace plus ou moins facilement selon qu'il est plus ou

[♣] Il faut se donner également ce que l'on appelle les conditions initiales, c'est-à-dire, la position de l'objet et sa vitesse à l'instant zéro (voir plus loin dans le cours)

moins « lourd ». Ils avaient également remarqué qu'un corps se déplace plus ou moins vite selon le milieu dans lequel il évolue (une pierre chute moins vite dans l'eau que dans l'air). Ces observations ajoutées aux précédentes conduisirent à la dynamique aristotélicienne dont héritèrent les sciences Arabes puis Européennes. Dans notre langage actuel, on pourrait traduire l'essentiel de cette dynamique par une loi du type : $V = \alpha F$ ; loi qui exprime que la vitesse V acquise par un corps serait proportionnelle à la force F qui agit sur ce corps. Le coefficient $\alpha$ rendrait compte à la fois de la « lourdeur » du corps et de la « résistance du milieu » dans lequel il évolue. Cette résistance du milieu nous est connue aujourd'hui au travers des forces de frottement dues à la plus ou moins grande fluidité du milieu. Quant à la « lourdeur » des corps et la plus ou moins grande facilité à les déplacer, nous en avons dégagé deux notions aujourd'hui, qui sont **l'inertie** † et la **masse**. ***On appelle inertie la propriété de la matière qui fait que les objets ne peuvent d'eux même modifier leur état de mouvement***. Il est nécessaire de produire une force pour modifier l'état de mouvement d'un corps, et son inertie joue le rôle d'une résistance passive vis à vis de cette modification. ***La masse d'un corps (m) est la grandeur physique qui caractérise cette inertie*** : plus sa masse est élevée, plus l'inertie du corps en question sera grande et plus il sera difficile de le faire se mouvoir ou de changer son mouvement. On a une connaissance plus ou moins intuitive de la masse d'un corps au travers de sa pesée. Mais nous verrons que derrière la seule notion de masse se cachent deux phénomènes physiques a priori différents (inertie et gravitation).

La théorie aristotélicienne du mouvement ne résista pas à la révolution scientifique du XVIIème siècle, mais il fallut près de 150 ans pour la remplacer par une autre dynamique qui soit cohérente et acceptée par une majorité de scientifiques. C'est au cours de cette période que furent dégagées les notions plus précises et formalisées de ce que sont une force, une masse, une vitesse, une accélération, etc…, grâce à l'introduction systématique de l'expérimentation et des mathématiques dans les sciences physiques. Cette nouvelle dynamique fût formalisée par Isaac Newton (1642 ;1727) qui énonça les nouvelles lois du mouvement ainsi que sa théorie de la gravitation en réunissant l'ensemble des résultats de ses prédécesseurs (Galilée en particulier).

A partir de la dynamique newtonienne, on construisit aux XVIIIème et XIXème siècles ce qu'on appelle aujourd'hui la mécanique (ou dynamique) classique. De nouvelles grandeurs physiques furent définies tout au long de cette période, en particulier les notions de travail d'une force, d'énergie et de moment cinétique. Aujourd'hui, les formes les plus abouties de cette science - dynamique lagrangienne et/ou hamiltonienne - se fondent sur ces nouveaux concepts et sont à la base des théories sur les mouvements instables et chaotiques.

La mécanique classique est capable a priori de décrire le mouvement de tous les corps, qu'ils soient solides, liquides ou gazeux, pourvu que l'on se donne toutes les forces en

† du latin *inertia* que l'on peut traduire par : incapacité

présence. Si l'objet est solide, on fera plus particulièrement appel à la mécanique du solide pour décrire son mouvement. S'il est liquide ou gazeux, on pourra faire appel à la mécanique des fluides. Ces deux mécaniques utilisent un appareil mathématique assez différent, mais toutes deux reposent en dernier ressort sur la mécanique classique du point matériel qui est l'objet de ce cours.

## II – LES LOIS DU MOUVEMENT

La mécanique classique dispose de trois lois érigées en principes à partir desquels il est possible de résoudre le problème du mouvement [♣] et d'énoncer divers théorèmes qui aideront à cette résolution. Ces trois principes sont successivement passés en revue ci-dessous.

### *II -1 Le Principe d'Inertie ou 1ère loi de Newton – Référentiels Galiléens*

> *« Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état. »*

C'est la première loi du mouvement telle qu'elle fût énoncée par Newton [♦]. On l'appelle principe d'inertie car cette loi décrit l'incapacité qu'ont les corps à changer seuls leur état de mouvement ainsi qu'on l'a déjà dit dans l'introduction : il faut en effet qu'une force extérieure au corps [♥] agisse sur lui pour que son mouvement soit changé. Notez bien qu'en l'absence de force, le mouvement préexiste sous la forme d'un mouvement rectiligne uniforme (éventuellement de vitesse nulle, c'est-à-dire le repos).

Cette 1ère loi du mouvement cache une difficulté que vous avez peut-être remarqué : nous savons, grâce au cours de cinématique, que tout mouvement est relatif à un référentiel donné ; si bien que le mouvement d'un point matériel, s'il est rectiligne uniforme par rapport à un certain référentiel, peut très bien paraître accéléré par rapport à un autre référentiel. Il s'ensuit que le principe d'inertie perd toute sa signification si on n'indique pas le référentiel utilisé. La mécanique classique postule donc de façon implicite qu'il existe au moins un référentiel pour lequel le principe d'inertie est vérifié. On appelle ce type de référentiel : un **référentiel inertiel** ou d'inertie, ou encore un **référentiel galiléen** pour lequel on aura la définition suivante :

---

[♣] C'est-à-dire : étant données les forces en présence, quel sera le mouvement du point matériel ?

[♦] *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*, Isaac Newton, Traduction de la Marquise du Chastellet, Paris, 1756

[♥] En dynamique classique, un point matériel ne possède pas de moteur interne. D'autre part, dans tout le cours, le mot « corps » doit être considéré comme synonyme de « point matériel ».

**Définition** - Un référentiel galiléen est un référentiel par rapport auquel un point matériel qui n'est soumis à aucune force suit un mouvement rectiligne uniforme (éventuellement de vitesse nulle).

S'il existe un référentiel galiléen, alors il en existe une infinité. En effet, d'après les lois de la cinématique, un point matériel se déplaçant à vitesse constante ($\vec{v}_a$) par rapport à un certain référentiel $\mathfrak{R}$ se déplace aussi à vitesse constante ($\vec{v}_r$) par rapport à un autre référentiel $\mathfrak{R}'$ se déplaçant lui-même à vitesse constante (vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$) par rapport à $\mathfrak{R}$. On en conclut que si $\mathfrak{R}$ est galiléen, $\mathfrak{R}'$ l'est aussi.

Existe-t-il dans la nature au moins un référentiel galiléen ? Cela dépend du problème que vous étudiez et du degré de précision que vous voulez atteindre. Le référentiel terrestre par exemple n'est pas un référentiel galiléen puisque la Terre tourne sur elle-même à raison d'un tour en 24 heures. Ainsi, si depuis le référentiel terrestre on suit le mouvement d'un point matériel isolé, c'est à dire un point matériel dont on est sûr qu'aucune force n'agit sur lui (donc suffisamment loin de la terre pour que la force de gravitation terrestre soit négligeable), on trouvera qu'il effectue une spirale et non pas un mouvement rectiligne uniforme. Toutefois, si on étudie ce mouvement pendant une durée suffisamment courte, on trouvera que le point matériel suit approximativement un mouvement rectiligne uniforme (une portion de la spirale assimilée à une droite) et on pourra admettre que pendant cette durée le référentiel terrestre est galiléen. Dans ce cas en effet, l'accélération d'entraînement due à la rotation de la Terre sur elle-même apparaît comme négligeable ($a_e = 3{,}4.10^{-2} m/s^2$ [=] à l'équateur), de même que son mouvement circulaire autour du Soleil qui ajoute une accélération d'entraînement de $5{,}9.10^{-3} m/s^2$. Nous verrons plus loin qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un référentiel soit accepté comme un référentiel galiléen vis à vis du mouvement que l'on étudie est que les **forces d'inertie** soient négligeables devant les autres forces du problème pendant toute la durée du mouvement.

Le référentiel de Copernic dont l'origine est le centre de masse du système solaire et dont les axes sont définis par 3 étoiles très éloignées (étoiles dites « fixes ») est un référentiel assez proche de la notion de référentiel galiléen : son accélération d'entraînement par rapport au centre de la galaxie est de $3.10^{-10} m/s^2$.

En conclusion, il n'existe pas dans la nature de véritable référentiel galiléen ; il n'existe que des référentiels approximativement galiléens vis à vis desquels le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme pendant une durée plus ou moins longue. Finalement, un énoncé plus actuel du principe d'inertie peut être le suivant :

---

[=] On obtient cette valeur grâce aux lois de la cinématique vues précédemment concernant les accélérations : $|\vec{a}_e| = R\omega^2 \cos\lambda$ où $R$ est le rayon terrestre, $\lambda$ la latitude du lieu (à l'équateur $\lambda = 0$) et $\omega$ la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle même : $\omega = 2\pi / T$, $T$ étant la période de rotation. Cette formule sera établie un peu plus loin.

*Principe d'inertie (1ère loi du mouvement) : dans un référentiel galiléen, un point matériel qui n'est soumis à aucune interaction persévère dans son état de mouvement rectiligne uniforme.*

### *II -2 Le Principe fondamental de la Dynamique ou 2ème loi de Newton*

*« Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, et le sont dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »*

« Les changements qui arrivent dans le mouvement » dont il est question dans l'énoncé de Newton correspondent dans notre langage actuel aux variations du vecteur vitesse à chaque instant, c'est-à-dire à l'existence d'un vecteur accélération. Ainsi, le principe fondamental de la dynamique énonce que l'accélération prise par un corps est proportionnelle à la force qui agit sur lui ($\vec{a} = \vec{F} / m$). On peut transcrire cette phrase mathématiquement sous la forme :

$$\overrightarrow{dv} = \frac{\vec{F}}{m}\, dt = \vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)$$

qui signifie que la variation de vitesse (en intensité et en direction) pendant la durée infinitésimale $dt$ est proportionnelle à la force qui agit sur le point matériel à l'instant $t$. La constante de proportionnalité ($1/m$) reflète la plus ou moins grande capacité (son inertie) de ce point matériel à voir sa vitesse changer sous l'effet de cette force. Un énoncé plus actuel de la seconde loi de Newton peut être le suivant :

*Principe Fondamental de la Dynamique (2ème loi de Newton) : Un point matériel de masse $m$ soumis à une ou plusieurs forces dont la résultante est $\vec{F}$ prend une accélération $\vec{a}$ telle que : $\vec{F} = m\,\vec{a}$*

Si l'on fait $\vec{F} = \vec{0}$ dans la deuxième loi de Newton, on trouve que l'accélération est nulle et donc que la vitesse est constante, en conformité avec le principe d'inertie. Cette remarque implique que le principe fondamental de la dynamique, tel que nous l'avons énoncé, ne peut s'appliquer que dans un référentiel galiléen. Nous verrons au IV comment modifier ce principe dans les référentiels non galiléens en introduisant les forces d'inerties. Avant d'aller plus loin dans l'étude pratique de cette loi (voir le III) nous allons brièvement discuter des deux grandeurs physiques « nouvelles » qui sont introduites : force et masse. Dans un premier temps nous allons inventorier diverses forces que vous connaissez sans doute déjà, puis revenir quelque peu sur la notion de masse, ce qui nous permettra de distinguer entre masse inertielle et masse grave.

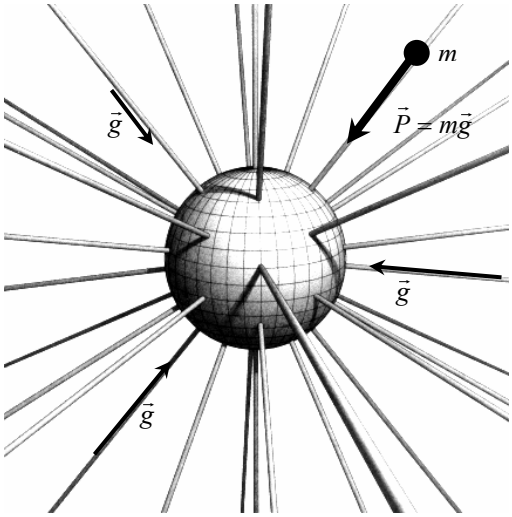
***II – 2 – a*** *: Différents types de forces*

La force est donc la grandeur physique qui permet au physicien de décrire comment va varier l'accélération. En tant que vecteur, la force obéit à toutes les règles concernant les vecteurs. En particulier, elle obéit à la règle du parallélogramme : si deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ agissent simultanément sur un point matériel de masse $m$, alors la force résultante sera $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ et l'accélération prise par le point matériel sera $\vec{a} = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) / m = \vec{F} / m$.

Une force, puisque c'est un vecteur, peut se décomposer sur une base vectorielle quelconque ; propriété que nous utiliserons systématiquement. L'unité internationale de force est le Newton ($N$), de sorte que $1\,N$ est la force nécessaire pour accélérer une masse de $1\,kg$ de $1\,m.s^{-2}$. Voici quelques exemples de forces :

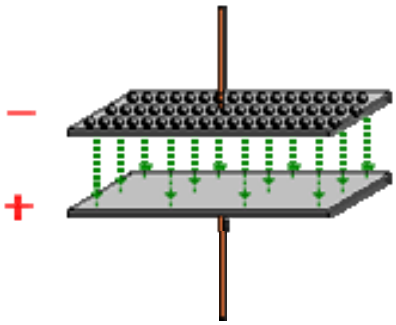
**Forces décrivant l'interaction entre les sources d'un champ et un corpuscule test**

***Force de gravitation (poids)*** : la Terre est un ensemble de N points matériels qui constituent les sources du champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$. La force créée par ce champ de pesanteur sur un point matériel de masse $m$ s'écrit $\vec{P} = m\,\vec{g}$.



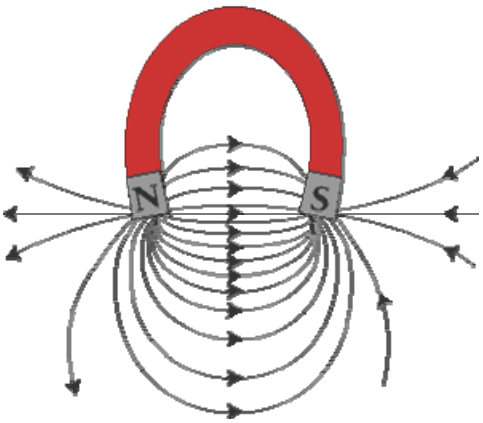

Sur cette figure, les lignes du champ gravitationnel terrestre $\vec{g}$ ont été visualisées. Une flèche placée sur certaines de ces lignes indique le sens du champ : il est dirigé vers le centre de la terre. Le champ $\vec{g}$ n'a pas forcément la même intensité partout : les lignes de champ indiquent juste sa « géométrie ».

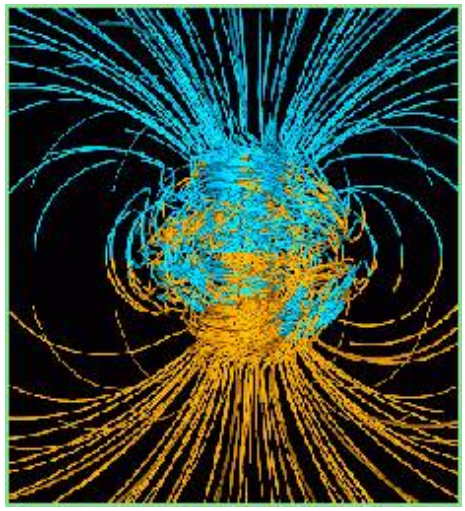
***Force électrique*** : deux plaques métalliques reliées aux bornes d'une pile électrique constituent ce qu'on appelle un condensateur. N particules chargées positivement apparaissent sur une plaque (l'anode) et N particules chargées négativement apparaissent sur l'autre plaque (la cathode). Ces 2N particules constituent les sources d'un champ électrique $\vec{E}$ régnant entre les deux plaques. Il est visualisé sur la figure par ses lignes de champ qui sont perpendiculaires aux plaques. La force créée par ce



champ électrique sur un point matériel de charge $q$ situé entre les plaques est $\vec{F}_{él} = q\,\vec{E}$, c'est-à-dire dans le sens du champ si la charge est positive ou dans le sens inverse si la charge est négative.

***Force magnétique*** : un barreau de fer aimanté génère un champ magnétique $\vec{B}$ dont les lignes de champ sont visualisées sur la figure ci-contre. Les sources de ce champ magnétique sont les électrons à l'intérieur du barreau qui, en plus d'avoir une charge et une masse, possèdent une troisième caractéristique appelée *spin* qui donne lieu à ce qu'on appelle un moment magnétique assimilable à un petit vecteur. Si tous ces moments magnétiques attachés à chaque électron s'additionnent pour donner une résultante non nulle, comme dans le fer en dessous de 1300°C, ils génèrent un champ magnétique. Une autre façon de produire un champ magnétique est de faire circuler des particules chargées dans un fil par exemple ; ce courant de charges constitue également les sources d'un champ magnétique. Dans tous les cas, la force créée par un champ magnétique sur un point matériel de charge $q$ et de vitesse $\vec{v}$ est $\vec{F}_{mag} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$.



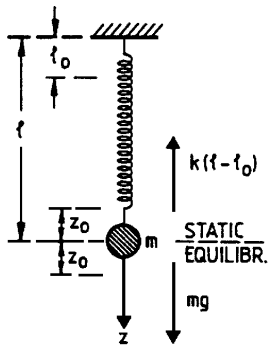



Champ magnétique terrestre obtenu par simulation à partir de données expérimentales. Les lignes de champ du haut de la figure sont dirigées vers l'intérieur de la terre ; les lignes du dessous, vers l'extérieur.

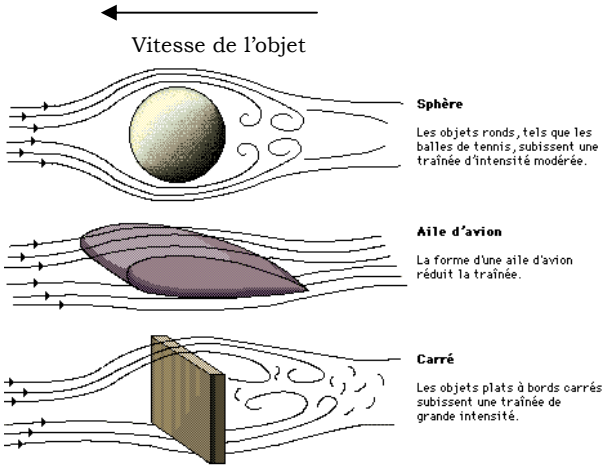
**Forces effectives**

Au niveau microscopique, on ne connaît à l'heure actuelle que quatre types d'interactions : gravitationnelle, électromagnétique (électrique + magnétique), forte et faible. L'interaction forte et l'interaction faible ne se manifestent qu'à des échelles de distance qui

sont celles du noyau atomique ($10^{-15}\ m = 1\ Fermi = 1\ F$). A notre niveau macroscopique, seules les forces gravitationnelle et électromagnétique jouent un rôle sur le mouvement des objets. Toutefois, dans de nombreux cas ces interactions nous apparaissent à l'échelle macroscopique sous la forme de forces dites « effectives » que l'on peut considérer comme les résultantes de la multitude d'interactions gravitationnelles et électromagnétiques qu'il nous faudrait considérer.

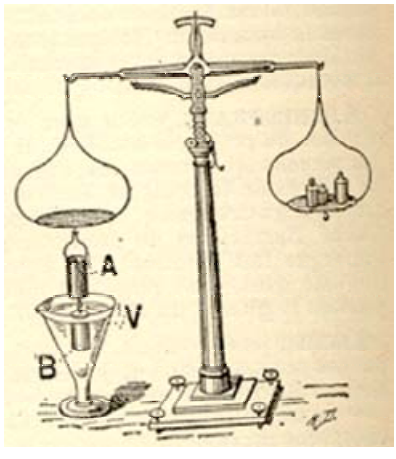



***Forces de rappel*** : un corps suspendu à un ressort subit de la part de ce ressort, une force de rappel qui s'écrit $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{\Delta x}$ où $\overrightarrow{\Delta x}$ est le vecteur représentant l'écart par rapport à la longueur à vide du ressort. $k$ est appelée constante de rappel du ressort. Sur la figure ci-contre, une masse accrochée au ressort est à l'équilibre sous l'effet de son poids et de la force de rappel du ressort : $F = k(\ell - \ell_0)$, où $\ell_0$ est la longueur du ressort à vide (masse non accrochée) et $\ell$ sa longueur une fois la masse accrochée.

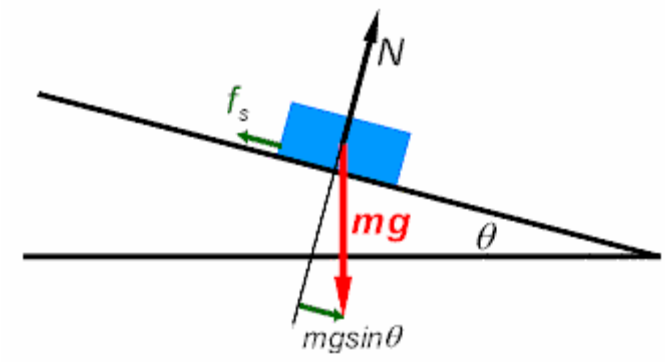



***Forces de frottement visqueux*** : un objet qui se déplace dans un milieu fluide (l'air par exemple) subit une force qui dépend de sa vitesse et qui s'oppose systématiquement au mouvement. Cette force s'écrit $\vec{F} = -k\,\vec{v}$ aux faibles vitesses, tandis qu'aux grandes vitesses elle prend la forme $\vec{F} = -k'\,v\,\vec{v}$. Les coefficients de frottement $k$ et $k'$ dépendent fortement de la forme et des dimensions de l'objet, de sa direction de mouvement, de l'état de sa surface, et des propriétés du fluide. Pour limiter ces forces d'origine électromagnétique, l'objet doit être effilé pour permettre au fluide de bien se disperser, à l'avant comme à l'arrière (ce qu'on appelle la « traînée »).

***Poussée d'Archimède*** : « *Tout corps plongé dans un fluide (liquide ou gazeux) subit de la part de ce fluide une poussée verticale, dirigée du bas vers le haut, et dont l'intensité est égale au poids du fluide déplacé* ». Le dessin ci-contre montre le principe de la vérification expérimentale de l'existence et de la valeur de la poussée



d'Archimède : on suspend un corps quelconque sur le fléau gauche de la balance dont on mesure le poids. Puis on le plonge dans une coupole graduée remplie de liquide. On mesure la variation de poids que cela engendre ainsi que la variation de volume du liquide.




***Forces de réaction – frottement solide*** : un objet posé ou en mouvement sur un support, subit de la part de ce support une réaction $\vec{R}$. Si l'objet est au repos sur un support horizontal, cette réaction est égale et opposée au poids de l'objet : $\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$. Si l'objet est en mouvement, ou si l'objet est sur un plan incliné, la réaction totale du support aura une composante verticale $\vec{N}$ et une composante horizontale $\vec{f}_S$ qui rend compte du frottement de l'objet sur le support. L'importance du frottement dépend bien sûr de la forme de l'objet, de sa vitesse et de la nature du support.

**Forces décrivant l'interaction entre deux corpuscules**

***Interaction gravitationnelle*** : entre deux points matériels 1 et 2 de masses $m_1$ et $m_2$ il existe une interaction, appelée interaction gravitationnelle. Si $r_{12} = r_{21}$ est la distance entre les deux points matériels, alors le point matériel 1 subit de la part du point matériel 2 une force attractive :

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\,G\,\frac{m_2\,m_1}{r_{21}^2}\,\vec{u}_{2\to 1}$$

où $\vec{u}_{2\to 1}$ est le vecteur unitaire qui joint 2 à 1. $G$ est la constante universelle de la Gravitation : $G = (6.6732 \pm 0.0031).10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$.
Inversement, le point matériel 2 subit de la part du point matériel 1 une force attractive $\vec{F}_{1\to 2}$ égale et opposée à $\vec{F}_{2\to 1}$ :

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\,G\,\frac{m_1\,m_2}{r_{12}^2}\,\vec{u}_{1\to 2}$$

où $\vec{u}_{1\to 2}$ est le vecteur unitaire qui joint 1 à 2 ($\vec{u}_{2\to 1} = -\,\vec{u}_{1\to 2}$).

La force $\vec{F}_{1\to 2}$ est vue comme le résultat de l'interaction entre la particule test 2 et le champ gravitationnel $\vec{g}_1$ crée par la source 1 : $\vec{F}_{1\to 2} = m_2\,\vec{g}_1$. De même, la force $\vec{F}_{2\to 1}$ résulte de l'interaction entre la particule test 1 plongée dans le champ gravitationnel crée par la source 2 : $\vec{F}_{2\to 1} = m_1\,\vec{g}_2$. Le champ de gravitation crée par un point matériel de masse $m$ est :

$$\vec{g} = -\,G\,\frac{m}{r^2}\,\vec{u}_r$$

$\vec{u}_r$ et $r$ sont respectivement le vecteur unitaire et la distance qui relient le point matériel à l'endroit où on veux connaître la valeur du champ. Cette théorie est due à Newton.

***Interaction électrostatique ou coulombienne*** : entre deux points matériels 1 et 2 de masses $m_1$ et $m_2$ et de charges $q_1$ et $q_2$ il existe une interaction, appelée interaction coulombienne. Le point matériel 1 subit de la part du point matériel 2 une force :

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_2\,q_1}{r_{21}^2}\,\vec{u}_{2\to 1}$$

avec les mêmes notations que précédemment. $\varepsilon_0$ est une constante appelée permittivité du vide ; elle est reliée à la constante universelle $c$ (vitesse de la lumière dans le vide) par la relation : $\varepsilon_0 = 10^7 / \,4\pi\,c^2$, soit : $\varepsilon_0 \approx 8.854.10^{-12}\ C^2 kg^{-1} m^{-4} s^{-2}$. Le Coulomb ($C$) est l'unité de charge dans le système international. On retiendra pour les applications numériques que $1/\,4\pi\varepsilon_0 \approx 9.10^9$ Unités du Système International (USI). La force $\vec{F}_{2\to 1}$ est attractive si les charges sont de signe opposé ou répulsive si les charges sont de même signe.
Inversement, le point matériel 2 subit de la part du point matériel 1 une force $\vec{F}_{1\to 2}$ égale et opposée à $\vec{F}_{2\to 1}$ :

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1\,q_2}{r_{12}^2}\,\vec{u}_{1\to 2}$$

La force $\vec{F}_{1\to 2}$ est le résultat de l'interaction entre la particule test 2 et le champ électrique $\vec{E}_1$ crée par la source 1 : $\vec{F}_{1\to 2} = q_2\,\vec{E}_1$. De même, la force $\vec{F}_{2\to 1}$ résulte de l'interaction entre la particule test 1 plongée dans le champ électrique crée par la source 2 : $\vec{F}_{2\to 1} = q_1\,\vec{E}_2$. Le champ électrique crée par un point matériel de charge $q$ est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\vec{u}_r$$

$\vec{u}_r$ et $r$ sont respectivement le vecteur unitaire et la distance qui relient le point matériel à l'endroit où on veux connaître la valeur du champ. Cette théorie est due à Charles-Augustin Coulomb (1736 ;1806).

En dépit de l'analogie manifeste existant entre les forces gravitationnelle et électrique (elles décroissent toutes les deux comme l'inverse de la distance au carré), il existe une différence de nature importante : la force gravitationnelle est toujours attractive, tandis que

la force électrique est soit répulsive, soit attractive en raison de l'existence de charges positives et négatives. A l 'échelle de l'atome et des molécules, ce sont les forces électriques qui l'emportent largement : dans l'atome d'hydrogène, composé d'un proton de masse $m_p = 1.6727.10^{-27}\ kg$ , de charge $q_p = 1.602.10^{-19}\ C$ et d'un électron de masse $m_e = 9.11.10^{-31}\ kg$ , de charge $q_e = -q_p = -1.602.10^{-19}\ C$ , le rapport des interactions électrique et gravitationnelle qui s'exercent entre les deux particules est indépendant de la distance qui les séparent et vaut :

$$\frac{F_{grav}}{F_{él}} = -4\pi\varepsilon_0 G\,\frac{m_e m_p}{q_e q_p} \approx 4.3.10^{-40}\ !!$$

Ce sont donc les interactions électriques (et magnétiques) qui sont responsables de la cohésion de la matière : stabilité des atomes, liaisons chimiques entre molécules, propriétés physiques et chimiques des matériaux. Par contre, en dépit de sa petitesse par rapport à la force électrique, la force gravitationnelle finit par l'emporter à des échelles plus importante car la matière est globalement neutre (autant de charges positives que négatives). La stabilité du système solaire par exemple est donc essentiellement gouvernée par l'interaction gravitationnelle entre les planètes et le Soleil.

***II – 2 – b*** *: Masse : masse inertielle et masse grave*

Comme on l'a déjà dit, la constante de proportionnalité ($m$) qui relie la force à l'accélération dans le principe fondamental de la dynamique est une grandeur physique caractéristique du corps qui reflète sa plus ou moins grande inertie : pour une force donnée, l'accélération du point matériel est inversement proportionnelle à sa masse. Puisque $m$ caractérise l'inertie du corps, on devrait à ce titre spécifier cette masse d'inertielle et l'indicer $m_i$ afin de ne pas la confondre avec la masse qui intervient dans la force gravitationnelle. En effet, l'aptitude des corps à créer autour d'eux des champs de gravitation n'a *a priori* rien à voir avec l'inertie. L'existence d'un champ gravitationnel provient de ce que les corps possèdent une « charge gravitationnelle » que l'on appelle masse grave, au même titre qu'une charge électrique crée un champ électrique.

Toutefois, l'expérience montre que masse inertielle et masse grave ne sont qu'une seule et même propriété : pour bien le voir, dénommons la masse grave d'un corps par $m_g$ et examinons la chute libre de cet objet au voisinage de la surface de la Terre. L'interaction entre cet objet et le champ gravitationnel terrestre $\vec{g}_0$ donne lieu à une force qui correspond au poids de l'objet : $\vec{P} = m_g\ \vec{g}_0$ . La loi de la dynamique pour la chute libre s'écrit donc :

$$\vec{P} = m_i\ \vec{a}$$

où $m_i$ est la masse inertielle de l'objet et $\vec{a}$ son accélération. On obtient ainsi $\vec{a} = \vec{g}_0\ m_g / m_i$ . Les masses grave et inertielle n'ayant *a priori* rien à voir, on s'attend à ce que les objets ne tombent pas tous avec la même accélération lors de l'expérience de la chute libre. Or les expériences de Galilée ont démontré le contraire : les corps tombent tous en chute libre avec

la même accélération (abstraction faite des forces de frottement dues à l'air bien sûr). Par conséquent, ces expériences démontrent que le rapport de la masse grave à la masse inerte est le même pour tous les corps. Il suffit alors de choisir un système d'unité astucieux pour que ce rapport soit égal à 1 (le Système International par exemple).

Galilée n'était pas conscient des implications de ses expériences sur la chute libre car il ne possédait pas encore les notions d'inertie et de gravitation. C'est Newton qui a interprété les expériences de Galilée comme nous venons de le faire. Pour se convaincre de l'égalité entre masse grave et masse inertielle, Newton expérimenta sur les oscillations du pendule simple en y suspendant les objets les plus divers. Sa conclusion fût que la période des oscillations est indépendante de l'objet, ce qui démontrait que masse grave et masse inerte ne sont qu'une seule et même quantité physique. Bessel (1784-1846) repris les expériences de Newton et trouva $m_i = m_g$ avec une erreur relative de $1/60\,000$. Le physicien Eötvös (1848-1919) réalisa des expériences en prenant en compte la rotation de la Terre sur elle-même et obtint une erreur relative de $5.10^{-9}$. Enfin, en 1961-64 le physicien Dicke a obtenu $m_i = m_g$ avec une précision relative de $3.10^{-11}$.

L'égalité entre masse grave et masse inertielle est donc bien établie expérimentalement depuis les débuts de la mécanique classique. Mais, ainsi que l'a dit Albert Einstein, la physique se contenta d'enregistrer ce résultat sans en tirer de conséquences. L'importance de l'équivalence de ces deux masses ne fût clairement mise en évidence que par Einstein lui-même vers 1910-1916 en énonçant le principe d'équivalence dont nous parlerons un peu plus loin.

### *II -3 Principe de l'action et de la réaction ou 3ème loi de Newton*

> *« L'action est toujours égale et opposée à la réaction ; c'est à dire, que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont égales, et dans des directions contraires. »*

Newton justifiait cette troisième et dernière loi par des exemples concrets : « *si on presse une pierre avec le doigt, le doigt est pressé en même temps par la pierre* », ou encore « *Si un cheval tire une pierre par le moyen d'une corde, il est également tiré par la pierre : car la corde qui les joint et qui est tendue des deux côtés, fait un effort égal pour tirer la pierre vers le cheval, et le cheval vers la pierre ; et cet effort s'oppose autant au mouvement de l'un [le cheval], qu'il excite le mouvement de l'autre [la pierre].* ». Afin de mieux comprendre ce dernier exemple, réactualisons-le en détaillant comment on pourrait vérifier ce principe : remplaçons le cheval de Newton par une fusée de masse $M$ à laquelle est attachée une pierre de masse $m$ grâce à un fil inextensible de masse négligeable. Pour s'affranchir des forces de gravitation terrestre et de frottement, imaginons ces deux objets initialement au repos dans l'espace. La fusée est munie d'un moteur contrôlé par une expérimentatrice. A l'instant t = 0, l'expérimentatrice actionne le moteur programmé pour fournir une force de poussée toujours constante $\vec{F}$. La fusée démarre donc avec une accélération $\vec{a}_1$ telle que $\vec{a}_1 = \vec{F}/M$.

Au moment où le fil se tend, l'expérimentatrice observe que la pierre se met en mouvement. Elle conclut qu'une force $\vec{Y}$ agit sur cette pierre pour lui communiquer une accélération $\vec{a}_2$ et que cette force ne peut provenir que de l'action de la fusée sur la pierre via le fil. Dans le même temps, l'expérimentatrice observe que l'accélération $\vec{a}_1$ de la fusée a diminué lorsque le fil s'est tendu bien que la poussée $\vec{F}$ n'ait pas changé. L'expérimentatrice, si elle fait confiance au principe fondamental de la dynamique, se voit donc obligée d'admettre qu'une nouvelle force $\vec{X}$ opposée à $\vec{F}$ agit sur la fusée, et elle interprète cette nouvelle force comme la force de réaction provenant de la pierre via le fil. Les équations du mouvement pour chacun des deux objets (fusée et pierre), une fois le fil tendu s'écrivent :

pour la fusée : $\vec{F} + \vec{X} = M\ \vec{a}_1$
pour la pierre : $\vec{Y} = m\,\vec{a}_2$

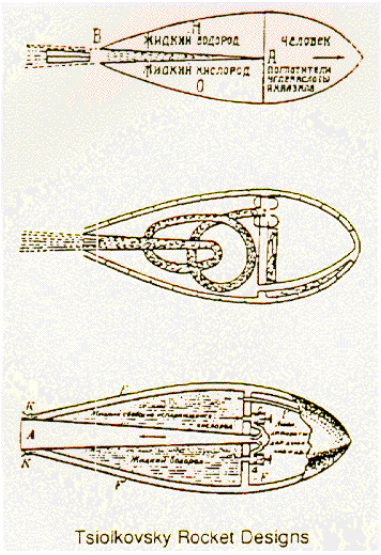
Le principe de l'action et de la réaction stipule que $\vec{Y} = -\vec{X}$ (l'action est égale et opposée à la réaction). Pour s'en rendre compte, l'expérimentatrice part du constat que le fil inextensible restant tendu tout au long du mouvement, c'est donc que les deux objets ont adopté le même mouvement accéléré, c'est à dire : $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$. Elle est alors en droit de considérer que ces deux objets reliés par le fil tendu ne forment plus qu'un seul et même objet de masse $(M+m)$ en mouvement sous l'effet de la force de poussée $\vec{F}$, de sorte qu'on puisse écrire :

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}}{(M+m)}$$

Injectant ce résultat dans les deux équations précédentes, l'expérimentatrice trouve :

$$\vec{Y} = -\vec{X} = \frac{m}{M+m}\ \vec{F}$$

et conclut que l'action ($\vec{Y}$) est égale et opposée à la réaction ($\vec{X}$).




Le principe de l'action et de la réaction donne lieu à plusieurs applications pratiques importantes comme le fonctionnement d'une fusée par exemple : imaginons un objet capable d'éjecter une substance (gaz) animée d'une grande vitesse. D'après le principe de l'action et de la réaction, le gaz éjecté agit sur cet objet avec une force égale et opposée à la force d'éjection et lui communique donc une accélération opposée à la sienne : c'est le fondement de la théorie du mouvement d'une fusée énoncée pour la première fois par Konstantin Tsiolkovski (1857-1935). Une fusée est un corps de masse variable au cours du temps, et pour ce type d'objet l'équation de la dynamique doit être modifiée. Nous y reviendrons au IV.

Ramené au cas de deux points matériels en interaction l'un avec l'autre, le principe de l'action et de la réaction s'exprime de la façon suivante :

> *Principe de l'action et de la réaction (3ème loi de Newton) : quand deux points matériels 1 et 2 interagissent entre eux, la force $\vec{F}_{12}$ produite par 1 sur 2 est égale et opposée à la force $\vec{F}_{21}$ produite par 2 sur 1 à chaque instant.*

On sait aujourd'hui que cette troisième loi du mouvement n'est pas entièrement correcte : elle présuppose en effet que la particule 1 par exemple réagisse immédiatement à tout déplacement de la particule 2 quelle que soit la distance qui les sépare. Or depuis Einstein, on sait qu'il faut un intervalle de temps fini pour que l'information relative au déplacement de la particule 2 parvienne à la particule 1 : la vitesse de cette information ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière. C'est pourquoi certaines personnes préfèrent aujourd'hui remplacer la 3ème loi de Newton par une autre loi qui lui est intimement liée : la loi de conservation de la quantité de mouvement que nous verrons au IV. En mécanique classique, chacune de ces deux lois peut se déduire l'une de l'autre et n'importe laquelle des deux peut être prise comme principe de départ. En mécanique relativiste par contre, la loi de conservation de la quantité de mouvement est toujours valable [♠], mais pas la loi de l'action et de la réaction.

[♠] La quantité de mouvement relativiste ne s'écrit pas de la même façon que la quantité de mouvement classique que vous connaissez sans doute déjà : p = mv. En fait, la loi de conservation de la quantité de mouvement classique se déduit de la loi relativiste en faisant tendre la vitesse de la lumière vers l'infini.

## III - APPLICATION PRATIQUE DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Comme on l'a dit dans l'introduction, le principe fondamental de la dynamique sert à répondre à la question : étant données les forces qui agissent sur un point matériel, quel sera le mouvement de ce point ? C'est typiquement le type de problème que vous aurez à résoudre. Voici la procédure pratique pour y répondre :

**-1**. On se donne les forces en présence pour le problème étudié

**-2**. On se choisit un référentiel $\{O,xyz\}$, un système de coordonnées et sa base associée, bien adaptés aux éventuelles symétries du problème. Le point matériel est repéré par un point M, et on connaîtra le mouvement du point matériel si on connaît le vecteur $\overrightarrow{OM}$ à chaque instant.

**-3**. On écrit le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base choisie et on calcule le vecteur accélération $\vec{a}$ comme nous l'avons fait en cinématique.

**-4**. Après avoir écrit les forces en présence (dont la résultante est $\vec{F}$) dans la même base que $\vec{a}$, on applique le principe fondamental de la dynamique : $\vec{F} = m\,\vec{a}$. On obtient alors ce qu'on appelle **les équations du mouvement**. Elles se présentent de façon générale sous la forme d'un système d'équations différentielles du second ordre en temps (car $\vec{a}$ est la dérivée seconde du vecteur position) qu'il faut résoudre.

**-5**. On résout les équations différentielles pour obtenir leur solution générale. Cette tâche est facile pour les cas simples que nous verrons cette année, mais bien souvent, c'est à ce niveau que surgissent les difficultés mathématiques.

**-6**. Si il y a des conditions initiales dans le problème (par exemple, au temps t=0 la particule a une vitesse $\vec{v}_0$ donnée et elle est au point O), on les injecte dans les solutions générales trouvées précédemment, ce qui permet de déterminer les constantes qui sont survenues au cours de la résolution des équations.

**-7**. A ce niveau, vous avez résolu le problème du mouvement, puisque vous avez obtenu le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction du temps, c'est-à-dire les équations paramétriques de la trajectoire. Pour obtenir l'équation de la trajectoire proprement dite, il vous suffira d'éliminer le temps des équations paramétriques.

### *III – 1 Un exemple d'application*

Voici un exemple d'application de la seconde loi de la dynamique qui vous permettra de voir comment on est capable de prévoir le mouvement d'un point matériel si on connaît les forces qui agissent sur lui. Cet exemple est plus compliqué que ce que vous ferez en TD ou à l'examen. Vous devez le suivre pas à pas en effectuant les calculs intermédiaires qui ne sont pas écrits. Si vous ne comprenez pas certains passages du raisonnement, n'hésitez pas à demander à vos enseignants de TD ou de cours.

Considérons une particule de masse $m$, de charge $q > 0$, soumise à un champ magnétique $\vec{B}$ constant. La particule évolue dans un milieu tel que si elle se déplace à la

vitesse $\vec{v}$, elle est soumise à une force de frottement $\vec{F}_{frot} = -k\,\vec{v}$ où $k > 0$ est un coefficient de frottement constant. Quel mouvement adopte la particule dans ces conditions ?

***Inventaire des forces***

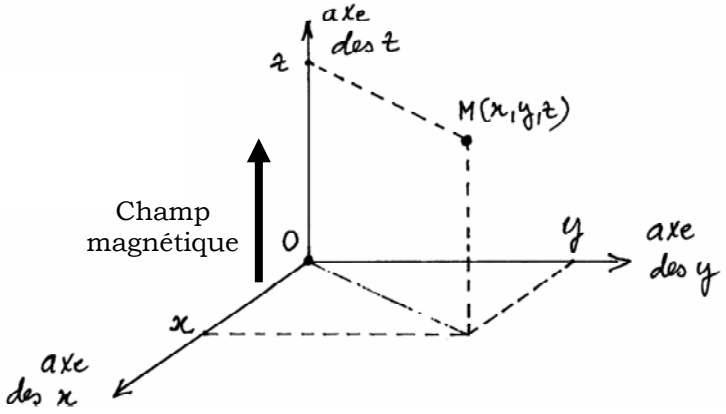
*Force magnétique* : d'après l'énoncé, la particule est soumise à un champ magnétique. La force qu'elle subit sous l'effet de ce champ est $\vec{F}_{mag} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ si $\vec{v}$ est sa vitesse, $q$ sa charge et $\vec{B}$ le champ magnétique.

*Force de frottement* : cette force est clairement indiquée dans l'énoncé : $\vec{F}_{frot} = -k\,\vec{v}$ si $\vec{v}$ est la vitesse de la particule.

*Poids de la particule* : En règle générale, dès lors qu'il s'agit de particules de masse extrêmement faible (masse du proton par exemple : $m_p = 1.6727.10^{-27}\ kg$), cette force est largement négligeable devant toutes les autres forces du problème et on ne la prend pas en compte. C'est ce que nous ferons ici (on peut aussi s'imaginer que l'expérience n'est pas réalisée sur terre).

***Référentiel***

Un bon choix sera de prendre un référentiel dont un axe, l'axe z par exemple, est parallèle au champ magnétique. On choisit donc le référentiel $\Re\{Oxyz\}$ indiqué sur la figure et on travaillera avec les coordonnées cartésiennes $x, y, z$ et la base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ associée pour repérer la particule et écrire les forces et l'accélération.




***Vitesse, accélération et forces dans le système de coordonnées et la base choisis***

Soit $M$ le point représentant la particule. On a : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$ donc :

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z$$
$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u}_x + \ddot{y}\,\vec{u}_y + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

Concernant la force magnétique : $\vec{F}_{mag} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$ ; d'où, après calcul du produit vectoriel :

$$\vec{F}_{mag} = qB\,\dot{y}\,\vec{u}_x - qB\,\dot{x}\,\vec{u}_y$$

Pour la force de frottement : $\vec{F}_{frot} = -k\,\vec{v} = -k\left[\dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z\right]$

***Equations du mouvement***

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit ici :

$$\vec{F}_{mag} + \vec{F}_{frot} = m\,\vec{a}$$

On identifie les composantes selon $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ des membres de droite et de gauche de cette équation pour obtenir les équations du mouvement :

$$\begin{cases} qB\,\dot{y} - k\,\dot{x} = m\,\ddot{x} & (1) \\ -qB\,\dot{x} - k\,\dot{y} = m\,\ddot{y} & (2) \\ -k\,\dot{z} = m\,\ddot{z} & (3) \end{cases}$$

***Résolution des équations***

Les équations $(1)$ et $(2)$ sont des équations couplées, c'est à dire que les variables $x$ et $y$ apparaissent dans chacune de ces deux équations (via leurs dérivées première et seconde par rapport au temps). Elles sont linéaires et à coefficients constants. Elles semblent être du second ordre, mais on voit que ni $x$ ni $y$ ne sont présents : ces équations sont donc du premier ordre en $\dot{x},\ \dot{y}$.

L'équation $(3)$ est découplée : elle ne concerne que la variable $z$. Elle est linéaire, à coefficients constants et, comme les deux autres équations, elle n'est du second ordre qu'en apparence car $z$ n'intervient que via ses dérivées première et seconde par rapport au temps : l'équation $(3)$ peut donc être vue comme une équation différentielle du premier ordre en $\dot{z}$.

*Commençons par résoudre l'équation* $(3)$. $\dot{z}$ est la composante selon l'axe des $z$ (axe du champ magnétique) du vecteur vitesse. Posons alors $\dot{z} = v_z$ et réécrivons l'équation $(3)$ sous la forme :

$$-k\,v_z = m\,\dot{v}_z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv_z}{v_z} = -\frac{k}{m}\,dt$$

cette équation s'intègre directement, et on obtient la solution générale :

$$v_z = C_1\ e^{-\frac{k}{m}t}$$

où $C_1$ est une constante. La composante de la vitesse le long de l'axe des $z$ décroît donc exponentiellement avec le temps. Manifestement, le rapport $k/m$ a les dimensions de l'inverse d'un temps. Posons pour simplifier $\tau = m/k$. On voit que $\tau$ est un temps caractéristique (qu'on appelle *temps de relaxation*) au bout duquel la composante $v_z$ est divisée par $e$. Au temps $t = 5\tau$, $v_z$ devient quasiment nulle.

La constante $C_1$ est déterminée par les conditions initiales du problème. Rien n'est indiqué dans l'énoncé concernant ces conditions initiales ; nous prendrons donc les plus générales qui soient : au temps $t = 0$, posons que la composante $v_z$ du vecteur vitesse vaut $v_{0,z}$. On a donc $v_z(t = 0) = v_{0,z} = C_1$. Si bien qu'au final, la composante selon $z$ du vecteur vitesse s'écrit :

$$v_z = \dot{z} = v_{0,z}\ e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Nous n'en avons pas fini avec l'axe des $z$ car il faut encore déterminer $z(t)$. On l'obtient facilement en intégrant le résultat précédent par rapport au temps :

$$z = \int \dot{z}\, dt = -\tau\, v_{0,z}\ e^{-\frac{t}{\tau}} + C_2$$

$C_2$ est une constante déterminée par les conditions initiales. Nous poserons que $z\,(t = 0) = z_0$, ce qui nous permet d'écrire $z$ sous la forme :

$$z = z_0 + \tau\, v_{0,z}\,[\,1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\,]$$

*Résolvons maintenant les équations* $(1)$ et $(2)$. Elles sont couplées, mais comme elles sont aussi linéaires, on peut facilement les découpler. Il existe différentes façons de procéder, en voici une : l'équation $(1)$ nous permet d'écrire $\dot{y}$ en fonction de $\dot{x}$ et $\ddot{x}$ :

$$\dot{y} = \frac{k}{qB}\ \dot{x} + \frac{m}{qB}\ \ddot{x}$$

et en dérivant par rapport au temps, on obtient $\ddot{y}$ en fonction de $\ddot{x}$ et $\dddot{x}$ :

$$\ddot{y} = \frac{k}{qB}\ \ddot{x} + \frac{m}{qB}\ \dddot{x}$$

En injectant ces deux résultats dans l'équation $(2)$, on obtient l'équation différentielle découplée pour la variable $x$ :

$$\left(qB + \frac{k^2}{qB}\right)\dot{x} + 2\ \frac{mk}{qB}\ \ddot{x} + \frac{m^2}{qB}\ \dddot{x} = 0$$

Cette équation semble être du troisième ordre en $x$, mais en fait elle n'est que du deuxième ordre puisque $x$ n'apparaît pas. Comme précédemment, posons $\dot{x} = v_x$ la composante du vecteur vitesse le long de l'axe des $x$. Divisons par $m$ l'équation et faisons apparaître le temps de relaxation $\tau$ défini plus haut. On obtient :

$$\left(\frac{qB}{m} + \frac{m}{qB\tau^2}\right)v_x + 2\ \frac{m}{qB\tau}\ \dot{v}_x + \frac{m}{qB}\ \ddot{v}_x = 0$$

Les deux termes entre parenthèse doivent avoir les mêmes dimensions puisqu'ils s'ajoutent. Comme $\tau$ est un temps, il s'ensuit nécessairement que la quantité $qB/\ m$ a les dimensions de l'inverse d'un temps. Posons alors $\omega = qB/m$ ; $\omega$ a les dimensions d'une fréquence et l'équation à résoudre prend la forme simplifiée :

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega\tau^2}\right) v_x + \frac{2}{\omega\tau}\ \dot{v}_x + \frac{1}{\omega}\ \ddot{v}_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{v}_x + \frac{2}{\tau}\ \dot{v}_x + \left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right) v_x = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre en $v_x$ : la solution générale d'une telle équation est de la forme $C_3\ e^{r_1 t} + C_4\ e^{r_2 t}$ où $r_1$, $r_2$ sont les racines du polynôme caractéristique de l'équation. Dans notre cas, les racines sont $-1/\tau \pm i\omega$ ; la solution générale peut donc s'écrire :

$$v_x = \dot{x} = C_3\ e^{(-1/\tau + i\omega)t} + C_4\ e^{(-1/\tau - i\omega)t} = e^{-t/\tau}\left[C_3\ e^{+i\omega t} + C_4\ e^{-i\omega t}\right]$$

Pour notre problème, il sera préférable d'écrire $v_x$ sous une forme équivalente :

$$v_x = \dot{x} = e^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega t + \phi)\right]$$

où les constantes $A$ et $\phi$ sont reliées aux constantes $C_3$ et $C_4$ et sont déterminées par les conditions initiales : au temps $t = 0$, $v_x(t=0) = v_{0,x}$. Mais vous devez vous rendre compte que l'on obtient ici une seule condition pour deux inconnues $A$ et $\phi$ :

$$v_{0,x} = A\ \cos\phi \qquad (4)$$

ce qui empêche de les déterminer. Cette difficulté provient du fait que les équations *(1)* et *(2)* étaient couplées au départ, ce qui veut dire que pour déterminer $A$ et $\phi$, il faut aussi considérer $\dot{y} = v_y$ que l'on obtient directement grâce à l'équation *(1)* :

$$\dot{y} = v_y = \frac{k}{qB}\ \dot{x} + \frac{m}{qB}\ \ddot{x} = \frac{1}{\omega\,\tau}\ \dot{x} + \frac{1}{\omega}\ \ddot{x}$$

Après un calcul simple, on trouve :

$$v_y = \dot{y} = -\ e^{-t/\tau}\left[A\sin(\omega t + \phi)\right]$$

en posant $v_y(t=0) = v_{0,y}$ comme autre condition initiale, on voit que $A$ et $\phi$ doivent aussi vérifier l'équation :

$$-A\sin\phi = v_{0,y} \qquad (5)$$

Les équations *(4)* et *(5)* permettent maintenant de déterminer $A$ et $\phi$ en fonction des conditions initiales. Le calcul donne :

$$\begin{cases} A^2 = v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2 \\ tg\phi = -\dfrac{v_{0,y}}{v_{0,x}} \end{cases}$$

Arrêtons-nous un instant sur ce résultat afin de le simplifier. Sans restreindre la généralité du problème, nous avions choisi de prendre comme axe des $z$ l'axe du champ magnétique. De la même façon, on peut très bien imaginer d'avoir choisi l'axe des $x$ par exemple, de sorte qu'il soit parallèle à la projection du vecteur vitesse initiale de la particule dans le plan $xOy$ (c'est-à-dire, faire en sorte que : $v_{0,y} = 0$). Vous devez bien comprendre que ce choix arbitraire n'enlève rien à la généralité de la solution : une personne qui aurait fait un autre choix trouvera la même solution, à une rotation des axes $x$ et $y$ près. Avec ce choix particulier, on trouve alors que $\phi = 0$ et $A = v_{0,x}$, de sorte que l'on ait :

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = v_{0,x}\ e^{-t/\tau}\ \cos\omega\, t \\ v_y = \dot{y} = -\,v_{0,x}\ e^{-t/\tau}\ \sin\omega\, t \end{cases}$$

Il reste à déterminer $x(t)$ et $y(t)$. Pour cela, il faut intégrer $v_x$ et $v_y$, ce qui demande de faire des intégrations par parties. En effet :

$$\begin{cases} \displaystyle\int e^{-t/\tau}\cos\omega\, t\ dt = -\tau\left[e^{-t/\tau}\cos\omega\, t\right] - \omega\,\tau\int e^{-t/\tau}\sin\omega\, t\ dt \\ \displaystyle\int e^{-t/\tau}\sin\omega\, t\ dt = -\tau\left[e^{-t/\tau}\sin\omega\, t\right] + \omega\,\tau\int e^{-t/\tau}\cos\omega\, t\ dt \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \displaystyle\int e^{-t/\tau}\cos\omega\, t\ dt = \frac{e^{-t/\tau}}{1+\omega^2\tau^2}\left[-\tau\cos\omega\, t + \omega\tau^2\sin\omega\, t\right] \\ \displaystyle\int e^{-t/\tau}\sin\omega\, t\ dt = \frac{e^{-t/\tau}}{1+\omega^2\tau^2}\left[-\tau\sin\omega\, t - \omega\tau^2\cos\omega\, t\right] \end{cases}$$

on a donc :

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \dot{x}\ dt = v_{0,x}\int e^{-t/\tau}\cos\omega\, t\ dt = \frac{v_{0,x}\ e^{-t/\tau}}{1+\omega^2\tau^2}\left[-\tau\cos\omega\, t + \omega\tau^2\sin\omega\, t\right] + C_5 \\ y = \displaystyle\int \dot{y}\ dt = -\,v_{0,x}\int e^{-t/\tau}\sin\omega\, t\ dt = \frac{v_{0,x}\ e^{-t/\tau}}{1+\omega^2\tau^2}\left[\tau\sin\omega\, t + \omega\tau^2\cos\omega\, t\right] + C_6 \end{cases}$$

où les constantes $C_5$ et $C_6$ sont déterminées par les dernières conditions initiales à notre disposition : lorsque $t = 0$, $x(t=0) = x_0$ et $y(t=0) = y_0$. Ce qui donne :

$$\begin{cases} C_5 = x_0 + \dfrac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}\ v_{0,x} \\ C_6 = y_0 - \dfrac{\omega\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\ v_{0,x} \end{cases}$$

Après cette longue partie mathématique, il est temps de rassembler nos résultats. Nous avons finalement trouvé pour la vitesse de la particule, avec un choix de l'axe des $x$ tel que $v_{0,y} = 0$ :

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = v_{0,x}\ e^{-t/\tau}\ \cos\omega\, t \\ v_y = \dot{y} = -\, v_{0,x}\ e^{-t/\tau}\ \sin\omega\, t \\ v_z = \dot{z} = v_{0,z}\ e^{-t/\tau} \end{cases}$$

et pour la position de la particule (après avoir remplacé $C_5$ et $C_6$ par leurs valeurs) :

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_{0,x}\ e^{-t/\tau}}{1+\omega^2\tau^2}\left[-\tau\cos\omega\, t + \omega\tau^2 \sin\omega\, t\right] + x_0 + \dfrac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}\ v_{0,x} \\ y = \dfrac{v_{0,x}\ e^{-t/\tau}}{1+\omega^2\tau^2}\left[\tau\sin\omega\, t + \omega\tau^2 \cos\omega\, t\right] + y_0 - \dfrac{\omega\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\ v_{0,x} \\ z = z_0 + \tau\ v_{0,z}\left[1 - e^{-t/\tau}\right] \end{cases}$$

A ce stade, nous avons résolu le problème : nous avons trouvé les équations paramétriques de la trajectoire de la particule lorsqu'elle subit l'effet des deux forces (magnétique et de frottement) compte tenu de sa vitesse et de sa position initiales.

*Etude plus précise de la trajectoire*

Il est possible de simplifier encore les expressions de $x$ et de $y$ en faisant appel aux deux formules trigonométriques :

$$F\cos(\omega t + \beta) = F\cos\beta\cos\omega t - F\sin\beta\sin\omega t$$
$$D\sin(\omega t + \gamma) = D\cos\gamma\,\sin\omega t + D\sin\gamma\,\cos\omega t$$

en comparant ces formules avec les expressions entre crochets dans $x$ et $y$, on voit que :

$$\begin{cases} D = -F = \tau\ \sqrt{1+\omega^2\tau^2} \\ tg\,\gamma = tg\,\beta = \omega\tau \end{cases}$$

Nous garderons $\beta$ comme paramètre, tel que $tg\beta = \omega\tau$, de sorte que les équations paramétriques de la trajectoire s'écrivent maintenant :

$$\begin{cases} x = -\tau\, v_{0,x} \cos\beta \;\; e^{-t/\tau} \cos(\omega\, t + \beta) \;\; + x_0 + \tau \cos^2\beta \;\; v_{0,x} \\ y = \;\tau\, v_{0,x} \cos\beta \;\; e^{-t/\tau} \sin(\omega\, t + \beta) \;\; + y_0 - \tau \cos\beta \sin\beta \;\; v_{0,x} \\ z = z_0 + \tau\, v_{0,z} \left[\, 1 - \;\; e^{-t/\tau} \,\right] \end{cases}$$

Lorsque le temps $t$ devient très grand ($t \to \infty$), la vitesse de la particule s'annule et la particule s'arrête en un point que nous dénommerons $M_\infty$ qui a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{OM_\infty} = \begin{cases} x_\infty = x_0 + \tau \cos^2\beta \;\; v_{0,x} \\ y_\infty = y_0 - \tau \cos\beta \sin\beta \;\; v_{0,x} \\ z_\infty = z_0 + \tau\, v_{0,z} \end{cases}$$

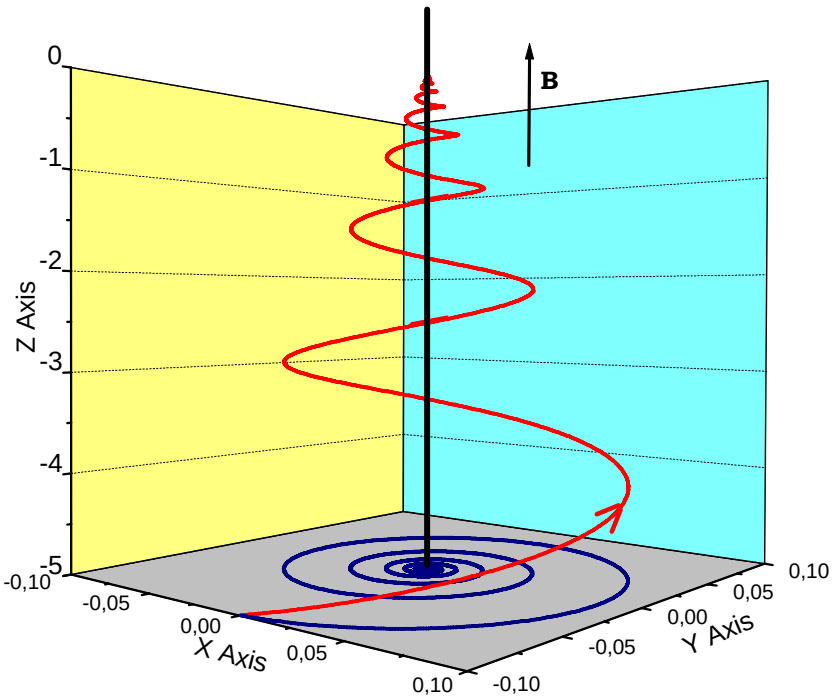
Choisissons ce point comme nouvelle origine de notre référentiel. Les équations paramétriques de la trajectoire concernent maintenant le vecteur $\overrightarrow{M_\infty M}$ et elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathrm{X} = x - x_\infty = -\tau\, v_{0,x} \cos\beta \;\; e^{-t/\tau} \cos(\omega\, t + \beta) \\ \mathrm{Y} = y - y_\infty = \;\tau\, v_{0,x} \cos\beta \;\; e^{-t/\tau} \sin(\omega\, t + \beta) \\ \mathrm{Z} = z - z_\infty = -\tau\, v_{0,z} \;\; e^{-t/\tau} \end{cases}$$

Afin de mieux voir ce qu'est cette trajectoire, passons enfin en coordonnées cylindriques $\rho, \varphi, z$ telles que $X = \rho\cos\varphi\,;\, Y = \rho\sin\varphi\,;\, Z = Z$. Avec ce système de coordonnées, les équations paramétriques de la trajectoire s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \; e^{-t/\tau} \\ \varphi = \pi - \beta - \omega\, t \\ Z = -Z_0 \; e^{-t/\tau} \end{cases}$$

avec $\rho_0 = \tau\, v_{0,x} \cos\beta$ et $Z_0 = \tau\, v_{0,z}$. C'est l'équation d'une « hélice » un peu particulière dont la projection dans le plan $XM_\infty Y$ (plan parallèle au plan $xOy$) est une spirale logarithmique. La particule suit cette trajectoire avec une vitesse angulaire constante $\dot{\varphi} = -\omega$




Trajectoire de la particule chargée soumise à un champ magnétique et à une force de frottement. Notez comme la trajectoire s'enroule autour des lignes de champ magnétique : c'est toujours le cas même en l'absence de frottements. La projection de la trajectoire dans un plan orthogonal à l'axe des $z$ est une spirale logarithmique.

***Commentaires***

Cet exemple d'utilisation du principe fondamental de la dynamique appelle à plusieurs remarques :

**1** - La résolution des équations du mouvement nous a permis de déterminer d'abord les composantes $(v_x, v_y, v_z)$ du vecteur vitesse en fonction du temps, puis, par intégration, les composantes $(x, y, z)$ du vecteur position. Ca n'est pas toujours ce qui arrive : dans de nombreux autres cas, la résolution des équations du mouvement permet de déterminer directement les composantes du vecteur position en fonction du temps sans passer par celles du vecteur vitesse ; cela dépend en fait de la forme des équations différentielles à résoudre, c'est-à-dire de l'expression analytique des forces en présence.

**2** – Importance des conditions initiales - L'équation de la dynamique est une équation différentielle vectorielle du second ordre car elle fait intervenir le vecteur accélération qui n'est rien d'autre que la dérivée seconde du vecteur position que l'on cherche. Cette équation vectorielle donne lieu à 3 équations différentielles du second ordre (une équation différentielle associée à chacune des trois projections de l'équation vectorielle sur les 3 vecteurs de base) que l'on appelle : équations du mouvement. La solution générale de chacune de ces trois équations différentielles du second ordre fait intervenir 2 constantes arbitraires, soit, en tout, 6 constantes d'intégration (les constantes $C_1, C_2, C_3, C_4$ [ ou $A$ et $\varphi$ ], $C_5$ et $C_6$ du problème). Ces constantes, qui surviennent au cours de la résolution des équations différentielles, n'ont a priori pas de signification physique spéciale. Mais selon les

valeurs qu'on leur donne, la trajectoire obtenue peut être radicalement différente : par exemple, si $A = 0$ la trajectoire est alors une droite le long de l'axe des $z$ ; si $C_1 = 0$ la trajectoire est plane, etc… Toutes ces trajectoires sont des solutions possibles au problème posé puisqu'elles obéissent à l'équation de la dynamique de départ. Pour mieux voir à quelle situation physique correspond tel ou tel type de trajectoire, les physiciens remplacent ces constantes d'intégration par 6 autres constantes qui ont une signification physique claire et que l'on appelle **les conditions initiales** : bien souvent, il s'agit du vecteur position (3 composantes) et du vecteur vitesse (3 composantes) à l'instant $t = 0$ où l'on suppose que les forces se mettent en place (elles n'existent pas avant). C'est ce que l'on a fait dans le problème ci-dessus. On se rend compte ainsi que la trajectoire rectiligne par exemple, correspond au cas où la vitesse initiale de la particule est dirigée le long de l'axe du champ magnétique ($v_{0,x} = v_{0,y} = 0$, $v_{0,z} \neq 0$) ; dans ce cas en effet, la force magnétique est nulle (vérifiez-le !) et seule agit la force de frottement qui ne fait que s'opposer à la vitesse : la trajectoire initialement rectiligne le long de l'axe des $z$ (principe d'inertie) reste donc rectiligne le long de cet axe, mais la particule est freinée jusqu'à s'arrêter. Faites vous-même une interprétation physique similaire pour le cas de la trajectoire plane.

**NB1** : il n'est pas toujours simple de passer des constantes d'intégrations aux conditions initiales, comme on l'a vu dans le problème ci-dessus avec la détermination de $A$ et $\varphi$. Mais on s'en sort presque toujours en regardant ce que donne la solution générale au temps $t = 0$, comme on l'a fait.

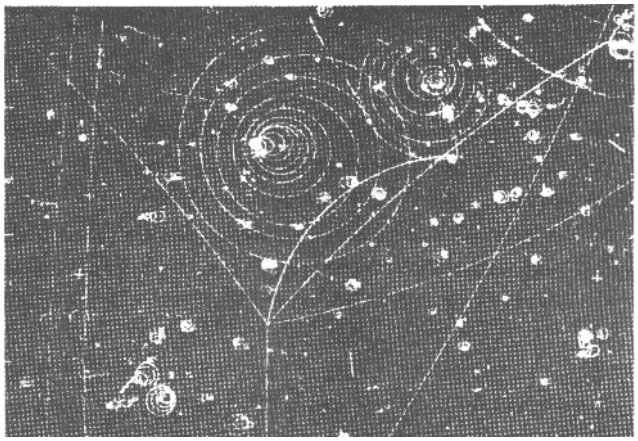
**NB2** : nous verrons plus loin que d'autres conditions initiales peuvent être choisies à la place de la position et de la vitesse. Il arrive souvent que certaines quantités physiques comme l'énergie ou le moment cinétique restent constantes tout au long du mouvement : ce sont ce qu'on appelle des constantes du mouvement. Ces constantes peuvent être prises comme conditions initiales ; elles sont bien sûr reliées aux positions et vitesses initiales.

**3** – Paramètres du problème – Outre les conditions initiales, il n'est pas rare de voir apparaître au cours de la résolution des équations d'autres paramètres qui s'avèrent être physiquement intéressants. C'est le cas dans notre problème des deux paramètres $\tau$ et $\omega$ (ou $\beta$). Ces paramètres sont toujours reliés aux données du problème (masse de la particule, charge de la particule, valeur du champ magnétique, etc…), c'est ce qui permet de les distinguer des conditions initiales. Nous avons déjà interprété $\tau$ comme un temps de relaxation. Quand à $\omega$, nous avons trouvé qu'il indique la vitesse angulaire de la particule dans son mouvement en spirale dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. On appelle souvent $\omega$ la vitesse (angulaire) ou *fréquence cyclotron* ♠: c'est la vitesse angulaire acquise par une particule chargée dès lors qu'elle est plongée dans un champ magnétique.

♠ Un cyclotron est un accélérateur de particules de forme approximativement circulaire conçu et réalisé pour la première fois par Lawrence et Livingstone (1932). Le champ magnétique présent dans le cyclotron sert à rendre circulaire la trajectoire des particules afin que l'appareil reste d'une taille raisonnable (qqs mètres à qqs dizaines de mètres). Un champ électrique pulsé accélère les particules en certains endroits de la trajectoire.

**4** – Choix de l'orientation des axes du référentiel - A deux reprises nous avons fait un choix concernant l'orientation des axes liés au référentiel : premièrement, en choisissant l'axe des $z$ le long du champ magnétique ; deuxièmement, en choisissant l'axe des $x$ tel qu'il soit parallèle à la projection du vecteur vitesse initiale dans le plan $xOy$. Cette simplification n'a rien enlevé à la généralité du problème ; le référentiel $\Re\{Oxyz\}$ a été orienté de cette façon pour simplifier au mieux l'expression analytique de la trajectoire. Dans tout problème, il faut réfléchir à orienter au mieux les axes utilisés dans un souci de simplification.

**5** – Le problème que l'on vient d'étudier a des applications pratiques : les physiciens des particules utilisaient jusqu'à peu des chambres à bulles [♣] pour visualiser les trajectoires des particules. Afin d'obtenir des trajectoires importantes (longues), la chambre à bulles est placée dans un champ magnétique. La mesure expérimentale du rayon de courbure associé à cette trajectoire peut par exemple conduire à déterminer le produit $\omega\tau$ et ainsi, connaissant le coefficient $k$ et la valeur du champ, remonter à la charge de la particule inconnue.



Traces de particules dans une chambre à bulle. Les deux trajectoires en spirale les mieux visibles sont celles de deux positrons (électrons de charge positive). La photographie est prise à peu près parallèlement au champ magnétique. Comparez ces trajectoires avec celle que nous avons calculée.

En réalité, on connaît le plus souvent la nature de la particule et cet appareil sert en fait à déterminer son énergie initiale (sa vitesse initiale) en mesurant le rayon de courbure de la trajectoire.

[♣] Une chambre à bulle fonctionne à peu près de la façon suivante : quand une particule chargée traverse la matière liquide, elle ionise quelques atomes voisins et transfère une part d'énergie cinétique aux électrons produits. Ces électrons ralentissent en chauffant localement le liquide. Si ce liquide est déjà surchauffé (cas des chambres à bulles), il commencera à bouillir en ces points chauds localisés, ce qui permet de visualiser la trajectoire de la particule. Une chambre peut atteindre plusieurs mètres de cotés.

## IV – CAS DES REFERENTIELS NON GALILEENS

### *IV -1 Invariance galiléenne*

Nous avons vu que les lois de la dynamique énoncées jusqu'à présent ne s'appliquent que dans un référentiel galiléen. Nous allons démontrer maintenant que ces lois sont invariantes par changement de référentiel galiléen. Considérons à cet effet un référentiel galiléen $\Re\{O,xyz\}$ par rapport auquel on étudie le mouvement d'un point matériel $M$ de masse $m$. Qualifions d'absolues la vitesse et l'accélération du point matériel par rapport à ce référentiel : $\vec{v}_a$ et $\vec{a}_a$. Introduisons maintenant un second référentiel galiléen $\Re'\{O',x'y'z'\}$ en mouvement de translation uniforme à la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ par rapport à $\Re$, et montrons que si les 3 lois de la dynamique sont valables dans $\Re$ alors elles le sont dans $\Re'$.

-> *Principe fondamental de la dynamique* : Si le point matériel est soumis à une ou plusieurs forces dont la résultante est $\vec{F}$ dans le référentiel $\Re$, alors la 2ème loi de Newton s'écrit dans ce référentiel : $\vec{F} = m\,\vec{a}_a$. Qu'en est-il dans le référentiel $\Re'$ ?

D'après la loi de transformation des accélérations, l'accélération (relative) de ce point matériel dans le référentiel $\Re'$ est : $\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c$. Mais ici, comme le mouvement de $\Re'$ par rapport à $\Re$ est rectiligne uniforme, on en déduit que $\vec{a}_e = \vec{a}_c = \vec{0}$. D'où :

$$\vec{a}_r = \vec{a}_a = \vec{F}/m$$

Ainsi, la 2ème loi de la dynamique s'écrit dans $\Re'$ : $\vec{F}' = m\,\vec{a}_r$ avec $\vec{F}' = \vec{F}$. En conclusion, cette loi est donc invariante par changement de référentiel galiléen. L'observateur de $\Re'$ ne verra pas forcément le point matériel faire le même mouvement que celui vu par l'observateur de $\Re$, mais ce mouvement est dû à la même résultante des forces que dans $\Re$ ($\vec{F}' = \vec{F}$) avec simplement des conditions initiales (vitesse et position initiale du point matériel) différentes ¶.

-> *Principe d'inertie* : Si le point matériel n'est soumis à aucune force dans le référentiel $\Re$ alors il est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_a$ d'après le principe d'inertie appliqué dans ce référentiel. Qu'en est-il dans le référentiel $\Re'$ ?

D'après ce qui précède, si $\vec{F} = \vec{0}$ dans $\Re$, c'est que $\vec{F}' = \vec{F} = \vec{0}$ dans $\Re'$. Donc, le point matériel n'est soumis à aucune force dans $\Re'$ et sa vitesse $\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e$ est bien constante puisque $\vec{v}_a$ et $\vec{v}_e$ le sont. La première loi de Newton est donc invariante par changement de référentiel galiléen. Cela était d'ailleurs évident puisque c'est à l'aide de cette loi que nous avons défini la notion de référentiel galiléen.

---

¶ Par exemple, si on prend comme conditions initiales dans $\Re$ : au temps $t = 0$ le point $M$ est en $O$ [$\overrightarrow{OM} = \vec{0}$] avec la vitesse initiale $\vec{v}_{0,a}$. Cela devient dans $\Re'$ : au temps $t = 0$ le point $M$ est en $O$ [$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O}$] avec la vitesse initiale $\vec{v}_{0,r}$ [$\vec{v}_{0,r} = \vec{v}_{0,a} - \vec{v}_e$].

-> <u>*Principe de l'action et de la réaction*</u> : considérons dans $\Re$ deux points matériels 1 et 2 isolés, de masses $m_1$ et $m_2$, en interaction. Soit $\vec{F}_{2\to1}$ la force que 2 exerce sur 1, et soit $\vec{F}_{1\to2}$ la force que 1 exerce sur 2. Le principe de l'action et de la réaction stipule que $\vec{F}_{1\to2} = \vec{F}_{2\to1}$. Qu'en est-il dans le référentiel $\Re'$ ?

La réponse est simple : dans $\Re'$, la force qui agit sur le point matériel 2 est $\vec{F}'_{1\to2} = \vec{F}_{1\to2}$ tandis que la force qui s'exerce sur le point matériel 1 est $\vec{F}'_{2\to1} = \vec{F}_{2\to1}$. On a donc : $\vec{F}'_{1\to2} = \vec{F}'_{2\to1}$, ce qui signifie que le principe de l'action et de la réaction s'applique aussi dans $\Re'$.

En conclusion :

> *Les lois fondamentales de la dynamique sont invariantes par changement de référentiel galiléen. On appelle cette propriété :* ***invariance galiléenne***

Einstein a généralisé ce résultat en postulant que non seulement les lois de la dynamique étaient invariantes par changement de référentiel galiléens, mais aussi toutes les autres lois fondamentales de la physique. C'est ce qu'on appelle le **principe de relativité (restreinte)**. A l'époque d'Einstein, on avait constaté que les lois de l'électromagnétisme (régies par les équations de Maxwell que vous verrez en seconde année) n'étaient pas invariantes par changement de référentiel galiléen si on admettait (comme nous l'avons admis) que pour changer de référentiel, les lois de transformation à utiliser étaient celles que nous avons vues en cinématique : $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$ et $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ avec, pour un référentiel galiléen : $\vec{v}_e = \overrightarrow{Cte} = d\overrightarrow{OO'}/dt$. De même, d'après ces lois de transformation, on avait constaté que la vitesse de la lumière dans le vide ne devait pas être la même dans tous les référentiels galiléens (si cette vitesse est $\vec{c}$ par rapport au référentiel $\Re$, alors elle devrait être égale à $\vec{c} - \vec{v}_e$ par rapport au référentiel $\Re'$). Or les expériences des physiciens Michelson et Morley, réalisées en 1887, montraient qu'il n'en était rien : on trouvait toujours la même valeur.

Au prix d'une intense réflexion à propos des notions de temps et d'espace, Einstein proposa d'ériger l'invariance galiléenne en principe général de la physique et d'admettre dans le même temps que la vitesse de la lumière est une constante universelle de la physique : on doit toujours trouver la même valeur quelque soit le référentiel galiléen choisi. Il démontra qu'en conséquence, les lois de transformation pour passer d'un référentiel galiléen à un autre s'en trouvaient modifiées ¶ et que nos conceptions sur l'espace et le temps devaient être sérieusement révisées : le temps ne s'écoule pas de la même façon dans deux référentiels galiléens (on n'a pas $t = t'$ comme nous l'avons présupposé) de même que les distances ne sont pas invariantes par changement de référentiel galiléen (la longueur d'une règle mesurée dans $\Re$ n'est pas la même que sa longueur mesurée dans $\Re'$).

---

¶ On appelle ces nouvelles lois de transformations : transformations de Lorentz, du nom du physicien qui les a découvertes (avant Einstein).

### *IV -2 <u>Le Principe Fondamental de la Dynamique dans les référentiels non-galiléens – Forces d'inertie</u>*

Plaçons nous maintenant dans un référentiel $\Re'$ non-galiléen, en mouvement quelconque par rapport au référentiel galiléen $\Re$. Si on étudie le mouvement d'un point matériel $M$ de masse $m$ soumis à une ou plusieurs forces $\vec{F}$ dans le référentiel $\Re$, on peut écrire la loi de la dynamique : $\vec{F} = m\,\vec{a}_a$.

Dans $\Re'$ une observatrice verra le point matériel se mouvoir avec une accélération (relative) : $\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c$. Cette fois, les accélérations d'entraînement $\vec{a}_e$ et de Coriolis $\vec{a}_r$ ne sont plus nulles puisque le mouvement de $\Re'$ par rapport à $\Re$ est quelconque. On a donc :

$$\vec{a}_r = \vec{F}/m - \vec{a}_e - \vec{a}_c$$

Ainsi, l'observatrice de $\Re'$ verra le point matériel se mouvoir selon une loi du mouvement qu'elle devra écrire :

$$\boxed{m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c}$$

C'est la 2ème loi de Newton écrite dans un référentiel non-galiléen. On l'interprète comme suit : dans un référentiel non-galiléen, en plus des forces « habituelles » ($\vec{F}$) qui s'exercent sur le point matériel, il faut rajouter les **forces d'inertie** qui s'exercent aussi sur lui, et qui sont dues au mouvement d'entraînement du référentiel non-galiléen.

-> <u>*Force d'inertie d'entraînement*</u> - On appelle force d'inertie d'entraînement la quantité :

$$\vec{F}_e = -m\,\vec{a}_e = -m\left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M})\right]$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation associé au mouvement de $\Re'$ par rapport à $\Re$. Vous avez sans aucun doute déjà vécu des situations de mouvement telles que vous avez ressenti cette force :

Dans une voiture qui accélère fortement, vous êtes plaqué contre le siège ; si cette voiture freine brutalement, vous êtes projeté vers le pare-brise. Dans les deux cas, vous êtes dans un référentiel (la voiture) non-galiléen en mouvement accéléré par rapport au référentiel terrestre galiléen et c'est le terme en $-m\,d^2\overrightarrow{OO'}/dt^2$ de la force d'inertie d'entraînement qui est responsable de ces effets ($\vec{\Omega} = \vec{0}$ ici).

Dans les manèges en rotation rapide de la foire, ou dans une voiture prenant un virage de façon un peu « sèche », vous avez ressenti une force dont la tendance était de vous éloigner du centre de rotation. Le terme en $-m[\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M})]$ (pour une rotation à $\vec{\Omega}$ constant) est responsable de ces effets. On l'appelle **force centrifuge**.

Le terme en $-m(d\vec{\Omega}/dt\wedge\overrightarrow{O'M})$ est moins évident à appréhender car sa direction dépend des variations du vecteur vitesse angulaire dans le temps (en intensité et en

direction). Il donne lieu aux mouvements inattendus que peuvent prendre les toupies ou les gyroscopes par exemple, ou encore aux mouvements et impressions ressenties sur les manèges à rotation variable de la foire.

-> <u>*Force de Coriolis*</u> – On appelle force de Coriolis la quantité :

$$\vec{F}_c = -m\,\vec{a}_c = -2m\,(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r)$$

Elle tire son nom du physicien Gustave Coriolis (1792-1843) qui énonça le premier la loi de transformation des accélérations. Cette force d'inertie est un peu plus « spéciale » que les autres : pour qu'elle apparaisse, il faut que le référentiel non-galiléen $\Re'$ possède un mouvement de rotation ($\vec{\Omega} \neq \vec{0}$) et aussi que le point matériel soit en mouvement dans ce référentiel ($\vec{v}_r \neq \vec{0}$). La force de Coriolis est constamment perpendiculaire à la trajectoire du point matériel dans $\Re'$. Lorsque vous vous déplacez sur un manège, vous avez plus de mal à garder votre équilibre que si vous étiez au repos car en même temps que vous avancez, vous devez compenser la force de Coriolis qui est perpendiculaire à votre déplacement. A plus grande échelle, la force de Coriolis due à la rotation de la Terre sur elle-même donne lieu à une importante composante de la vitesse des vents dans la direction Est-Ouest.

-> <u>*Référentiels galiléens ou pas ?*</u> – la loi de la dynamique écrite dans les référentiels non galiléens permet de préciser à quel degré d'approximation on peut considérer que tel ou tel référentiel est galiléen. Il faut et il suffit pour cela que les forces d'inerties d'entraînement et de Coriolis soient négligeables devant toutes les autres forces du problème, de sorte que l'on puisse écrire une équation de la dynamique approchée : $\vec{F} \approx m\vec{a}_r$. Les conditions pour que cela soit bien le cas sont multiples : $\Omega$ doit être faible, $O'M$ pas trop grand, $m$ petit, etc…

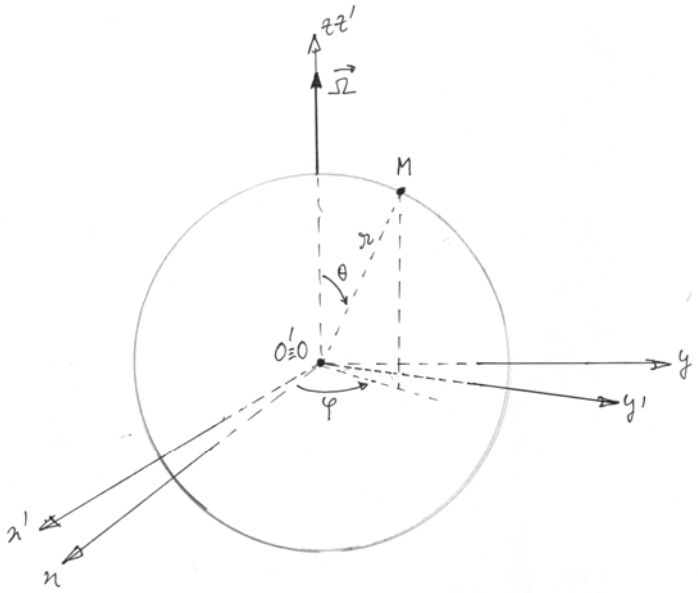
### *IV – 3 <u>Une application : poids des corps sur une Terre en rotation</u>*

Lorsque l'on parle du poids d'un corps et que l'on affirme que cette force est dirigée vers le centre de la Terre, on fait sans le dire l'approximation que la terre n'est pas en mouvement de rotation. Nous allons voir en effet que la rotation de la Terre sur elle-même induit une force d'inertie venant s'ajouter au poids « vrai ».

Considérons dans un premier temps une Terre immobile et adoptons comme référentiel galiléen un référentiel $\Re\{O, xyz\}$ où $O$ est le centre de la Terre. Le poids d'un objet $M$ de masse $m$ situé à la surface de la Terre est $\vec{P} = m\,\vec{g}$ où $\vec{g}$ est le champ de pesanteur terrestre. Ce champ est dirigé vers le centre de la Terre, de sorte que l'on peut écrire :

$$\vec{P} = m\,\vec{g} = -m\,g\,\vec{u}_r$$

$\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{OM}$ associé au système de coordonnées sphériques $r\,\theta\,\varphi$ que nous allons utiliser. L'objet est en équilibre à la surface de la Terre immobile sous l'effet de son poids et de la réaction du sol $\vec{N}$ telle que : $\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$.




Examinons maintenant le cas où la Terre tourne sur elle-même. Prenons cette fois comme référentiel, le référentiel $\Re'\{O,x'y'z'\}$ lié à la Terre en rotation. L'axe $Oz'$ est choisi parallèle à $Oz$ et correspond à l'axe de rotation de la Terre (c'est à dire la direction Sud-Nord). Le référentiel $\Re'$ effectue un mouvement de rotation uniforme par rapport au référentiel galiléen précédent avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}$ dirigé le long de l'axe $Oz$, et dont le module $\Omega$ est égal à la vitesse angulaire de la Terre dans son mouvement de rotation uniforme, soit $\Omega = 2\pi / T$ où $T$ est la période de rotation diurne.

Le référentiel $\Re'$ étant non-galiléen, il faut prendre en compte dans le bilan des forces qui s'exercent sur l'objet $M$, non seulement son poids $\vec{P}$ et la réaction du sol que nous appellerons ici $\vec{N}'$, mais également les forces d'inertie. L'objet étant immobile par rapport à $\Re'$, la force de Coriolis est nulle ($\vec{v}_r = \vec{0}$ ). Il reste la force d'inertie d'entraînement qui prend ici la forme simple :

$$\vec{F}_e = -m\,\vec{a}_e = -m\left[\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})\right]$$

(car les centres des deux référentiels sont confondus d'une part ($O \equiv O'$), et d'autre part le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ est constant en direction et en intensité). Le calcul de ce double produit vectoriel s'effectue sans difficulté si on remarque que $\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u}_r$, où $R$ est le rayon de la Terre, et que $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{u}_z = \Omega\left[\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta\right]$. La réaction du sol $\vec{N}'$ nous est inconnue, mais c'est elle qui permet de réaliser l'équilibre de l'objet dans le référentiel $\Re'$. Ecrivons-la sous la forme : $\vec{N}' = N'_r\,\vec{u}_r + N'_\theta\,\vec{u}_\theta + N'_\varphi\,\vec{u}_\varphi$. L'équilibre est réalisé dans $\Re'$ lorsque la somme de toutes ces forces est nulle :

$$\vec{P} + \vec{F}_e + \vec{N}' = \vec{0}$$

Ainsi, lorsqu'un habitant de la Terre mesure le « poids » d'un objet, il ne mesure donc pas le poids vrai de l'objet ($\vec{P}$), mais son poids apparent $\vec{P}_{apparent}$ qui est la somme vectorielle du poids vrai et de la force d'inertie centrifuge :

$$\vec{P}_{apparent} = \vec{P} + \vec{F}_e = -m(g - R\omega^2 \sin^2\theta)\,\vec{u}_r + mR\omega^2 \sin\theta\cos\theta\,\vec{u}_\theta$$

La direction d'un fil à plomb n'indique donc pas le centre de la terre, mais la direction de $\vec{P}_{apparent}$. Ces résultats dépendent de l'angle $\theta$. En physique terrestre, on préfère souvent parler de la **latitude** $\lambda$ du lieu géographique au lieu de $\theta$. On a simplement, pour l'hémisphère Nord : $\lambda = \pi/2 - \theta$.

Donnons un ordre de grandeur de ces corrections en se plaçant à l'équateur ($\lambda = 0$). Dans ce cas particulier, le poids apparent d'un corps est dirigé vers le centre de la Terre (la composante selon $\vec{u}_\varphi$ est nulle) :

$$\vec{P}_{apparent}^{équateur} = -mg(1 - R\omega^2/g)\,\vec{u}_r$$

La correction à $mg$ est donc en $R\omega^2/g \approx 0.00345$, soit quelques $10^{-3}$. La faiblesse de cette correction impose de tenir compte d'autres phénomènes : l'aplatissement de la Terre aux pôles induit une correction du même ordre de grandeur sur la valeur de $g$. De même, la variation de $g$ en fonction de la distance au centre de la Terre est à prendre en compte : au sommet d'une montagne telle que le Mont-Blanc, cela induit encore une correction du même ordre de grandeur.

Pour finir ce paragraphe, on peut s'amuser à estimer la fréquence de rotation critique $\omega_c$ que devrait avoir la Terre pour qu'un objet situé à l'équateur décolle ! En effet, on voit dans la formule précédente que le poids apparent peut éventuellement changer de signe et devenir positif selon $\vec{u}_r$ : cela signifie que la force d'inertie centrifuge l'emporterait sur la force de gravitation terrestre. Pour que ce soit le cas, il faudrait que la fréquence de rotation $\omega$ de la Terre soit telle que $\omega^2 \geq g/R$. Il existe donc une fréquence de rotation critique correspondant à une période de rotation critique :

$$T_c = 2\pi/\omega_c = 2\pi\sqrt{R/g}$$

On trouve $T_c \approx 1h\,25mn$ !

### *IV – 4 <u>Le principe d'équivalence</u>*

*Cette section n'est pas au programme, vous pouvez donc la passer sans problème. Elle concerne la difficulté de savoir si oui ou non un référentiel est galiléen. Cette question aboutit au principe d'équivalence énoncé par Einstein en 1907.*

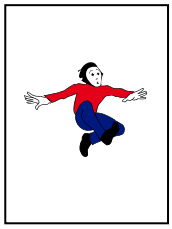
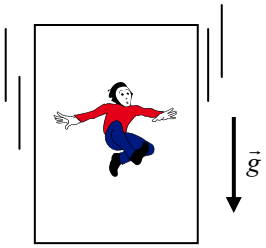
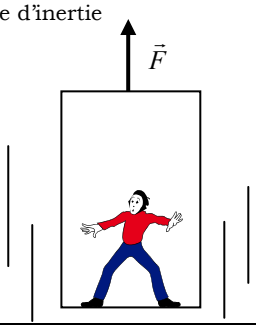
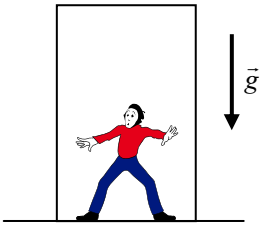
Vous avez sans doute remarqué que pour pouvoir appliquer la loi de la dynamique dans un référentiel non-galiléen, il faut connaître le mouvement de ce référentiel afin d'exprimer les forces d'inertie. Peut-être vous êtes-vous demandé : mais comment fait-on pour connaître ce mouvement ? La réponse que donnera un physicien censé sera la suivante : isolez un objet dans votre référentiel et vérifiez s'il obéit au principe d'inertie (au moins pendant une durée que vous estimez suffisamment longue). Si c'est oui, alors votre référentiel peut être considéré comme galiléen. Si c'est non, alors le mouvement de l'objet

que vous observez est dû aux forces d'inertie que vous pourrez déterminer par ce biais. C'est ce que nous avons dit jusqu'à présent. Et pourtant, l'expérience de pensée suivante va sans doute vous troubler.

Un physicien, que sa collègue a endormi avant l'expérience, se retrouve à son réveil dans une petite pièce rectangulaire complètement fermée au monde extérieur. Le physicien constate qu'il « flotte » dans la pièce sans parvenir à discerner l'existence d'un « haut » ou d'un « bas ». Prenant une pièce de monnaie dans sa poche, il l'isole sans vitesse initiale au centre de la pièce et constate qu'elle reste au repos aussi longtemps qu'il n'y touche pas. Après plusieurs expériences de ce type en prenant des objets de masses diverses, avec ou sans vitesse initiale, le physicien conclut que le principe d'inertie est vérifié dans la pièce qu'il assimile donc à un référentiel galiléen.

A un moment donné, notre physicien voit l'un des murs de la pièce venir le percuter brusquement. Après s'être relevé, il constate maintenant qu'il peut discerner un « haut » et un « bas » dans la pièce. Reprenant les expériences précédentes, il constate aussi que tous les objets, quelles que soient leurs masses, chutent maintenant vers le bas de la pièce avec toujours la même accélération constante. Le principe d'inertie n'étant plus vérifié dans la pièce, le physicien en déduit que son référentiel n'est plus galiléen. Il explique alors ce mouvement de chute à accélération constante par l'existence d'une force d'inertie. Dans l'écriture des forces d'inerties, le physicien vérifie que le seul terme pouvant donner une accélération constante pour tous les objets est le terme en $-m\,d^2\overrightarrow{OO'}/dt^2$. Il conclut que son référentiel non-galiléen est dans un mouvement d'entraînement à accélération constante. Il enregistre l'ensemble de ses observations et conclusions sur son dictaphone et propose finalement qu'au début de l'expérience, sa collègue l'avait déposé dans un vaisseau spatial isolé dans l'espace, que les moteurs du vaisseau se sont ensuite mis en route pour le propulser à accélération constante et qu'il vogue actuellement vers les confins de l'univers.

A ce moment là, une porte cachée dans l'une des cloisons de la pièce s'ouvre et la collègue de notre physicien vient le rejoindre. Elle lui explique qu'il est sur Terre dans une cage d'ascenseur dont les câbles s'étaient rompus juste avant qu'il se réveille. L'ascenseur était alors parti en chute libre sous l'effet du champ de pesanteur terrestre, jusqu'à ce que le système de freinage de sécurité se mette à fonctionner et l'immobilise brusquement. Notre physicien, abasourdi par cette histoire, hésite à faire écouter son dictaphone à sa collègue. Mais cette dernière insiste et découvre avec stupeur ses conclusions. Le tableau ci-dessous résume les deux interprétations possibles

| Tableau récapitulatif | Interprétation du physicien | Interprétation de la physicienne |
|---|---|---|
| 1ère phase de l'expérience | Vaisseau isolé dans l'espace – référentiel galiléen, absence de forces  | Ascenseur en chute libre – référentiel galiléen avec présence d'un champ de gravitation : mouvement de chute libre   |
| 2ème phase de l'expérience | Vaisseau accéléré – référentiel non galiléen : existence d'une force d'inertie   | Ascenseur immobilisé – référentiel galiléen – présence d'un champ de gravitation   |

Après discussion et réflexion, nos deux personnes reconnaissent le bien fondé du raisonnement de chacun et sont conduites à énoncer le principe d'équivalence :

> ***Principe d'équivalence*** *: Localement, les lois du mouvement dans un référentiel non-galiléen sont les mêmes que dans un référentiel galiléen en présence d'un champ de gravitation. En d'autres termes, un référentiel non-galiléen est localement équivalent à un champ gravitationnel.*

Dans ce principe, il y a le terme « localement » que nous expliciterons plus loin. Concentrons-nous d'abord sur l'équivalence entre forces de gravitation et forces d'inertie. L'origine de cette équivalence provient de l'égalité entre masse grave et masse inertielle que nous avons discuté précédemment. C'est en effet grâce à cette égalité que notre physicien, pendant que l'ascenseur était en chute libre, a pu conclure que son référentiel $\mathfrak{R}'$ (l'ascenseur) était galiléen. Pour bien le voir, écrivons le principe fondamental de la dynamique du point de vue de sa collègue physicienne qui était dans le référentiel terrestre galiléen $\mathfrak{R}$. Un objet de masse inertielle $m_i$ et de masse grave $m_g$ est en chute libre avec l'ascenseur dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$. L'équation du mouvement de l'objet dans $\mathfrak{R}$ s'écrit : $m_g\,\vec{g} = m_i\,\vec{a}_a$.

Selon cette logique, l'équation de la dynamique dans le référentiel $\mathfrak{R}'$ s'obtiendra à partir de la loi de composition des accélérations : $m_g\,\vec{g} = m_i\,\vec{a}_a = m_i\,(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c)$.

L'accélération d'entraînement de $\Re'$ par rapport à $\Re$ est $\vec{a}_e = d^2\overrightarrow{OO'}/dt^2 = \vec{g}$, puisque $\Re'$ est en chute libre. Les autres termes dans $\vec{a}_e$ son nuls, de même que l'accélération de Coriolis car $\vec{\Omega} = \vec{0}$. L'équation du mouvement de l'objet dans $\Re'$ s'écrit donc : $m_g\ \vec{g} - m_i\vec{a}_e = m_i\ \vec{a}_r$, soit : $(m_g - m_i)\ \vec{g} = m_i\ \vec{a}_r$. Ainsi, si notre physicien dans l'ascenseur a constaté que tous les objets isolés avaient une accélération nulle (ils étaient au repos ou en mouvement rectiligne uniforme), c'est bien parce que leurs masses inertielles sont toujours égales à leurs masses graves.

Le principe d'équivalence a un caractère local : en effet, l'équivalence entre forces de gravitation et forces d'inertie n'est valable que dans des portion finies de l'espace, suffisamment petites pour que les forces puissent être considérées comme constantes. Sur des portions d'espace plus importantes, on peut faire la différence entre ces deux types de forces car elles dépendent de la distance de façon très différente : les forces de gravitation décroissent toujours en fonction de la distance, tandis que les forces d'inertie restent constantes ou alors croissent avec la distance.

Le principe d'équivalence, lorsqu'on le couple avec la théorie de la relativité restreinte, est à la base de la théorie de la relativité générale. C'est Albert Einstein qui a énoncé le principe d'équivalence pour la première fois en 1907. En 1916, Einstein publia les fondements physiques et formels de la théorie de la relativité générale.

## V – THEOREMES ET DEFINITIONS

Les théorèmes de ce V et les définitions qui leur sont associées visent à un double but. D'une part, il s'agit, grâce à ces théorèmes, de se simplifier la vie au maximum lorsque l'on veut répondre à une question de dynamique comme par exemple : un objet part du point $A$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, quelle sera sa vitesse lorsqu'il arrivera au point $B$, sachant qu'il n'est soumis qu'à son propre poids ? Faut-il résoudre les équations du mouvement pour répondre à cette question ? Eh bien, non ! ce n'est pas la peine : le théorème de l'énergie cinétique nous donne directement la solution sans se fatiguer. D'autre part, ces théorèmes servent aussi pour aider à la résolution des équations du mouvement s'il s'avère indispensable de les résoudre : tous ces théorèmes permettent en effet de trouver une ou plusieurs constantes du mouvement dont on se sert pour résoudre les équations du mouvement. Nous en verrons un exemple concret lors de l'étude du mouvement des planètes au VI.

### *V -1 Théorème de la conservation de la quantité de mouvement*

Le théorème de la conservation de la quantité de mouvement se démontre grâce au principe de l'action et de la réaction. Inversement, on pourrait fort bien adopter ce théorème comme principe et c'est alors le principe de l'action et de la réaction qui deviendrait un théorème.

**Définition** : on appelle quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un point matériel, le produit de sa masse par sa vitesse : $\vec{p} = m\,\vec{v}$.

La quantité de mouvement totale d'un système constitué de plusieurs points matériels est la somme des quantités de mouvement de chacun de ces points matériels

***Théorème de la conservation de la quantité de mouvement*** *: La quantité de mouvement totale d'un système de N points matériels en interaction, isolés du reste de l'univers, est une constante du mouvement.*

Démonstration :

Comme le système est isolé du reste de l'univers, aucune force extérieure au système n'agit sur lui : seules les forces intérieures au système existent. Appelons $\vec{F}_{i\to j}$ la force qu'exerce le $i$ ème point matériel sur le $j$ ème. Cette force obéit au principe de l'action et de la réaction en ce sens que la force qu'exerce le $j$ ème point matériel sur le $i$ ème est égale et opposée à $\vec{F}_{i\to j}$ : $\vec{F}_{i\to j} + \vec{F}_{j\to i} = \vec{0}$ quelque soient $i$ et $j$, $(i \neq j)$. Compte tenu de ces remarques, la loi de la dynamique appliquée sur chacun des N points matériels s'écrit :

$$\begin{cases} \sum_{k,\,k\neq 1}^{N} \vec{F}_{k\to 1} = m_1\ \vec{a}_1 & point\ n°1 \\ \sum_{k,\,k\neq 2}^{N} \vec{F}_{k\to 2} = m_2\ \vec{a}_2 & point\ n°2 \\ \\ etc... \\ \\ \sum_{k,\,k\neq i}^{N} \vec{F}_{k\to i} = m_i\ \vec{a}_i & point\ n°i \\ \\ etc... \\ \\ \sum_{k,\,k\neq N}^{N} \vec{F}_{k\to N} = m_N\ \vec{a}_N & point\ n°N \end{cases}$$

Additionnons maintenant ces $N$ équations : en vertu du principe de l'action et de la réaction, la somme de tous les membres de gauche est nulle. En effet, il n'est pas difficile de se convaincre que chaque force $\vec{F}_{i\to j}$ de cette somme trouve sa contrepartie $\vec{F}_{j\to i}$ : par exemple, $\vec{F}_{2\to 1}$ qui apparaît pour le point n°1 est compensée par $\vec{F}_{1\to 2}$ qui apparaît pour le point n°2, etc… Par conséquent, on obtient le résultat suivant :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ \vec{a}_i = \vec{0}$$

Mais les accélérations ne sont rien d'autre que les dérivées par rapport au temps des vitesses : $\vec{a}_i = d\vec{v}_i / dt$ . On peut donc intégrer le résultat précédent par rapport au temps, ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ \vec{v}_i = \overrightarrow{Cte} = \vec{p}_{totale}$$

La somme de toutes les quantités de mouvement individuelles est la quantité de mouvement totale du système, et **c'est une constante du mouvement**. Ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème trouve de nombreuses applications, en particulier dans l'étude des chocs. Que le choc soit élastique (« rebondissement » parfait) ou non (deux voitures qui s'écrasent l'une contre l'autre), la quantité de mouvement du système, pourvu qu'il soit isolé, sera la même avant le choc, qu'après le choc. En voici un petit exemple : imaginons

deux patineurs de masses $m_1$ et $m_2$, initialement au repos au centre de la patinoire et qui se tiennent l'un l'autre. A un moment donné les deux patineurs se repoussent. Quelle relation existe-t-il entre les vitesses acquises par chacun des deux patineurs si on considère que les forces de frottement sur la glace sont négligeables ? *Réponse* : comme les forces de frottement sont négligeables, les poids des patineurs sont compensés par les réactions du sol de sorte que la résultante des forces extérieures agissant sur chacun des patineurs est nulle : on peut ainsi considérer que les patineurs forment à eux deux un système isolé. Avant qu'ils ne se repoussent, leur quantité de mouvement totale est nulle : $\vec{p}_{tot,\,av} = \vec{0}$. Après qu'ils se soient repoussés (après le « choc »), le patineur n°1 a une vitesse $\vec{v}_1$ et le n°2 une vitesse $\vec{v}_2$, de sorte que $\vec{p}_{tot,\,ap} = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2$. En vertu du théorème de la conservation de la quantité de mouvement, on a : $\vec{p}_{tot,\,av} = \vec{p}_{tot,\,ap}$. D'où la relation entre les deux vitesses : $\vec{v}_2 = -\,m_1 / m_2\;\vec{v}_1$. Le signe moins montre que les patineurs partent dans des directions opposées, ce à quoi on pouvait s'attendre ! Plus intéressant : le rapport des deux vitesses (en module) est dans le rapport inverse des masses. Ainsi, si vous procédez de cette manière avec votre petite sœur ou votre petit frère qui pèse deux fois moins lourd que vous, pensez bien qu'elle ou il s'éloignera de vous avec une vitesse double de la votre !

#### ***V – 1 – a : REFORMULATION DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE***

Il est important de noter que le théorème de la conservation de la quantité de mouvement se réfère à un système isolé, c'est-à-dire un système qui ne subit pas de forces extérieures (ou dont la résultante est nulle comme l'exemple précédent). Sinon, la quantité de mouvement du système varie au cours du temps et cette variation est intimement liée à la 2ème loi de Newton. Pour s'en convaincre, examinons le cas particulier d'un seul point matériel. Si ce point matériel est isolé (aucune force n'agit sur lui), son mouvement est rectiligne uniforme et sa quantité de mouvement est bien constante. Si maintenant ce point matériel subit l'action d'une force $\vec{F}$, estimons la variation de sa quantité de mouvement au cours du temps : à l'instant $t$, sa quantité de mouvement est $\vec{p}(t) = m\,\vec{v}(t)$. A l'instant $t + dt$, elle devient $\vec{p}(t+dt) = m\,\vec{v}(t+dt)$, de sorte que la différence vaut : $d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = m\left(\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)\right) = m\,d\vec{v}$. Or la variation de vitesse pendant $dt$ nous est donnée par la 2ème loi de Newton exprimée sous la forme :

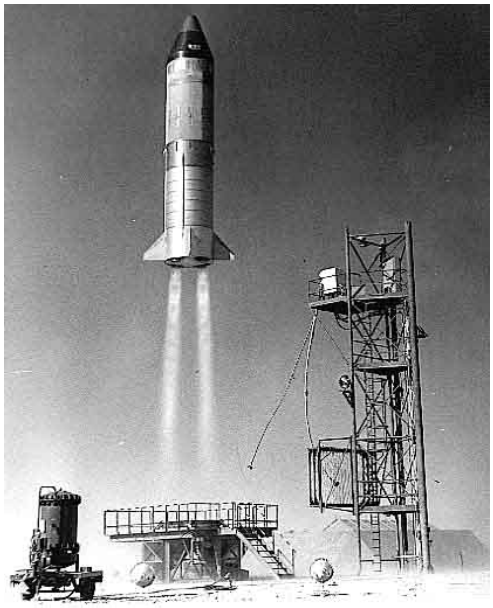
$$\overrightarrow{dv} = \frac{\vec{F}}{m}\,dt$$

si bien que la variation de quantité de mouvement devient $d\vec{p} = \vec{F}.dt$. Ce résultat amène à ré-interpréter le principe fondamental de la dynamique de la façon suivante :

> *Principe Fondamental de la dynamique : Un point matériel soumis à une ou plusieurs forces dont la résultante est $\vec{F}$ voit sa quantité de mouvement varier de telle sorte que :*
>
> $$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Cette nouvelle formulation prend tout son intérêt dans le domaine relativiste et dans des études théoriques ou pratiques plus approfondies de la mécanique comme dans l'exemple suivant.

#### *V – 1 – b : EQUATION DE LA DYNAMIQUE POUR LES CORPS DE MASSE VARIABLE*



Lancement de la fusée CORA, le 27 novembre 1966

Dans certains cas, la masse de l'objet en mouvement est variable. Songez par exemple aux fusées d'où une masse importante de gaz s'échappe au cours de son ascension, ou encore à une goutte de pluie dont la masse augmente au cours de sa chute dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Une équation de la dynamique modifiée est nécessaire pour traiter ces cas spéciaux. C'est I.V. Mechtcherski (1859 – 1935) qui a le premier écrit cette équation. Pour l'établir, focalisons-nous sur le problème d'une fusée de masse variable au cours du temps : $m = m(t)$. Dans un premier temps, la fusée n'est soumise à aucune force extérieure. A l'instant $t$, la quantité de mouvement de la fusée est $\vec{p}(t) = m(t).\vec{v}(t)$. A l'instant $t + dt$, la fusée a vu sa masse varier de $dm = m(t + dt) - m(t)$ et sa vitesse de $d\vec{v} = \vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)$ ; sa quantité de mouvement à cet instant est $\vec{p}(t + dt) = m(t + dt).\vec{v}(t + dt) = \left[m(t) + dm\right].\left[\vec{v}(t) + d\vec{v}\right]$. On ne peut pas appliquer le théorème de la conservation de la quantité de mouvement à la fusée seule, car elle a perdu de la matière (les gaz qui s'échappent) : le seul système isolé entre l'instant $t$ et l'instant $t + dt$ est le système « fusée + gaz ». Pour pouvoir appliquer le théorème, il faut donc aussi prendre en compte la quantité de mouvement du gaz échappé. La masse du gaz est égale à la perte de masse de la fusée (au signe près), soit $dm_{gaz} = -dm$. Quant à sa vitesse, inconnue, nous la poserons égale à $\vec{v}_{gaz}$. Appliquons maintenant le théorème de la quantité de mouvement au système « fusée + gaz » :

$$\vec{p}_{tot,av} = m(t).\vec{v}(t) = \vec{p}_{tot,ap} = \left[m(t) + dm\right].\left[\vec{v}(t) + d\vec{v}\right] + dm_{gaz}.\vec{v}_{gaz}$$

de cette équation, après avoir négligé le produit $dmd\vec{v}$ qui est un infiniment petit du second ordre, on tire que la variation élémentaire (c'est-à-dire pendant $dt$) de la quantité de mouvement de la fusée seule vaut :

$$d\vec{p} = m(t).d\vec{v} + \vec{v}(t).dm = \vec{v}_{gaz}.dm$$

Si maintenant, la fusée est soumise à une ou plusieurs forces (son poids, les frottements de l'air au décollage,…) dont la résultante est $\vec{F}$, cela ajoute à la variation de la

quantité de mouvement de la fusée une quantité $\vec{F}.dt$ en vertu de la seconde loi de Newton. De sorte que la variation totale de quantité de mouvement de la fusée est maintenant :

$$d\vec{p} = m(t)\, d\vec{v} + \vec{v}(t)\, dm = \vec{v}_{gaz}\, dm + \vec{F}\, dt \quad \Leftrightarrow \quad m(t)\, d\vec{v} = \left(\vec{v}_{gaz} - \vec{v}\right) dm + \vec{F}\, dt$$

La différence de vitesses qui apparaît au second membre de la dernière relation correspond à la vitesse d'éjection du gaz vu depuis la fusée. On a coutume d'appeler cette vitesse : vitesse du jet, $\vec{v}_{jet} = \vec{v}_{gaz} - \vec{v}$. Enfin, en divisant membre à membre par $dt$ le résultat ci-dessus, on obtient <u>l'équation de la dynamique pour la fusée</u> :

$$m\, \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_{jet}\, \frac{dm}{dt} + \vec{F}$$

Le terme supplémentaire qui vient s'ajouter à la force $\vec{F}$ peut être interprété comme une force de réaction, c'est-à-dire la force appliquée à la fusée par le gaz qu'elle éjecte. La vitesse du jet est considérée comme une donnée du problème, tout comme la variation de masse au cours du temps ; ces deux paramètres conditionnent le mouvement de la fusée.

### *V -2 <u>Moment d'une force – Moment cinétique - Théorème du moment cinétique</u>*

Lors d'un mouvement quelconque, la trajectoire d'un point matériel est le plus souvent incurvée dans l'espace, ce qui signifie que sous l'effet des forces en présence le point matériel subit diverses rotations. Le lien indirect qui existe entre ces rotations et les forces qui en sont à l'origine est exprimé au travers de la notion de moment [♣] et du théorème du moment cinétique.

**<u>Définition</u>** : on appelle **moment d'une force** $\vec{F}$ par rapport à un point $O$ la quantité vectorielle $\vec{\boldsymbol{M}}(O,\vec{F})$ définie par le produit vectoriel :

$$\vec{\boldsymbol{M}}(O,\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

où $M$ est le point d'application de la force.

**<u>Définition</u>** : on appelle **moment cinétique** d'un point matériel par rapport à un point $O$, le moment de sa quantité de mouvement par rapport à $O$ :

$$\vec{\ell}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\, \vec{v}$$

où $M$ est le point représentatif du point matériel.

[♣] Le terme « moment » dérive d'un mot latin signifiant quantité, grandeur.

Souvent, on convient de calculer le moment des forces et le moment cinétique par rapport au point $O$ qui constitue l'origine du référentiel choisi. On ne précise plus dans ce cas qu'il s'agit du point $O$, c'est sous-entendu, et on écrit simplement :

Moment de la force : $\vec{\boldsymbol{M}}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$
Moment cinétique : $\vec{\ell} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v} = \vec{r} \wedge m\,\vec{v}$

On ne précisera le point choisi pour le calcul de ces moments que s'il s'agit d'un autre point que l'origine.

***Théorème du moment cinétique*** : *la dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\vec{\ell}$ d'un point matériel est égale au moment de la résultante des forces ($\vec{F}$) qui agissent sur ce point matériel :*

$$d\vec{\ell}/dt = \vec{\boldsymbol{M}}(\vec{F})$$

Démonstration
Ecrivons la dérivée du moment cinétique par rapport au temps :

$$d\vec{\ell}/dt = d/dt\left[\vec{r} \wedge m\,\vec{v}\right] = d\vec{r}/dt \wedge m\,\vec{v} \;+\; \vec{r} \wedge m\,d\vec{v}/dt = \vec{v} \wedge m\vec{v} \;+\; \vec{r} \wedge m\,\vec{a}$$

Le premier terme de la dernière égalité est nul car le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est nul. Il suffit alors d'injecter le principe fondamental de la dynamique, $\vec{F} = m\,\vec{a}$, dans le second terme pour obtenir le résultat annoncé. CQFD

#### *V – 2 – a : CAS PARTICULIER IMPORTANT DES FORCES CENTRALES* ♠

Lorsque la ou les forces qui agissent sur le point matériel sont centrales, le théorème du moment cinétique permet d'obtenir une nouvelle constante du mouvement : le moment cinétique lui-même. Pour le démontrer, il suffit de se rappeler qu'une force centrale est par définition une force dont la direction est constamment parallèle au vecteur $\overrightarrow{OM}$ ($O$ : origine du référentiel, $M$ : point représentatif du point matériel). Dans ce cas, il est facile de se convaincre que le moment d'une telle force est forcément nul puisque le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est nul. Ainsi, si on applique le théorème du moment cinétique à ce type de force, on trouve simplement :

$$d\vec{\ell}/dt = \vec{0}$$

ou encore, en intégrant par rapport au temps :

$$\vec{\ell} = \overrightarrow{Cte} = \vec{\ell}_0$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

♠ Il vous est recommandé dans cette section de réviser votre cours et votre poly de cinématique à propos du mouvement à accélération centrale (VI p. 24-27 du poly de cinématique)

***Théorème*** *: Lorsque la ou les forces qui agissent sur un point matériel sont centrales, le vecteur moment cinétique associé à ce point matériel est une constante du mouvement.*

Tout comme la quantité de mouvement, le moment cinétique est un vecteur, et dire qu'il est constant dans le temps c'est dire deux choses : premièrement, que la direction de ce vecteur est toujours la même au cours du temps et deuxièmement, que la norme de ce vecteur est toujours la même :

Direction du vecteur moment cinétique - La direction de ce vecteur correspond à l'axe perpendiculaire au plan de la trajectoire. Rappelons-nous en effet que le mouvement à force centrale se fait dans un plan (nous l'avons démontré en cinématique). Or ce plan est celui engendré par le rayon vecteur ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$) et le vecteur vitesse $\vec{v}$. Comme le moment cinétique est par définition proportionnel au produit vectoriel de ces deux vecteurs, il leur est forcément perpendiculaire.

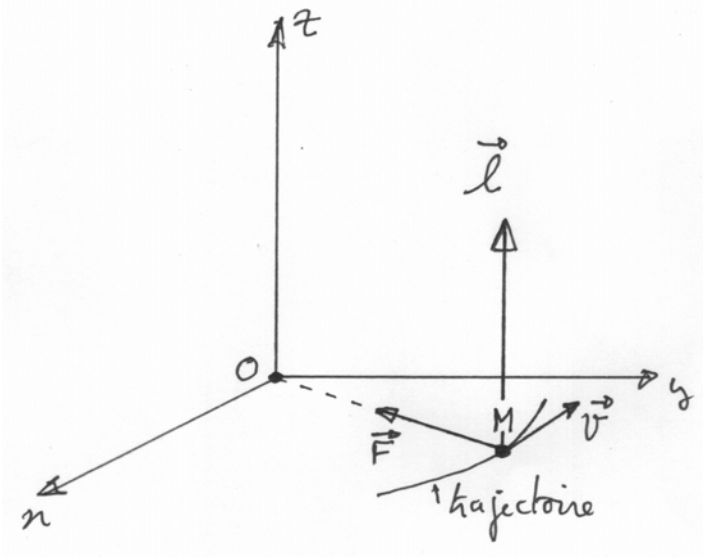
Norme du vecteur moment cinétique - La norme de ce vecteur est directement reliée à la loi des aires que nous avons établie dans le cours de cinématique. Pour le démontrer, utilisons les coordonnées polaires (la trajectoire est dans un plan) $r$ et $\theta$, complétées par l'axe des $z$ perpendiculaire à la trajectoire, et calculons la norme de $\vec{\ell}$ :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\, r^2 \dot{\theta}\ \vec{u}_z \qquad \Rightarrow \qquad m\, r^2 \dot{\theta} = Cte = \ell_0$$

Or rappelons-nous que la loi des aires s'exprime par le fait que la vitesse aréolaire (vitesse des surfaces balayées par le rayon vecteur) est constante, et que cette vitesse vaut :

$$v_{aré} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}\ , \qquad \text{d'où} \quad : v_{aré} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{\ell_0}{2m}$$

donc, si le moment cinétique est constant, la vitesse aréolaire l'est aussi et réciproquement.




Dans un mouvement à force centrale, la trajectoire est située dans un plan perpendiculaire au vecteur moment cinétique

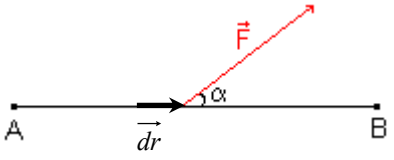
### *V -3 Travail – Enérgie cinétique - Théorème de l'énergie cinétique*

Le terme « énergie » provient du grec signifiant : « (force) en action ». En 1891, J.C. Maxwell en a donné la définition suivante : « *L'énergie est la capacité d'un système d'accomplir un travail mécanique* ». L'importance des termes énergétiques en science provient de ce qu'ils interviennent dans des lois de transformation qui expriment la conservation globale d'une certaine quantité appelée énergie totale du système : **L'énergie totale d'un système isolé garde une valeur constante quelques soient les transformations qui se produisent au sein de ce système**. Cette loi générale est d'abord apparue dans le cas particulier du théorème de l'énergie cinétique qui exprime en quelque sorte comment l'action des forces (leur travail) sert à modifier la vitesse de la particule compte tenu de son inertie. Un terme énergétique rend compte de cette modification : c'est l'énergie cinétique de la particule. Travail et énergie cinétique que nous allons voir maintenant sont donc des quantités énergétiques. Toutes ces grandeurs ont pour unité le **Joule** : 1 joule est le travail produit par une force constante de 1 Newton lorsque son point d'application se déplace de 1 mètre dans le sens de la force.

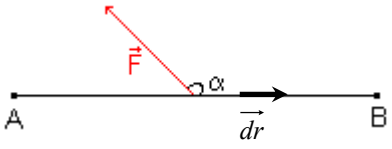
**Définition** : on appelle **travail d'une force** $\vec{F}$ entre deux points $A$ et $B$ appartenant à la trajectoire suivie par un point matériel, l'intégrale curviligne :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$$

L'intégrale est dite curviligne car elle se calcule le long de la courbe suivie par le point matériel ($\overrightarrow{dr}$ est un déplacement élémentaire le long de la trajectoire).



Travail moteur



Travail résistant

Si le résultat du calcul de cette intégrale est positif, cela signifie que le produit scalaire entre la force et le déplacement ($\vec{F}.\overrightarrow{dr}$) a été le plus souvent positif le long de la trajectoire et le travail de la force est dit **moteur** : la force a globalement « aidé » l'objet pour aller de $A$ vers $B$. Si le résultat est négatif, le travail de la force est dit **résistant** : globalement, la force va à l'encontre du mouvement du point matériel de $A$ vers $B$. Dans ce dernier cas, pour que le point matériel ait effectivement parcouru ce chemin, il faut : soit que d'autres forces (dont le travail est moteur) aient agi sur lui, soit que les conditions initiales (grande vitesse au point $A$ par exemple) aient permis ce parcours en dépit de la force résistante.

**Définition** : on appelle **énergie cinétique** d'un point matériel de masse $m$ et de vitesse $\vec{v}$, la quantité :

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

L'énergie cinétique d'un système de points matériels est la somme des énergies cinétiques de chacun des points matériels qui composent ce système.

L'énergie cinétique d'un point matériel n'est rien d'autre qu'une mesure de l'énergie de la particule due à son seul mouvement : c'est son énergie de mouvement, qui dépend à la fois de sa vitesse et de son inertie (via la masse).

***Théorème de l'énergie cinétique*** : *La variation d'énergie cinétique entre deux points $A$ et $B$ appartenant à la trajectoire suivie par un point matériel est égale au travail de la résultante ($\vec{F}$) de toutes les forces appliquées sur ce point matériel le long de la trajectoire entre A et B.*

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{F})$$

Démonstration :

Soit $\vec{F}$ la résultante de toutes les forces appliquées au point matériel au cours de son trajet entre les points $A$ et $B$. Appliquons le principe fondamental de la dynamique, multiplions scalairement cette équation par le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ et intégrons entre les deux points $A$ et $B$ de la trajectoire :

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B m\,\vec{a}.d\vec{r}$$

Le membre de gauche de cette égalité est le travail de la résultante des forces. Le membre de droite peut s'écrire autrement, compte tenu du fait que l'accélération n'est rien d'autre que la dérivée de la vitesse par rapport au temps :

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B m\,\vec{a}.d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}.d\vec{r} = \int_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} m\,\vec{v}.d\vec{v} = \left[\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right]_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B}$$

La dernière égalité démontre le théorème. Remarquez comment nous sommes passé d'une intégrale le long de la trajectoire à une intégrale sur les vitesses en déplaçant simplement le dénominateur $dt$ sous le vecteur élémentaire $d\vec{r}$ et en assimilant le résultat à la vitesse $\vec{v}$ de la particule.

Ce théorème a de nombreuses applications pratiques que vous verrez en TD et nous en verrons quelques-unes à la fin de ce V. Mais auparavant, nous devons définir une dernière notion énergétique liée au travail d'une force : la notion d'énergie potentielle.

### *V –4 Enérgie potentielle – Energie mécanique - Théorème de la conservation de l'énergie mécanique*

Le théorème de l'énergie cinétique exprime comment le travail des forces le long du trajet se transforme en énergie de mouvement. Pour mieux faire ressortir cet aspect du théorème, on fait appel à la notion d'énergie potentielle. Imaginons qu'une force $\vec{F}$, dont on désire calculer le travail qu'elle effectue le long d'une trajectoire, puisse s'écrire sous la forme d'un **gradient * d'une fonction scalaire** $E_p$, soit :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

(le signe moins est purement conventionnel). Dans ce cas, le calcul du travail de la force entre les deux points $A$ et $B$ de la trajectoire s'écrit simplement :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B -\vec{\nabla} E_p.d\vec{r} = -\int_A^B dE_p = E_p(A) - E_p(B) \qquad (1)$$

Ce résultat montre que le travail de la force s'exprime comme la différence entre la valeur de la fonction $E_p$ au point $A$ et sa valeur au point $B$. Notez une première conséquence importante, c'est que le travail de la force ne dépend pas du chemin suivi ! Il dépend seulement des points de départ et d'arrivée : peu importe le chemin suivi, le travail réalisé par la force sera toujours le même.

> **Définition** : On appelle **énergie potentielle** (associée à la force $\vec{F}$), la fonction scalaire $E_p$ telle que $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

**Note 1** - **précision sur le terme « *potentielle* »** - En présence de la force $\vec{F}$, la particule acquiert une certaine potentialité à modifier son état de mouvement. C'est cette potentialité que l'on veut rappeler dans le terme « énergie potentielle ». Nous allons voir au travers du théorème de l'énergie mécanique, qu'énergie potentielle et énergie de mouvement (énergie cinétique) se transforment l'une en l'autre tout au long du mouvement.

**Note 2** – **Forces conservatives** – Toutes les forces ne dérivent pas forcément d'un gradient d'énergie potentielle (i.e. il n'existe pas toujours une fonction $E_p$ telle que l'on puisse écrire $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$). ***Si la force envisagée dérive d'un gradient d'énergie potentielle, on dit de cette force qu'elle est conservative***. A ce moment là, ***le travail de cette force entre deux points $A$ et $B$ ne dépend pas de la trajectoire suivie entre ces deux points***. Les forces qui ne dérivent pas d'un gradient d'énergie potentielle sont dites non-conservatives et, en général, le travail de ces forces dépend du chemin suivi.

**Note 3** – **Travail et énergie potentielle** – Au regard de la définition précédente, l'énergie potentielle associée à une force n'est définie qu'à une constante près. Mais peu importe cette constante que l'on peu choisir arbitrairement, car le **travail de la force, qui apparaît comme une variation d'énergie potentielle**, reste le même quelle que soit cette constante.

---

* Dans ce poly, il est pré-supposé que vous savez ce qu'est le gradient d'une fonction et les propriétés élémentaires qui découlent de cette notion. Des « rappels » de ces notions seront donnés en cours et en TD.

**Note 4** – Avec ce nouvel outil, la force apparaît maintenant comme le résultat d'une variation spatiale d'énergie potentielle.

> **Définition** : On appelle **énergie mécanique** de la particule la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle (ou de ses énergies potentielles si la particule subit plusieurs forces conservatives)

Avec cette dernière définition, il devient possible d'énoncer le théorème suivant :

> ***Théorème*** *: L'énergie mécanique,* $E_m = E_c + E_p$ *, d'un point matériel soumis à des forces conservatives est une constante du mouvement.*

Démonstration :
Comme toutes les forces du problème envisagé sont conservatives, on peut injecter le résultat *(1)* ci-dessus dans le théorème de l'énergie cinétique, qui devient ainsi :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B)$$

ce qui se ré-écrit :

$$E_c(B) + E_p(B) = E_c(A) + E_p(A)$$

Ce résultat exprime que l'énergie mécanique du point matériel en $A$ est la même qu'en $B$. Or ces deux points peuvent être choisis de façon complètement arbitraire le long de la trajectoire : il s'ensuit qu'en tout point de la trajectoire, l'énergie mécanique reste la même. CQFD.

#### *V – 4 – a : TRANSFORMATION DE L'ENERGIE : EXEMPLE DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE*

Le théorème précédent montre que l'énergie (mécanique ici) se conserve. Mais il montre aussi que cette conservation est sous-tendue par des transformations énergétiques internes. Pour bien le voir, nous allons étudier le cas simple de l'oscillateur harmonique à propos duquel nous reviendrons plus en détail ultérieurement.

Considérons un ressort vertical de masse négligeable, de constante d'élasticité $k$, de longueur à vide $L$, au bout duquel est accroché une bille de masse $m$ assimilable à un point matériel. Le dispositif est conçu de telle sorte que seul un mouvement vertical du poids est possible et que les éventuels frottements sont négligeables. Le référentiel galiléen sera ici la verticale du lieu de l'expérience que nous orienterons vers le bas (axe des $z$) et le plan du sol (axes des $x$ et des $y$). Ces deux derniers axes importent peu d'ailleurs puisque le mouvement n'a lieu que le long de l'axe des $z$. L'origine du référentiel est prise (arbitrairement) à l'extrémité haute du ressort. Fixons-nous comme conditions initiales que la bille est maintenue au départ à la position $z = z_0 > L$ avec une vitesse nulle et qu'au

temps $t = 0$ on lâche la bille. Les forces en présence et les vecteurs vitesse et accélération de la bille s'écrivent :

-> Poids de la bille : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{u}_z$

-> Force élastique du ressort : $\vec{F}_{él} = -k\,(z - L)\;\vec{u}_z$ où $L$ est la longueur du ressort à vide, et $z$ sa longueur lorsque la bille est accrochée. $z$ correspond donc à la position de la bille sur l'axe.

-> Position de la bille : le rayon vecteur représentant la position de la bille s'écrit : $\overrightarrow{OM} = z\,\vec{u}_z$.

-> Vitesse et accélération de la bille : $\vec{v} = \dot{z}\,\vec{u}_z$ et $\vec{a} = \ddot{z}\,\vec{u}_z$

Compte tenu de ces données, l'équation de la dynamique s'écrit ici :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{él}$$

d'où l'équation du mouvement le long de l'axe des $z$ :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}\;z = g + \frac{k}{m}L$$

Vous vérifierez que la solution de cette équation, compte tenu des conditions initiales, s'écrit :

$$z(t) = \frac{mg}{k} + L + \left(z_0 - L - \frac{mg}{k}\right)\cos(\omega t)$$

La bille effectue donc un mouvement sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ le long de l'axe des $z$.

Examinons maintenant les différentes énergies mises en jeu dans le problème :

***Energie cinétique*** - on l'obtient facilement en dérivant le résultat ci-dessus pour obtenir la vitesse $\dot{z}(t)$ de la bille à chaque instant :

$$Ec = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(z_0 - L - \frac{mg}{k}\right)^2 \sin^2(\omega t)$$

***Energie potentielle*** – il faut avant tout se poser la question de savoir si les deux forces en présence dérivent d'une énergie potentielle. C'est bien le cas : vous vérifierez en effet que le poids de la bille dérive de l'énergie potentielle de gravitation :

$$E_{p,grav} = -mgz + C_1$$

et que la force élastique dérive d'une énergie potentielle élastique :

$$E_{p,él} = \frac{1}{2}k(z - L)^2 + C_2$$

Les deux constantes $C_1$ et $C_2$ peuvent être choisies arbitrairement. Par souci de simplicité, on les choisit souvent de telle sorte que les énergies potentielles gravifique et élastique

s'annulent en un même endroit de l'axe des $z$, par exemple pour $z = L$. Ce qui implique dans ce cas : $C_1 = mgL$ et $C_2 = 0$. D'où, après avoir remplacé $z$ par sa valeur en fonction du temps :

$$E_{p,grav} = mg\left[-\frac{mg}{k} - \left(z_0 - L - \frac{mg}{k}\right)\cos(\omega t)\right]$$

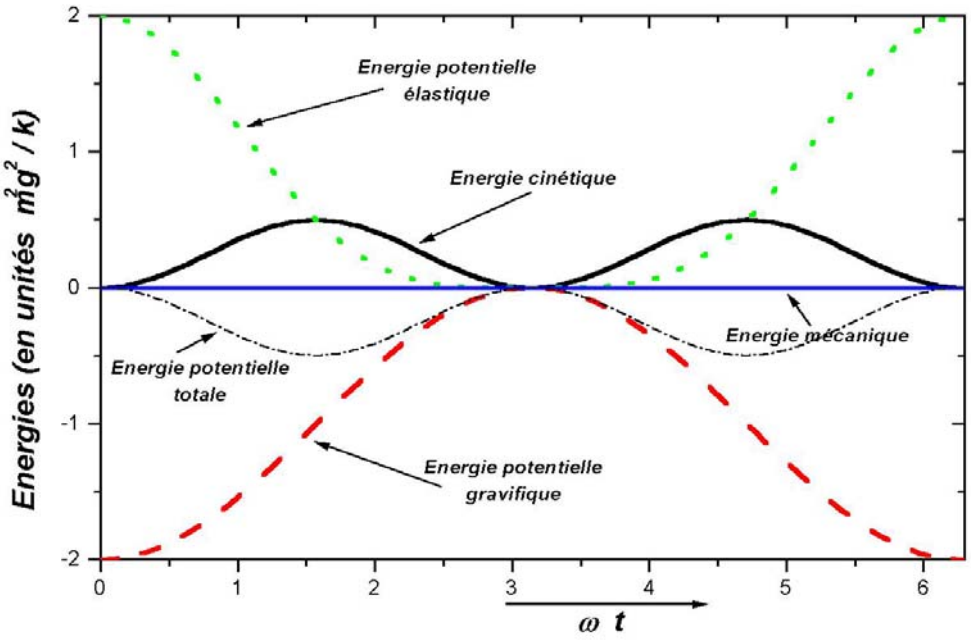
et

$$E_{p,él} = \frac{1}{2}k\left[\frac{mg}{k} + \left(z_0 - L - \frac{mg}{k}\right)\cos(\omega t)\right]^2$$

***Energie mécanique*** – c'est la somme de l'énergie cinétique de la bille et de son énergie potentielle totale (gravifique et élastique). Vous vérifierez aisément que la somme de ces trois énergies donne lieu à une valeur constante au cours du temps comme prévu par le théorème. On trouve en effet (pensez à remplacer $\omega$ par sa valeur en fonction de $k$ et $m$) :

$$E_{méca} = E_c + E_{p,grav} + E_{p,él} = \frac{1}{2}k(z_0 - L)\left(z_0 - L - 2\frac{mg}{k}\right) = Cte$$

On voit clairement sur cet exemple comment l'énergie mécanique totale se conserve, et comment chacune de ses 3 contributions évoluent dans le temps en se transformant l'une l'autre. Le graphique ci-dessous représente cette situation pour le choix particulier où initialement $z_0 = L + 2mg/k$, ce qui donne une valeur de l'énergie mécanique constamment nulle (cette valeur est arbitraire, répétons-le ; le choix de prendre une valeur nulle est un pur souci de simplicité des calculs) :

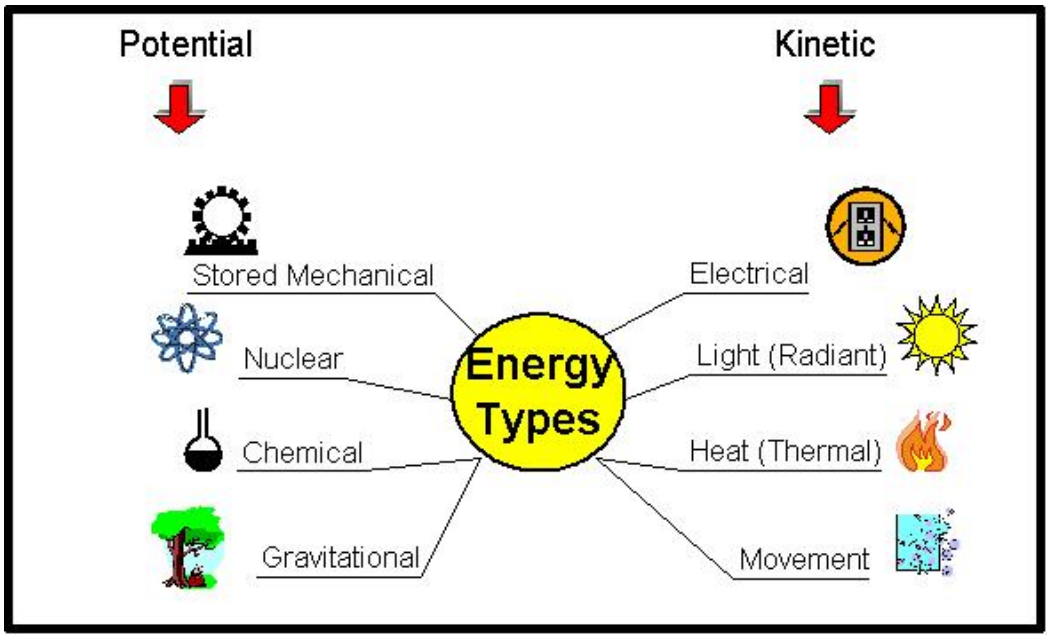



Constatez que la périodicité du mouvement entraîne la même périodicité dans les valeurs que prennent les différentes énergies.

Constatez aussi que lorsque l'énergie potentielle élastique est à son maximum, l'énergie potentielle de gravité est à son minimum : l'énergie potentielle élastique est à ce moment là le moteur du mouvement (et inversement lorsque c'est l'énergie potentielle de gravité qui est maximale).
Constatez que la somme des deux énergies potentielles donne exactement la courbe de l'énergie cinétique mais inversée : il y a constamment échange entre énergie potentielle et énergie cinétique. Si l'énergie potentielle diminue, l'énergie cinétique augmente d'autant et vice versa.
Cherchez à savoir ou se trouve la bille le long de l'axe des $z$ par un simple examen de ces courbes.

Cet exemple, vous le savez, est un cas idéal : dans la réalité, le mouvement de la bille va en diminuant jusqu'à s'arrêter au bout d'un temps plus ou moins long en raison des « frottements » divers que nous avons négligé. Si nous avions inclus ces frottements dans l'analyse, aurions-nous retrouvé un comportement identique, c'est-à-dire une énergie mécanique constante ? Aurions-nous observé un transfert continuel entre énergie potentielle et énergie cinétique ? La réponse est non dans un premier temps : dans ce cas en effet, nous aurions trouvé que l'énergie mécanique de la bille ne se conserve pas et qu'elle diminue au fur et à mesure que le temps s'écoule à cause de la présence des forces de frottement. Mais si nous allons plus loin dans le raisonnement, il faut aussi constater que ces forces de frottement qui naissent sous l'effet du mouvement de la bille ont pour conséquence de faire s'échauffer une partie du système (le ressort ici). C'est le mérite de la thermodynamique d'avoir suggéré que cet échauffement, aussi faible soit-il, traduit la création d'une **énergie de nature thermique** qui compense exactement la perte d'énergie mécanique ! Ainsi, dans un second temps la réponse est oui, si l'on tient compte de cette énergie thermique dans le bilan énergétique. La conservation de l'énergie a donc bien lieu pourvu que l'on prenne en compte toutes les formes d'énergies impliquées dans le mouvement envisagé. Et nous voici revenus à l'affirmation énoncée au début de la section V-3 : **L'énergie totale d'un système isolé garde une valeur constante quelques soient les transformations qui se produisent dans ce système.** Les scientifiques ont adopté cette affirmation comme un grand principe tout à fait analogue à l'expression bien connue : « *rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme* ».

On affuble aujourd'hui systématiquement le terme énergie d'un qualificatif indiquant la nature du processus mis en cause : énergie cinétique pour le mouvement, énergie (potentielle) gravitationnelle pour l'interaction gravitationnelle entre les corps, mais aussi énergie hydraulique pour dire que la source d'énergie au départ est l'eau, énergie solaire, énergie nucléaire, etc…




Tentative de recensement des différentes sources d'énergie pouvant se transformer

***V –5 <u>Exemple d'application : Résolution graphique qualitative d'un problème de dynamique à une dimension</u>***

Les problèmes de dynamique unidimensionnelle (c'est-à-dire le long d'un seul axe) sont un peu particuliers car la trajectoire est déjà connue : c'est forcément une droite. Ce que l'on se pose comme question, c'est donc de savoir comment sera parcourue cette droite au cours du temps. Pour cela, le théorème de la conservation de l'énergie mécanique nous est utile d'un point de vue qualitatif. Appelons l'axe sur lequel se situe le mouvement, l'axe des $x$. L'énergie cinétique du point matériel est simplement $E_c = 1/2\ m\dot{x}^2$. Quand à son énergie potentielle, elle ne dépend que de $x$ : $E_p = E_p(x)$. L'énergie mécanique, qui est une constante du mouvement, s'écrit donc :

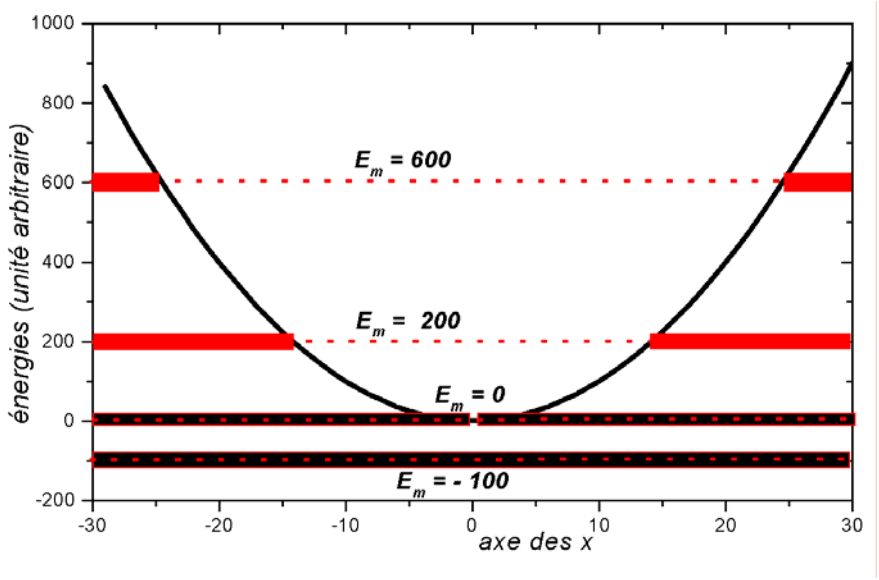
$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + E_p(x)$$

Dans cette relation, nous allons isoler le terme représentant l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = E_m - E_p = E_m - E_p(x)$$

Remarquez que ce terme (l'énergie cinétique) est toujours positif. Or il se trouve égal à la différence entre l'énergie mécanique (qui est toujours constante) et l'énergie potentielle. Pour que cette différence soit positive, il faut donc nécessairement que l'énergie mécanique du point matériel soit toujours supérieure à son énergie potentielle. Si ça n'est pas le cas, le mouvement est dit impossible puisqu'il donnerait lieu à une énergie cinétique négative. Cette remarque a pour conséquence la possibilité de donner une solution graphique (qualitative) à la question initiale : sur un graphe représentant la fonction $E_p = E_p(x)$, l'énergie mécanique, puisqu'elle constante, apparaît comme une droite parallèle à l'axe des

$x$ située à une certaine hauteur le long de l'axe des énergies correspondant à sa valeur initiale (c'est une donnée du problème, un paramètre que l'on peut modifier à sa guise). On distingue alors clairement sur ce graphe, les zones de l'axe des $x$ pour lesquelles $E_m < E_p$. Ces zones sont inaccessibles pour le point matériel puisqu'il aurait une énergie cinétique négative ! On peut donc visualiser sur un tel dessin la ou les portions de l'axe des $x$ auxquelles le point matériel peut accéder compte tenu de l'énergie mécanique dont il dispose. En voici un exemple : imaginez que l'énergie potentielle à laquelle est soumis le point matériel s'écrive $E_p = 1/2\ k\,x^2$ où $k$ est une constante du problème. Traçons la courbe $E_p = E_p(x)$ qui est une parabole, ainsi que quelques valeurs de l'énergie mécanique :




On voit clairement que pour toutes les valeurs négatives de l'énergie mécanique (par exemple $E_m = -100$ sur le dessin), la droite est située en dessous de la courbe de l'énergie potentielle quelle que soit la position du point matériel sur l'axe des $x$ : pour toutes ces valeurs, le mouvement est impossible. La valeur limite de $E_m$ pour laquelle le mouvement devient possible est manifestement $E_m = 0$. Pour cette valeur, un seul point de l'axe des $x$ est disponible pour le point matériel, c'est $x = 0$. Le point matériel ne peut quitter cette position, il reste au repos en $x = 0$ : c'est une **position d'équilibre**. Pour $E_m > 0$, la portion de l'axe des x limitée par les deux intersections entre la droite et la parabole représente l'ensemble des positions que peut prendre le point matériel. Le point matériel est donc condamné à faire des allers et retours le long de cette portion d'axe.

Ainsi, sans même avoir résolu l'équation du mouvement, on sait déjà quelles seront les valeurs possibles de l'énergie mécanique pour que le mouvement ait lieu, et que ce mouvement sera un mouvement oscillant. Par contre, on ne sait pas comment cela oscille ni à quelle fréquence : pour connaître ces détails quantitatifs la résolution des équations du mouvement devient nécessaire.

Cette méthode de résolution qualitative peut aussi s'utiliser dans les problèmes à 2 voire à 3 dimensions. Nous verrons comment on procède lors de l'étude du mouvement des planètes qui va suivre.

## VI – LOIS DE KEPLER – MOUVEMENT DES PLANETES ET COMETES

Le mouvement des planètes ♣ a été observé et décrit depuis des temps fort reculés. C'est au début du XVIIème siècle que Johannes Kepler (1571 – 1630) découvrit 3 lois concernant ces astres qui portent aujourd'hui son nom :

***1ère loi de Kepler*** *: Chaque planète décrit autour du soleil une ellipse dont le soleil occupe un des foyers.*

***2ème loi de Kepler*** *: Le rayon-vecteur joignant le soleil à la planète balaie des aires égales en des durées égales.*

***3ème loi de Kepler*** *: Les carrés des temps de révolution des planètes autour du soleil sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.*

Ces trois lois empiriques (c'est-à-dire tirées uniquement des observations expérimentales et non de la théorie) ont joué un rôle important dans la recherche d'une nouvelle dynamique qui remplaça la vieille dynamique aristotélicienne. Non seulement Galilée avait déjà démontré que celle-ci ne rendait pas compte des expériences simples de chute libre qu'il avait réalisées, mais en plus elle était incapable d'expliquer l'origine de ces 3 lois autrement que par « la main de Dieu ».

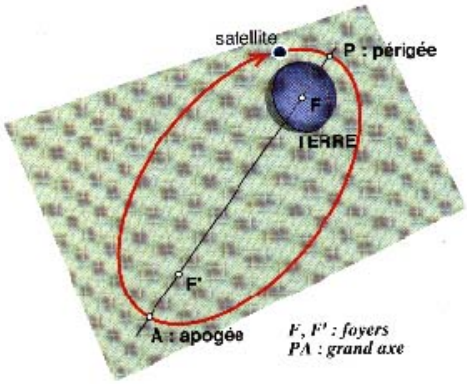
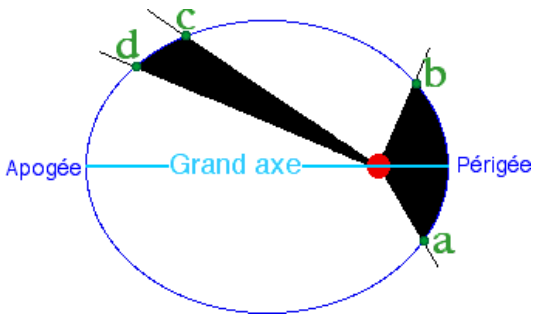
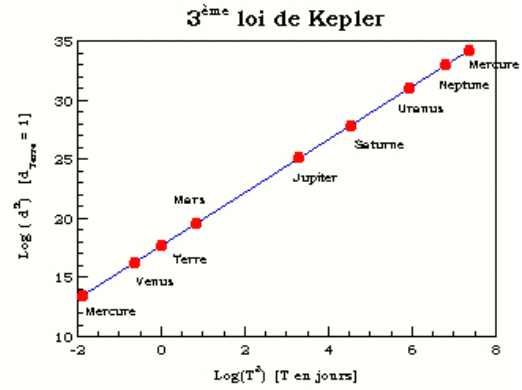



*Fig. 6 - **La première loi de Kepler.** Le cas représenté ici est celui d'un satellite artificiel de la Terre. Le point le plus proche de la Terre est appelé périgée (P), le plus éloigné apogée (A).*



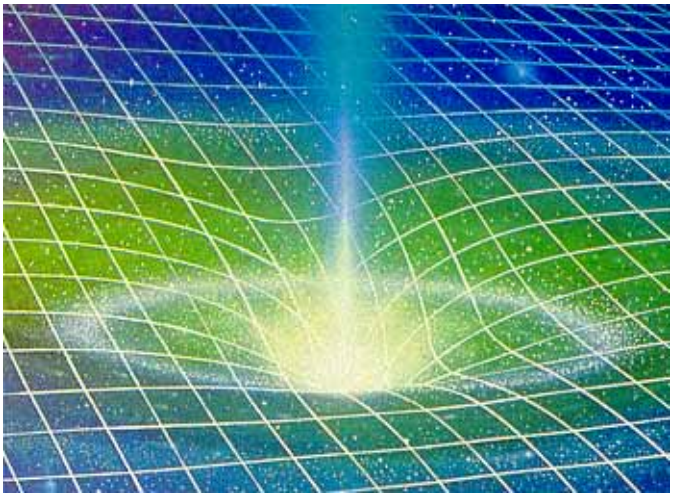

La seconde loi de Kepler n'est rien d'autre que la loi des aires

**ci-contre** : Graphe logarithmique de la 3ème loi de Kepler. Remarquez le « vide » entre Mars et Jupiter. Entre ces deux planètes se trouve la ceinture d'astéroïdes




♣ Le mot planète dérive d'un mot grec signifiant « astre errant »

C'est Newton qui expliqua l'origine des lois de Kepler dans un nouveau cadre conceptuel au travers de sa théorie de la gravitation et des trois principes de la dynamique. Nous allons traiter le problème du mouvement des planètes et autres corps célestes autour du soleil à l'aide de ces deux théories. Il faut malgré tout indiquer ici que la théorie de la relativité générale explique le mouvement des planètes de la façon suivante : le soleil, en raison de sa masse, déforme l'espace-temps dans son voisinage ; la terre, piégée par cette déformation, reste au voisinage du soleil et adopte une trajectoire très proche d'une trajectoire elliptique.



En raison de sa masse, le soleil déforme l'espace-temps en son voisinage. La représentation ci-dessus est artistique – il faut s'imaginer une déformation dans les 3 directions spatiales ainsi que dans la direction temporelle.

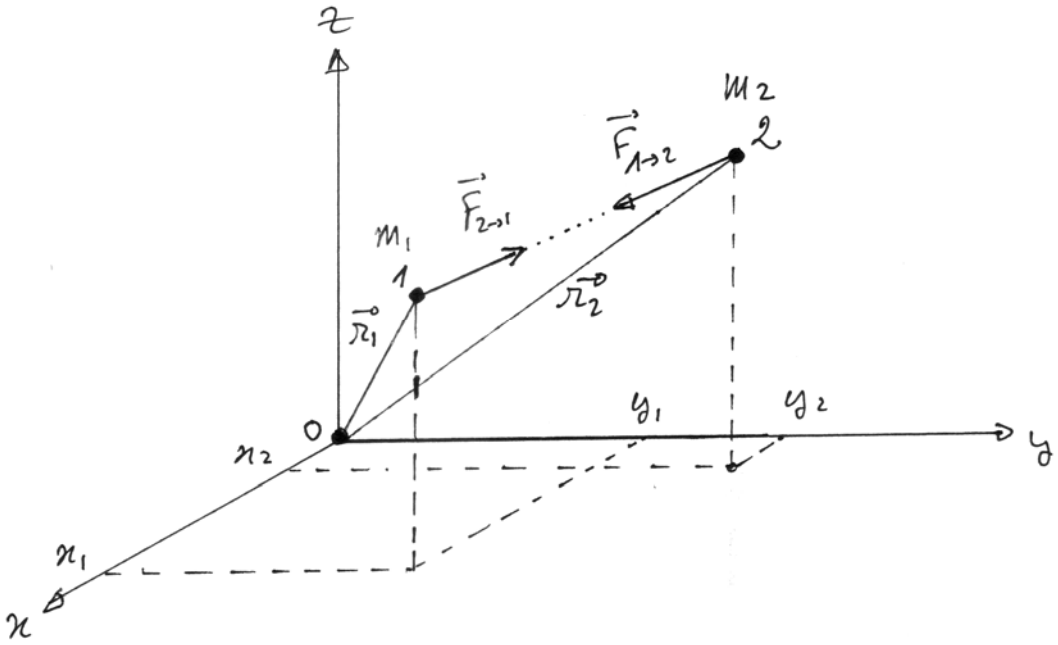
### *VI -1 Préliminaires : le problème à deux corps*

Le problème du mouvement de la terre autour du soleil est un problème dit « à deux corps ». Nous allons voir qu'il peut se réduire à un problème à un seul corps grâce au théorème de la conservation de la quantité de mouvement du système isolé terre-soleil.

Le soleil et la planète sont supposés suffisamment éloignés l'un de l'autre pour que l'on puisse les représenter chacun par des points matériels 1 et 2 de masses $m_1$ et $m_2$ respectivement. Les vecteurs positions de 1 et 2 par rapport à un référentiel $Oxyz$ galiléen (voir dessin) sont $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, avec pour composantes $x_1, y_1, z_1$ et $x_2, y_2, z_2$. Les deux points matériels sont isolés du reste de l'univers et interagissent entre eux par l'intermédiaire des seules forces de gravitation, de sorte qu'en vertu de la théorie newtonienne de la gravitation on ait :

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1} = -G\,\frac{m_1\, m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}\,\vec{u}_{1\to 2}$$

$\vec{u}_{1\to 2}$ est le vecteur unitaire qui joint 1 à 2.




Pour résoudre le problème du mouvement de ces deux points matériels ♣, il faut écrire l'équation de la dynamique pour chacun des deux points, soit :

$$\begin{cases} \vec{F}_{2\to1} = m_1\,\vec{a}_1 & (1) \\ \vec{F}_{1\to2} = m_2\,\vec{a}_2 & (2) \end{cases}$$

De ces deux équations vectorielles, on doit obtenir 6 équations du mouvement (en les projetant sur les axes $xyz$) qui, une fois résolues, doivent nous permettre de trouver les 6 composantes $x_1, y_1, z_1$ et $x_2, y_2, z_2$ des vecteurs positions en fonction du temps. Nous allons maintenant simplifier ce problème fastidieux grâce au théorème de la conservation de la quantité de mouvement.

En additionnant les deux équations vectorielles ci-dessus, il est clair ♥ que nous allons trouver que la quantité de mouvement totale du système terre-soleil se conserve, soit :

$$\vec{P}_{tot} = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 = m_1\,\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\,\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \overrightarrow{Cte}$$

Ce résultat nous fourni une constante vectorielle du mouvement. Pour en tenir compte, nous allons effectuer **un changement de variables** : à la place de $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, nous allons travailler avec deux autres variables vectorielles $\vec{r}$ et $\vec{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \vec{R} = \dfrac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{cases}$$

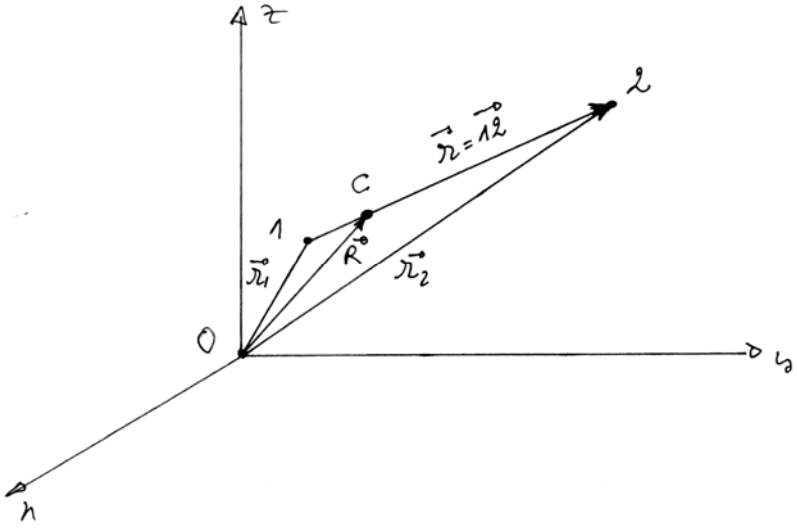
♣ C'est-à-dire, connaître les valeurs de $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$ à chaque instant.

♥ Puisque c'est ainsi que nous avons procédé pour établir le théorème.

Premièrement, convainquez-vous que trouver $\vec{r}$ et $\vec{R}$ en fonction du temps est équivalent à trouver $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ car, en imaginant que nous ayons effectivement trouvé $\vec{r}$ et $\vec{R}$, on aura simplement :

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} - \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\ \vec{r} & (3) \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\ \vec{r} & (4) \end{cases}$$

Deuxièmement, ce nouveau choix de variables n'est pas innocent. Concernant la variable $\vec{R}$, constatez qu'en la dérivant par rapport au temps on trouve à un facteur près la quantité de mouvement totale du système ! Quant au choix de la variable $\vec{r}$, il est dicté par l'expression des forces de gravitation où intervient le module de la différence $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$.




Ce changement de variables étant fait, il faut maintenant écrire les équations du mouvement en fonction des nouvelles variables. Pour cela, il faut utiliser judicieusement les équations du mouvement (1) et (2) ci-dessus :

- ***Equation pour la nouvelle variable*** $\vec{R}$ : ***référentiel du centre de masse*** - La variable $\vec{R}$, vous vous en êtes certainement rendu compte, représente en fait le vecteur position du ***centre de masse C du système***. Si bien que trouver $\vec{R}$ en fonction du temps, c'est trouver la trajectoire du centre de masse du système. L'équation qui régit l'évolution du centre de masse est facile à obtenir puisqu'il suffit d'ajouter (1) et (2) :

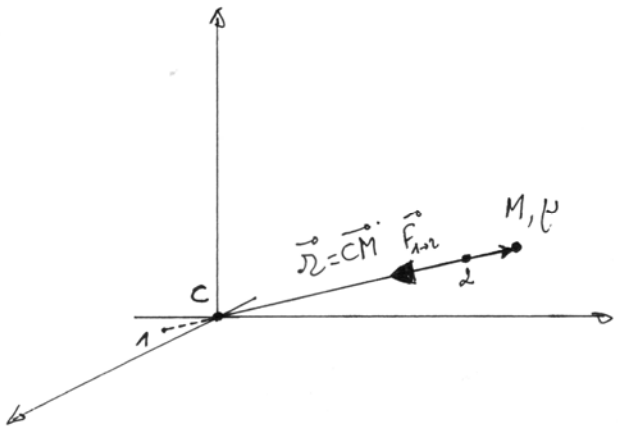
$$m_1\,\vec{a}_1 + m_2\,\vec{a}_2 = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ (m_1 + m_2)\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{0}$$

Cette équation exprime que l'accélération du centre de masse est nulle : il effectue donc un mouvement rectiligne uniforme. En combinant ce résultat avec la conservation de la quantité de mouvement totale du système, on trouve finalement la solution :

$$\vec{R}(t) = \frac{\vec{P}_{tot}}{m_1 + m_2}\ t + \vec{R}_0$$

$\vec{R}_0$ est la position initiale du centre de masse relativement au référentiel $Oxyz$, $\vec{P}_{tot}/(m_1+m_2)$ est la vitesse (constante) à laquelle se déplace le centre de masse relativement au référentiel $Oxyz$. A ce stade, vous devez réaliser que nous avons fait la moitié du travail (il ne reste plus que $\vec{r}(t)$ à trouver) sans faire beaucoup de calculs ; c'est à cela que servent les constantes du mouvement.

Avant de nous occuper de la variable $\vec{r}$, nous allons faire un changement de référentiel. Jusqu'à présent le référentiel galiléen $Oxyz$ était arbitraire, mais nous venons à l'instant de trouver un nouveau référentiel galiléen mieux adapté au problème : celui du centre de masse. C'est ce référentiel que nous allons adopter. Pour se faire, il suffit de déplacer notre ancienne origine $O$ au point $C$ représentant le centre de masse du système et de considérer ce point comme fixe (c'est-à-dire adopter ce nouveau référentiel comme fixe). Ce qui revient mathématiquement à dire que $\vec{R}_0 = \vec{0}$ et $\vec{P}_{tot} = \vec{0}$, soit finalement : $\vec{R}(t) = \vec{0}$. Comprenez bien que ce choix n'enlève rien à la généralité du problème à deux corps, c'est un simple choix de référentiel galiléen mieux adapté que les autres pour décrire le mouvement du soleil et de la planète.




***- Equation pour la variable $\vec{r}$ : retour à un problème à un corps*** - L'équation pour la variable $\vec{r}$ s'obtient aussi grâce aux équations (1) et (2) de départ : en divisant (1) par $m_1$, (2) par $m_2$ et en soustrayant membre à membre, on obtient :

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{1\to 2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{2\to 1}}{m_1} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{1\to 2}$$

de sorte que l'équation différentielle pour la variable $\vec{r}$ s'écrit :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{1\to 2}$$

Tout se passe comme si on avait là une équation de la dynamique pour ***une particule de masse fictive*** $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$, repérée par le rayon vecteur $\vec{r}$, en mouvement sous l'effet d'une force $\vec{F}_{1\to 2}$ : le problème initial à deux corps est ainsi devenu un problème à un seul corps (fictif).

**N.B.** On retiendra que la masse fictive $\mu$ est telle que : $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

Toute l'analyse qui vient d'être faite dans ce VI-1 est valable pour n'importe quel problème à deux corps isolés dans l'univers. Nous allons voir maintenant que le problème du mouvement des planètes se simplifie encore car les forces y sont centrales.

### *VI -2 Equation du mouvement – théorème du moment cinétique*

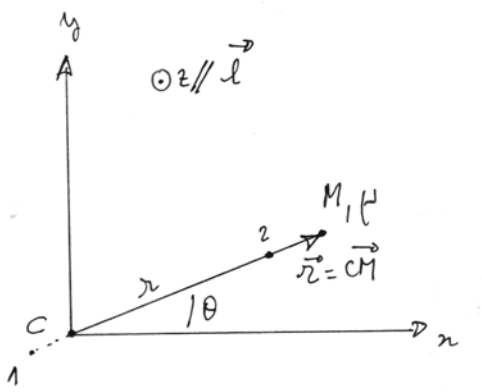
Résumons ce qui a été fait dans la section précédente : nous avons transformé le problème initial à deux corps en un problème à un seul corps fictif de masse $\mu$, repéré par le vecteur position $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Ce vecteur définit de façon univoque la position du second point par rapport au premier (ou inversement), il permet donc de décrire le mouvement relatif d'un point matériel par rapport à l'autre. Pour avoir le mouvement de chacun des deux points, il suffit de se reporter aux équations définies dans la section précédente où $\vec{r}_2$ et $\vec{r}_1$ sont obtenus en fonction de $\vec{r}$ et $\vec{R}$. Concernant $\vec{R}$, nous avons montré que l'évolution de ce vecteur en fonction du temps représente le mouvement du centre de masse du système et que ce mouvement est rectiligne uniforme en raison du théorème de la conservation de la quantité de mouvement. Cela nous a permis de choisir le référentiel du centre de masse (en faisant $\vec{R}(t) = \vec{0}$) pour décrire le mouvement des deux points matériels. Ce choix implique que $\vec{r}$ est le vecteur joignant le centre de masse $C$ au point $M$ représentant la particule fictive de masse $\mu$ soumise à la force $\vec{F}_{1\to 2}$.

Il nous reste à résoudre l'équation différentielle du mouvement à laquelle obéit $\vec{r}$ et qui s'écrit :

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{1\to 2} = -G \frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2} \vec{u}_{1\to 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \qquad (5)$$

Dans l'expression de la force, $r$ est le module du vecteur $\vec{r}$, et nous avons remplacé la notation $\vec{u}_{1\to 2}$ du vecteur unitaire joignant 1 à 2 par la notation $\vec{u}_r$ pour bien voir que <u>cette force est centrale</u> (voir le dessin précédent) puisque sa direction passe par l'origine $C$ du référentiel.

A priori, le mouvement se fait dans l'espace à 3 dimensions et il semble que nous devions utiliser les coordonnées sphériques pour continuer. Mais nous allons à nouveau simplifier le problème en faisant appel cette fois au théorème du moment cinétique appliqué au cas des forces centrales : rappelons-nous que le mouvement s'effectue alors dans un plan perpendiculaire à la direction du moment cinétique qui reste constante, et que le module du moment cinétique reste constant (nous l'appellerons $\ell$). Puisque le mouvement est plan, nous allons choisir les axes du référentiel du centre de masse de telle sorte que ce mouvement ait lieu dans le plan $Cxy$, le moment cinétique étant dirigé le long de l'axe $Cz$. Deux coordonnées seulement suffisent donc à repérer le point fictif dans le plan $Cxy$ ; nous choisirons les coordonnées polaires $r$ et $\theta$, où $\theta$ est l'angle entre l'axe $Cx$ et le rayon vecteur $\overrightarrow{CM}$.




Dans ces conditions, le moment cinétique du point matériel fictif s'écrit :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \mu \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \wedge \mu \left( \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \right) = \mu\, r^2 \dot{\theta}\ \vec{u}_z$$

et le fait que le module du moment cinétique soit constant entraîne alors la relation suivante entre les variables $r$ et $\theta$ :

$$r^2\dot{\theta} = Cte = \frac{\ell}{\mu} \qquad (6)$$

Remarquez que cette relation n'exprime rien d'autre que la loi des aires dont nous avons déjà parlé. La seconde loi de Kepler est donc démontrée. Remarquez aussi que cette relation nous permet d'obtenir $r(t)$ si $\theta(t)$ est connu ou réciproquement.

### *VI -3 <u>Formule de Binet – trajectoire</u>*

Au point ou nous en sommes, différentes méthodes sont possibles pour résoudre le problème. Dans ce VI-3, nous allons nous contenter de déterminer l'équation de la trajectoire $r(\theta)$, sans nous intéresser aux équations paramétriques ($r(t)$ et $\theta(t)$), en faisant appel à la formule de Binet que nous avons vue au VI-3 du poly de cinématique.

Après transposition des notations, la formule de Binet relie la trajectoire cherchée à l'accélération selon la formule :

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\left(\frac{\ell}{\mu}\right)^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] \vec{u}_r$$

où $u = 1/r$. En identifiant cette écriture de l'accélération avec la précédente (équation (5)), on obtient l'équation différentielle suivante pour $u$ :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{G\mu}{\ell^2}\, m_1 m_2$$

La solution générale à cette équation vous est sans doute maintenant familière : elle est la somme de la solution générale à l'équation sans second membre [ici : $A\cos(\theta + \theta_0)$ ] et d'une solution particulière de l'équation avec second membre [ici : $G\mu\, m_1 m_2 / \ell^2$ ]. Nous l'écrirons sous la forme :

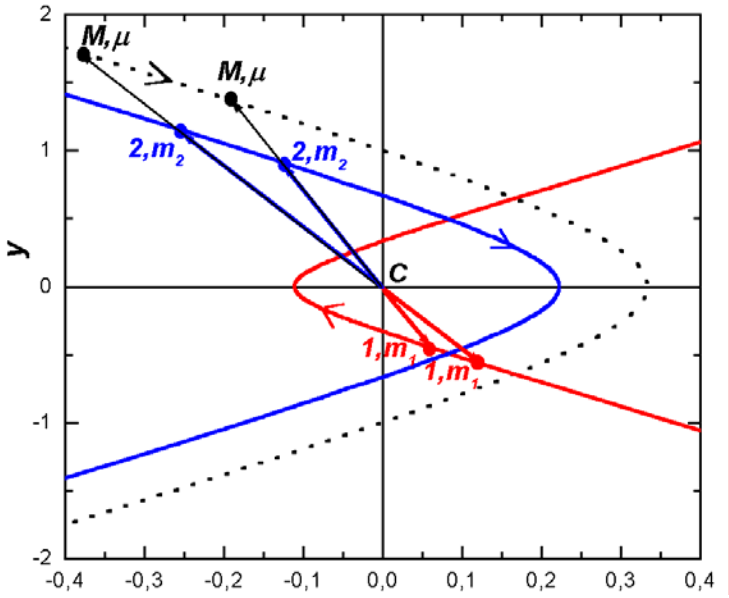
$$u = \frac{1}{r} = \frac{G\mu}{\ell^2} m_1 m_2 \left\{ 1 + e \cos(\theta + \theta_0) \right\} \qquad (7)$$

C'est l'équation d'une famille de courbes bien connues appelées coniques ♦. Le paramètre $\theta_0$ est peu important car il nous renseigne seulement sur la valeur de $r$ lorsque $\theta = 0$. Mais la valeur « absolue » de $\theta$ est arbitraire puisqu'elle elle dépend du choix initial de l'orientation de l'axe $Cx$. On peut donc choisir, sans restreindre la généralité, une orientation de cet axe telle que $\theta_0 = 0$.

Le paramètre $e$ est sans dimensions et s'appelle ***excentricité*** ; il est d'une grande importance puisque c'est lui qui génère la famille de courbes lorsqu'il varie de 0 à l'infini ♠ :

- Lorsque $e = 0$ : la courbe est un cercle de centre $C$ et de rayon $r = \ell^2 / G\mu\, m_1 m_2$ .
- Lorsque $0 < e < 1$ : la courbe est une ellipse dont un foyer est $C$. Le grande axe de l'ellipse est dirigé le long de l'axe $Cx$ et le petit axe le long de $Cy$.
- Lorsque $e = 1$ : la courbe est une parabole dont le foyer est $C$ et l'axe de symétrie $Cx$.
- Lorsque $e > 1$ : la courbe est une branche d'hyperbole dont le foyer est $C$ et l'axe de symétrie $Cx$.

Certaines de ces courbes sont fermées (cas $0 \le e < 1$) et d'autres ouvertes (cas $e \ge 1$). Elles représentent donc deux situations physiques très différentes. Si la courbe est fermée, cela signifie que les deux points matériels 1 et 2 restent tout le temps à proximité l'un de l'autre : c'est un mouvement lié comme le cas de la terre autour du soleil. Si la courbe est ouverte, cela signifie que les deux points matériels, tôt ou tard, s'éloignent l'un de l'autre à tout jamais : c'est un mouvement de diffusion.

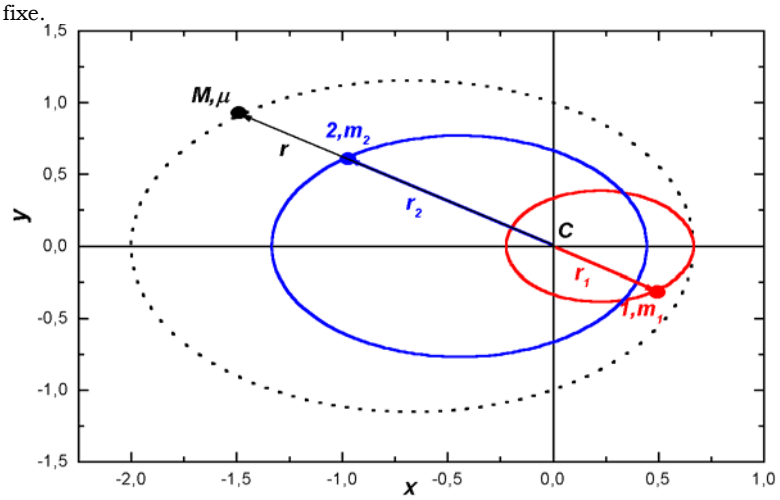



Trajectoires obtenues pour le cas $e = 2$ et $m_1/m_2 = 2$. La trajectoire en pointillé est la trajectoire du mouvement relatif du point matériel 1 vu par le point matériel 2 (ou réciproquement). Les deux autres trajectoires sont les

♦ Ces courbes sont appelées ainsi parce qu'elles sont issues de l'intersection entre un plan et un cône.

♠ N.B. Le cas $e < 0$ n'apporte pas de nouvelles courbes car il est équivalent à avoir fait le choix $\theta_0 = \pi$ et $e > 0$

trajectoires « absolues » des deux points matériels 1 et 2 vues depuis le repère fixe.



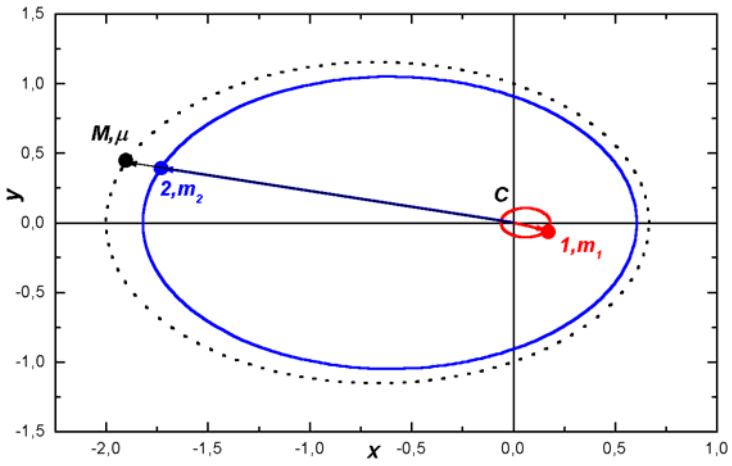

Trajectoires obtenues pour le cas $e = 0.5$ et $m_1/m_2 = 2$. Constatez que les deux points matériels tournent en sens contraire l'un par rapport à l'autre.

*Cas particulier où* $m_1 >> m_2$

Dans de nombreux cas, l'un des deux objets a une masse bien plus importante que l'autre : la masse de la Terre par exemple est $m_T = m_2 = 5.97\ 10^{24}\ kg$ tandis que celle du soleil est $m_S = m_1 = 1.99\ 10^{30}\ kg$, soit un rapport $m_2/m_1$ voisin de $3\ 10^{-6}$. Les équations (3) et (4) donnant $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ en fonction de $\vec{r}$ ($\vec{R} = \vec{0}$) se simplifient et deviennent :

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = -\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{r} \approx -\dfrac{m_2}{m_1}\,\vec{r} \approx \vec{0} \\ \vec{r}_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{r} \approx \vec{r} \end{cases}$$

Ainsi, le mouvement de l'objet le plus massif ($\vec{r}_1$, le soleil) se confond avec celui du centre de masse $C$ : dans le référentiel du centre de masse, cet objet reste immobile en $C$. Tandis que le mouvement de l'objet le moins massif ($\vec{r}_2$, la terre) se confond avec le mouvement relatif des deux objets repéré par $\vec{r}$. C'est dans le cadre de cette approximation que la 1ère loi de Kepler doit être comprise.




Trajectoires obtenues pour le cas $e = 0.5$ et $m_1/m_2 = 10$. Plus ce rapport augmente, plus la trajectoire du point matériel 2 (le moins massif) se confond avec la trajectoire du mouvement relatif entre les deux points matériels, tandis que le point matériel 1 (le plus massif) tend à rester

immobile au point C, centre de masse du système. C'est ce qui se passe pour le cas des planètes autour du soleil.

### *VI -4 Une autre constante du mouvement : l'énergie*

Nous venons de décrire le mouvement des planètes autour du soleil à l'aide de plusieurs paramètres qui sont : la constante de la gravitation $G$, les masses $m_1$ et $m_2$, le moment cinétique $\ell$ du point matériel fictif (qui s'identifie au moment cinétique de la planète dans l'approximation $m_2/m_1$ petit) et enfin l'excentricité $e$ qui génère la famille de courbes possibles pour les trajectoires ♥. Parmi ces paramètres, certains sont des données initiales ($G$, $m_1$ et $m_2$) caractéristiques du système étudié, tandis que d'autres sont des conditions initiales ($\ell$ et $e$) qui peuvent donner lieu, pour un même système, à différentes trajectoires possibles. Le moment cinétique $\ell$, constante du mouvement, est relié à la vitesse angulaire initiale ($\dot{\theta}(t=0)$) et à la distance initiale ($r(t=0)$) de la planète par rapport au soleil. Par contre, l'excentricité $e$ est apparue dans la section VI-3 comme un paramètre géométrique issu de la résolution de l'équation différentielle de la trajectoire sans être relié à une quelconque condition initiale. L'objectif de ce VI-4 est de combler cette lacune : nous allons voir que l'excentricité est relié à une autre constante du mouvement, l'énergie du système.

*Analyse qualitative du mouvement des planètes grâce au théorème de la conservation de l'énergie.*

Dans le V-5 il était indiqué une méthode permettant de résoudre de façon qualitative le problème du mouvement unidimensionnel en fonction du paramètre énergie. Appliquons cette méthode au problème bidimensionnel du mouvement des planètes.

L'énergie cinétique du système est :

$$E_c = \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\, m_2\, \dot{\vec{r}}_2^{\,2} = \frac{1}{2}\,(m_1+m_2)\,\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,\dot{\vec{r}}^{\,2} = \frac{1}{2}\,\mu\,\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

où l'expression finale est obtenue après avoir remplacé $\dot{\vec{r}}_1$ et $\dot{\vec{r}}_2$ par leurs valeurs en fonction de $\dot{\vec{R}}$ et $\dot{\vec{r}}$ en utilisant les équations (3) et (4), et en ayant fait $\dot{\vec{R}} = \vec{0}$ en raison du changement de référentiel.

Vous vérifierez par vous même ou en TD que l'énergie potentielle du système est ♣:

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -\frac{G\,m_1 m_2}{r}$$

de sorte que l'énergie mécanique du système, constante du mouvement, s'écrit :

$$E = Cte = E_c + E_p = \frac{1}{2}\mu\,\dot{\vec{r}}^{\,2} - \frac{G\,m_1 m_2}{r}$$

---

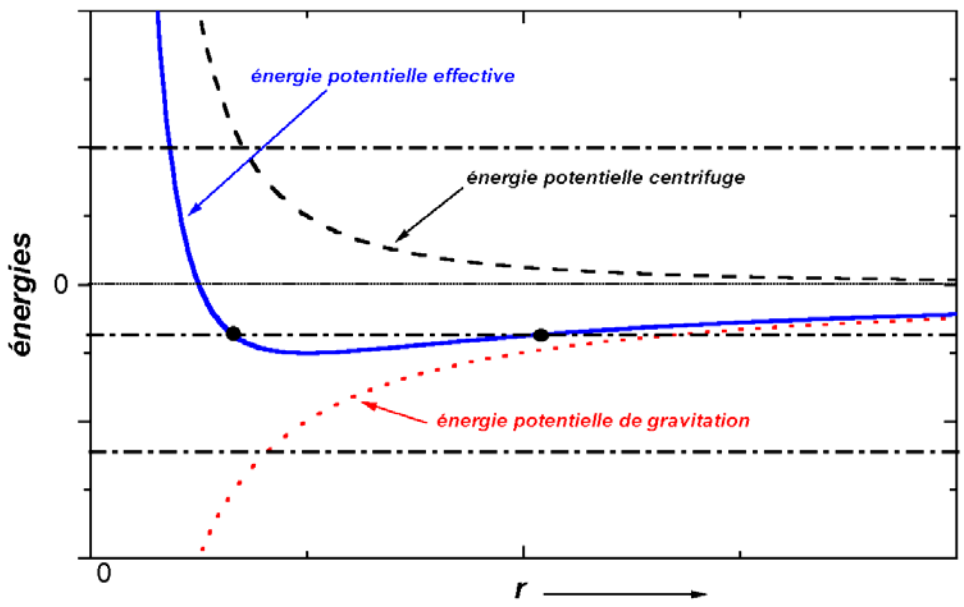
♥ On devrait rajouter à ces données la position initiale du centre de masse ($\vec{R}_0$) et la quantité de mouvement du système ($\vec{P}_{tot}$). Mais toutes deux ont été choisies égales à $\vec{0}$ par changement de référentiel galiléen.

♣ En prenant le gradient de $E_p$ par rapport à $\vec{r}_1$, on trouve la force de gravitation que 2 applique sur 1, tandis qu'en prenant le gradient de $E_p$ par rapport à $\vec{r}_2$, on trouve la force de gravitation que 1 applique sur 2.

Dans cette expression, nous allons remplacer $\dot{\vec{r}}$ par sa valeur : $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ et utiliser le théorème du moment cinétique (équation (6) ci-dessus) pour obtenir finalement :

$$E = \frac{1}{2}\mu\,\dot{r}^2 + \left[\frac{1}{2}\frac{\ell^2}{\mu\,r^2} - \frac{G\,m_1 m_2}{r}\right] \qquad (8)$$

Examinez bien ce résultat, c'est une expression très analogue à ce que nous avions obtenu au V-5 : tout se passe comme si le premier terme représentait l'énergie cinétique d'une particule de masse $\mu$ se déplaçant le long de l'axe des $r$ (axe porté par le vecteur $\vec{u}_r$) et le deuxième terme entre crochets représentait l'énergie potentielle à laquelle est soumise cette particule. Mais attention, cette analogie a ses limites car il ne faut pas oublier que le problème étudié est à deux dimensions : la variable $r$ dans ce problème ne peut pas être négative comme pouvait l'être la variable $x$ du problème V-5. $r$ représente en effet la distance du centre de masse C au point M représentant la particule fictive de masse $\mu$, et la quantité $1/2\,\mu\dot{r}^2$ ne représente en fait qu'une partie de l'énergie cinétique : celle associée au mouvement le long de l'axe porté par $\vec{u}_r$. L'autre partie de l'énergie cinétique, celle associée au mouvement de rotation porté par le vecteur $\vec{u}_\theta$, a été reportée dans le terme entre crochets et son expression a été modifiée grâce au théorème du moment cinétique de sorte que $\dot{\theta}$ n'apparait plus. On obtient ainsi un terme en $\ell^2/2\mu r^2$ que l'on a coutume d'appeler **énergie potentielle centrifuge**. La dénomination « centrifuge » (qui fuit le centre) provient de ce que la présence de ce terme empêche la chute des deux points matériels l'un sur l'autre. La somme de l'énergie potentielle centrifuge et de l'énergie potentielle de gravitation forme ce qu'on appelle **l'énergie potentielle effective** associée au problème.
Maintenant que les limites de l'analogie avec les problèmes unidimensionnels ont été soulignées, on peut appliquer la méthode décrite au V-5. Le potentiel effectif est représenté (pour $\ell \neq 0$) sur la figure ci-dessous ainsi que quelques valeurs différentes pour l'énergie.



L'examen de cette figure amène aux conclusions suivantes :

- Si $E \geq 0$, nous avons à faire à un mouvement de diffusion. Il existe une valeur minimale de $r$ pour laquelle le mouvement n'est pas possible ; cette valeur est appelée distance minimale d'approche
- Si $E < 0$, le mouvement est lié. Il existe une valeur minimale de $r$ (appelée périgée) et une valeur maximale (appelée apogée). En dehors de ces valeurs le mouvement n'est pas possible.
- Si $E = -\mu G^2 m_1^2 m_2^2 / 2\ell^2$, une seule valeur de $r$ est possible : le mouvement est circulaire (uniforme). Le rayon du cercle correspond au minimum du potentiel effectif.
- Si $E < -\mu G^2 m_1^2 m_2^2 / 2\ell^2$, le mouvement n'est jamais possible.

Cette analyse qualitative montre clairement un lien entre l'énergie du système et le paramètre excentricité, lien que nous allons maintenant mettre en lumière.

*Lien entre excentricité et énergie*

Plusieurs méthodes sont possibles pour trouver le lien existant entre excentricité et énergie. Le plus simple est sans doute d'examiner ce qui se passe aux points de la trajectoire où la vitesse radiale (c'est-à-dire la composante du vecteur vitesse selon $\vec{u}_r$ : $\dot{r}$) est nulle. Ces points correspondent soit à la distance minimale d'approche, soit à l'apogée et au périgée [♠]. En ces points, la relation (8) s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{\mu r^2} - \frac{G m_1 m_2}{r} \Leftrightarrow r^2 + \frac{G m_1 m_2}{E} r - \frac{\ell^2}{2\mu E} = 0$$

Cette relation se présente comme une équation du second degré en $r$ dont la résolution nous donnera la valeur de $r$ pour ces points spéciaux en fonction des paramètres du problème dont l'énergie. On trouve :

$$r_{min,max} = \frac{G m_1 m_2}{2E}\left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}}\right]$$

Les conditions d'existence de cette solution seraient à discuter ($r$ doit être positif et l'expression sous la racine aussi). Faites-le et vous verrez que l'on retombe sur la discussion précédente où nous avons distingué les cas $E \geq 0$, etc…Pour ce qui suit, on traite le cas

[♠] En effet : c'est forcément en ces points que $\dot{r} = 0$ car si ça n'était pas le cas, le point matériel pourrait dépasser ces points limites puisqu'il aurait une vitesse radiale non nulle, ce qu'il ne peut pas faire.

$E \geq 0$ ♦, ce qui implique de choisir le signe + dans l'expression ci-dessus pour obtenir la valeur $r_{\min}$.

D'un autre côté, on peut aussi exprimer la valeur de $r$ en ces points spéciaux grâce à l'équation de la trajectoire (équation (7)) que nous avons trouvée précédemment et qui s'exprime en fonction de l'excentricité. On voit facilement par exemple que la valeur minimale de $r$ est obtenue pour $\theta = 0$, ce qui donne :

$$r_{min} = \frac{\ell^2}{G\mu m_1 m_2 (1+e)}$$

En égalant ce résultat avec le précédent (où le signe + est retenu), on obtient, après quelques manipulations algébriques, la relation cherchée entre l'énergie mécanique et l'excentricité :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}}$$

### *VI -5 La troisième loi de Kepler*

La troisième loi de Kepler concerne les mouvements elliptiques (courbes fermées, $E < 0$, $0 \leq e < 1$) et relie la période de révolution au demi-grand axe de l'ellipse associée au mouvement relatif. Pour démontrer cette loi, nous allons utiliser la loi des aires qui stipule que la vitesse aréolaire est constante au cours du mouvement. Rappelez-vous que la vitesse aréolaire s'écrit $v_{aré} = dS/dt = 1/2\ r^2\dot{\theta}$ , où $dS$ est l'aire élémentaire balayée pendant $dt$, et qu'en raison de la loi des aires elle est constante et vaut (équation (6) du VI-2) :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\ell}{2\mu} \qquad \Leftrightarrow \qquad dS = \frac{\ell}{2\mu}\, dt$$

Au cours d'une période, l'aire balayée par le rayon vecteur est simplement égale à l'aire $S$ de l'ellipse, si bien qu'en intégrant la relation ci-dessus sur une période $T$, on trouve :

$$S = \frac{\ell T}{2\mu}$$

Or, l'aire d'une ellipse est $S = \pi ab$ où $a$ est le demi-grand axe et $b$ le demi-petit axe qui est relié au demi-grand axe par la relation géométrique « bien connue » : $b^2 = a^2(1-e^2)$. Ce qui donne :

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{\ell T}{2\mu} \qquad \Leftrightarrow \qquad T = 2\mu\pi a^2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{\ell}$$

♦ On vérifie facilement que l'on obtiendra le même résultat final pour les autres valeurs de l'énergie. Faites-le !

Enfin, il est possible d'éliminer $e$ et $\ell$ de ce résultat en utilisant les relations du paragraphe précédent donnant $r_{min,max}$ ainsi que la relation entre excentricité et énergie :

$$a = r_{min} + r_{max} = -\frac{G\,m_1 m_2}{2E} = \frac{\ell^2}{\mu\, G\, m_1 m_2 (1-e^2)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sqrt{1-e^2}}{\ell} = \sqrt{\frac{1}{a\mu\, G\, m_1 m_2}}$$

En injectant cette dernière relation dans le résultant précédent et en remplaçant $\mu$ par sa valeur en fonction de $m_1$ et $m_2$, on trouve la loi de Kepler :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}\, a^3$$

qui exprime que le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe.

*Cas particulier où* $m_1 >> m_2$

Kepler découvrit cette loi à l'aide des données expérimentales obtenues pour la planète Mars que l'astronome Tycho Brahé lui avait fourni. Dans ce cas, la masse $m_2$ de la planète est négligeable devant celle du soleil ($m_1$) et la loi s'écrit :

$$T^2 \approx \frac{4\pi^2}{G\, m_1}\, a^3$$

Ce résultat est indépendant de la masse de la planète, de sorte que Kepler affirmait que le rapport $T^2/a^3$ était toujours le même pour toutes les planètes du système solaire. On voit que ce n'est qu'une approximation, la masse de la planète apportant une petite correction.

**Principales données du système planétaire**

| Planète | Demi grand axe de l'orbite En UA | Demi grand axe de l'orbite En millions de kilomètres | Révolution sidérale en années | Révolution synodique en jours | Excentricité de l'orbite |
|---|---|---|---|---|---|
| Mercure | 0,387 | 57,9 | 0,241 | 115,9 | 0,206 |
| Vénus | 0,723 | 108,2 | 0,615 | 583,9 | 0,007 |
| Terre | 1,000 | 149,6 | 1,000 | – | 0,017 |
| Mars | 1,524 | 227,9 | 1,881 | 779,9 | 0,093 |
| Jupiter | 5,203 | 778,3 | 11,862 | 398,9 | 0,048 |
| Saturne | 9,539 | 1 427,0 | 29,458 | 378,1 | 0,055 |
| Uranus | 19,191 | 2 869,6 | 84,014 | 369,7 | 0,047 |
| Neptune | 30,061 | 4 496,6 | 164,793 | 367,5 | 0,010 |
| Pluton | 39,529 | 5 900,0 | 247,700 | 366,7 | 0,248 |

| Planète | Inclinaison orbitale sur l'écliptique | Vitesse orbitale moyenne en km/s | Diamètre équatorial en kilomètres | Masse en masses terrestres | Masse volumique en g/cm³ |
|---|---|---|---|---|---|
| Mercure | 7° 0,3' | 47,9 | 4 878 | 0,055 | 5,43 |
| Vénus | 3° 23,7' | 35,0 | 12 104 | 0,815 | 5,24 |
| Terre | – | 29,8 | 12 756 | 1,000 | 5,52 |
| Mars | 1° 51,0' | 24,1 | 6 794 | 0,107 | 3,93 |
| Jupiter | 1° 18,3' | 13,1 | 142 984 | 317,89 | 1,33 |
| Saturne | 2° 29,3' | 9,6 | 120 536 | 95,18 | 0,70 |
| Uranus | 0° 46,3' | 6,8 | 51 118 | 14,54 | 1,24 |
| Neptune | 1° 46,3' | 5,4 | 49 528 | 17,13 | 1,67 |
| Pluton | 17° 9,0' | 4,7 | 2 246 | 0,03 | ~ 2 |

| Planète | Vitesse d'évasion en km/s | Accélération de la pesanteur à la surface en m/s² | Durée de la rotation à l'équateur | Inclinaison de l'équateur sur le plan de l'orbite | Albédo (coefficient) de réflexion |
|---|---|---|---|---|---|
| Mercure | 4,2 | 3,70 | 58 j 16 h | ~ 0° | 0,12 |
| Vénus | 10,4 | 8,87 | 243 j | 117,3° | 0,65 |
| Terre | 11,2 | 9,78 | 23 h 56 min | 23° 27' | 0,37 |
| Mars | 5,0 | 3,71 | 24 h 37 min | 25° 11' | 0,15 |
| Jupiter | 59,5 | 23,12 | 9 h 50 min | 3° 07' | 0,45 |
| Saturne | 35,5 | 8,96 | 10 h 14 min | 26° 44' | 0,47 |
| Uranus | 21,3 | 8,69 | 17 h 12 min | 97° 52' | 0,51 |
| Neptune | 23,7 | 11,00 | 16 h 06 min | 28° 48' | 0,41 |
| Pluton | 1,0 | 0,70 | 6 j 23 h | > 50° | 0,3 ? |

*indications sommaires pour le tableau de données ci-dessus*

**1UA** = une Unité Astronomique de distance = distance Terre-Soleil

**Révolution synodique** : intervalle de temps entre deux aspects identiques de l'astre vu depuis la terre.

**Révolution sidérale** : période de rotation autour du soleil.

**Ecliptique** : plan de l'espace dans lequel s'effectue le mouvement de la Terre autour du soleil.

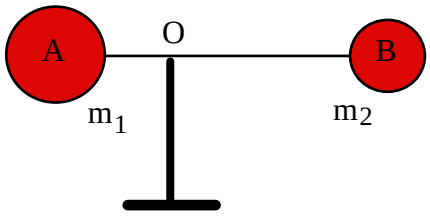
**Vitesse d'évasion** : vitesse nécessaire pour échapper à la gravitation de la planète à partir de sa surface.

**Albédo** : coefficient de réflexion de la lumière à la surface de l'astre. Un albédo de 0.12 signifie que 12% de l'intensité lumineuse incidente est réfléchie.

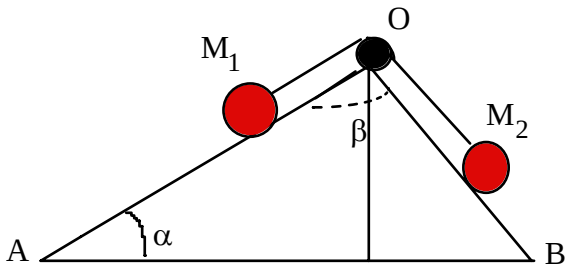
Ce tableau de données est tiré de l'*Atlas de l'astronomie*, Joachim Herrmann, Le livre de poche, 1998

## VII – EQUILIBRE – STABILITE – ECARTS A L'EQUILIBRE

La dynamique, qui se préoccupe des causes du mouvement, se préoccupe également de l'absence de mouvement. Elle englobe ainsi dans son formalisme une science ancienne que l'on appelait *la statique*. Le problème que se posait la statique était celui de l'équilibre d'un système mécanique. Archimède (-287, -212) s'intéressait par exemple à deux grands problèmes de cette science : celui du levier et celui du plan incliné.




Le levier : A quelle condition les corps A et B sont-ils à l'équilibre ?




Le plan incliné : à quelle condition les corps M1 et M2 sont-ils à l'équilibre ?

**Définition** : on dit qu'un point matériel est à l'équilibre dans un certain référentiel si sa vitesse dans ce référentiel est constamment nulle.

Dans la définition qui précède, il est bien pris soin de spécifier que l'équilibre d'un point matériel ne peut se référer qu'à un référentiel donné : l'équilibre est en effet une notion relative ♣. Pensez à un enfant sur un manège, il ne bouge pas par rapport au référentiel lié au manège. On parle souvent dans ce cas d'équilibre relatif.

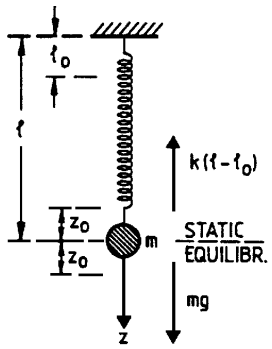
Si la vitesse d'un point matériel à l'équilibre est constamment nulle (relativement à un certain référentiel galiléen ou pas), c'est donc que son accélération l'est également. Il s'ensuit que la condition nécessaire pour réaliser un équilibre est que la somme de toutes les forces $\vec{F}_i$ qui agissent sur le point matériel doit être nulle, soit :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \ \forall \ t \qquad \Rightarrow \text{ Le point matériel est à l'équilibre}$$

Cette équation permet dans la pratique de trouver la ou les positions d'équilibres d'un point matériel si les forces qui agissent sur lui sont connues. Prenons l'exemple simple du ressort

♣ Autrement dit, l'absence de mouvement n'est qu'un cas particulier de mouvement et nous savons bien que le mouvement n'est qu'une notion relative.

vertical schématisé sur la figure ci-dessous. Les forces qui agissent sur la masse $m$ accrochée à ce ressort sont : son poids $m\vec{g}$ et la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z$, où $k$ est la constante de rappel du ressort, $\ell_0$ est la longueur du ressort à vide (masse non accrochée) et $\ell$ sa longueur une fois la masse accrochée. A l'équilibre ces deux forces se compensent l'une l'autre à chaque instant :




$$\vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$$

La longueur du ressort à l'équilibre $\ell_{eq}$ (c'est-à-dire la position d'équilibre de la masse le long de l'axe des $z$) est obtenue grâce à cette équation. Vous devriez pouvoir démontrer facilement que :

$$\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

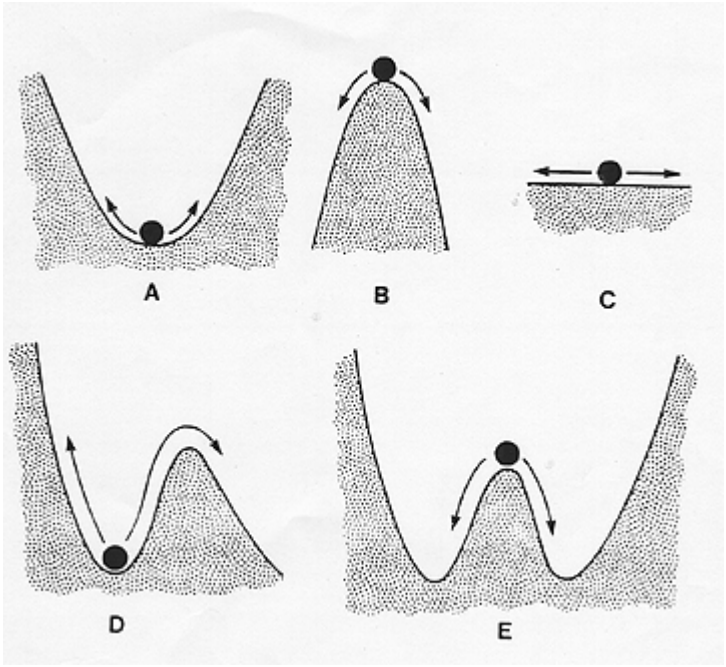
L'équation de la dynamique dans laquelle on a fait $\vec{a} = \vec{0}$ permet donc de trouver la ou les positions d'équilibres. Mais attention, cette équation est une condition nécessaire pour que l'équilibre soit réalisé mais pas suffisante. Il se peut en effet que l'accélération soit nulle à un instant $t$ donné seulement, ou encore que cette accélération soit nulle tout le temps mais que la vitesse soit une constante non nulle. Dans ces deux cas, le point matériel n'est pas à l'équilibre. Dans le premier cas, le point matériel passe bien à l'instant $t$ par une position d'équilibre mais il poursuit son mouvement, car pour qu'il reste à cette position il aurait fallu que sa vitesse soit nulle à cet instant. Dans le second cas, l'accélération a beau être nulle tout le temps, si la vitesse ne l'est pas, il n'y a pas d'équilibre à proprement parler. L'équilibre rappelons-le est défini par une vitesse constamment nulle.

Lorsque l'on a à faire à un système de $N$ points matériels, on distingue deux types d'équilibres. L'équilibre est dit statique si les $N$ points matériels sont effectivement tous au repos. L'équilibre est dit dynamique si c'est l'objet formé par ces $N$ points matériels qui nous apparaît comme étant au repos (à l'équilibre) sans qu'aucun des points matériels ne le soit forcément. Un exemple typique de cette situation est l'eau contenue dans un verre : macroscopiquement, cet objet (l'eau) est à l'équilibre sur la table sous l'effet de son poids (somme des poids des $N$ points matériels) et de la réaction de la table, tandis qu'au niveau microscopique, chacun des $N$ points matériels est en mouvement sous l'effet des forces électromagnétiques existant entre eux. Bien sûr, il n'y a pas lieu de faire une telle distinction dans le cas d'un seul point matériel.

### *VII -1 Stabilité d'une position d'équilibre*

De façon empirique, vous savez qu'un équilibre peut être « fragile » en ce sens que la plus légère perturbation peut rompre cet équilibre (pensez à un château de cartes, à une bille sur une surface incurvée, etc...). Dans d'autres cas, l'équilibre est d'une stabilité remarquable (un livre sur une table par exemple). Il y a donc différents types d'équilibres.

Dans les problèmes à une dimension ♦, on peut définir trois positions d'équilibres schématisées en A, B et C sur la figure ci-dessous où l'on fait référence au cas d'une balle dans diverses situations.



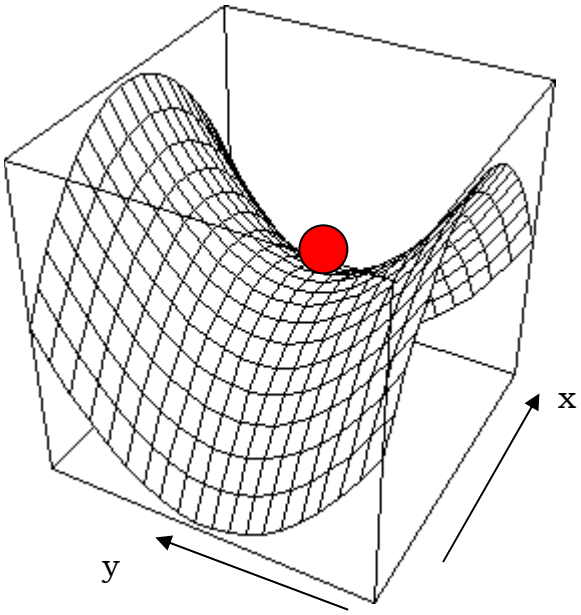

Dans la situation A, la position d'équilibre est qualifiée de **stable** : si on déplace un peu la bille de cette position, elle y revient toujours. Dans la situation B, l'équilibre est **instable** : si on déplace un peu la bille de cette position, elle n'y revient jamais. Dans la situation C, la position d'équilibre est dite **indifférente** ou encore neutre : la balle reste à l'endroit où on l'a mise. Seules ces trois positions d'équilibre peuvent se rencontrer à une dimension.

Toutefois, si on rentre dans les détails, on se rend compte que ces 3 positions ne rendent pas complètement compte des divers cas possibles d'équilibres. C'est ce qu'évoquent les deux dessins D et E de la figure précédente. En D, la position d'équilibre est bien stable, mais la bille peut malgré tout dépasser une position critique (la position d'équilibre instable au sommet) au delà de laquelle elle ne reviendra pas en D ; ce type de situation est qualifiée de métastable. En E, la position d'équilibre instable peut déboucher sur 2 situations selon que la bille va d'un côté ou de l'autre ; c'est encore une situation métastable.

A plusieurs dimensions, il existe d'autres types de positions d'équilibre. Dans l'exemple ci-dessous, la bille est à une position d'équilibre sur une surface en forme de selle de cheval. Dans la direction x, cette position apparaît comme instable, par contre cette

♦ On dit d'un problème qu'il est à une dimension si une seule variable spatiale caractérisant la position du point matériel intervient dans ce problème. Ce peut être une distance mais aussi un angle. L'exemple du ressort vertical est un problème à une dimension. Un pendule de longueur fixe en mouvement dans un plan est aussi un problème à une dimension (seul l'angle entre l'axe vertical et le pendule est variable dans ce problème).

position est stable du point de vue de la direction des y. Mais il est clair que la situation est instable.




Nous ne nous intéresserons dans ce cours qu'à la recherche de la stabilité d'une position d'équilibre dans les cas unidimensionnels : position stable, instable ou indifférente.

### *VII – 2 Recherche de la stabilité d'une position d'équilibre*

Pour définir la stabilité d'une position d'équilibre, nous avons évoqué un petit déplacement du point matériel au voisinage de cette position. Nous allons ici transcrire mathématiquement ce que cela veut dire dans le cas unidimensionnel. Considérons un point matériel soumis à un ensemble de forces dont la résultante est $\vec{F}$. Cette résultante des forces peut dépendre d'une façon ou d'une autre de la position du point matériel au travers d'une seule variable que nous appellerons $\lambda$ : $\vec{F} = \vec{F}(\lambda)$. La variable $\lambda$ peut être une distance, un angle ou tout autre chose pourvu qu'elle caractérise la position du point matériel. La ou les positions d'équilibre sont obtenues en résolvant l'équation :

$$\vec{F}(\lambda_{eq}) = \vec{0}$$

ainsi qu'on l'a vu précédemment. Soit $\lambda_0$ une solution à cette équation. Cherchons maintenant quelle est la stabilité de cette position d'équilibre. Pour se faire, déplaçons le point matériel de cette position d'équilibre d'une petite quantité $\varepsilon$ de sorte que $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$. La force totale que subit le point matériel au cours de ce déplacement est donc $\vec{F}(\lambda) = \vec{F}(\lambda_0 + \varepsilon)$. Soit maintenant $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé dans le sens du déplacement. Le travail effectué par la force est alors :

$$dW = \vec{F}(\lambda_0 + \varepsilon).\varepsilon\,\vec{u} = F_{proj}(\lambda_0 + \varepsilon).\varepsilon$$

où $F_{proj}(\lambda_0 + \varepsilon)$ est la projection de $\vec{F}$ le long du déplacement [♥]. Comme $\varepsilon$ est petit, on peut développer au premier ordre (développement de Taylor) la projection de $\vec{F}$ et écrire :

$$F_{proj}(\lambda_0 + \varepsilon) = F_{proj}(\lambda_0) + \varepsilon \left.\frac{dF_{proj}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}$$

Comme $\lambda_0$ est la position d'équilibre, on a forcément $F_{proj}(\lambda_0) = 0$. Le travail de la force devient donc :

$$dW = \varepsilon^2 \left.\frac{dF_{proj}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}$$

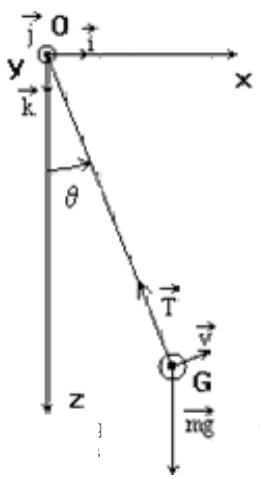
Il en résulte trois possibilités :

→ si $\left.\frac{dF_{proj}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} < 0$, le travail est alors négatif et donc résistant ; ce qui signifie que la force résultante (ou tout au moins sa projection) s'oppose au déplacement $\varepsilon$ et a tendance à faire revenir le point matériel à sa position initiale : la position d'équilibre est donc stable.

→ si $\left.\frac{dF_{proj}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} > 0$, le travail est alors positif et donc moteur ; ce qui signifie que la force résultante (ou tout au moins sa projection) aide au déplacement $\varepsilon$ et a tendance à éloigner le point matériel à sa position initiale : la position d'équilibre est donc instable.

→ si $\left.\frac{dF_{proj}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = 0$, le travail est alors nul ; ce qui signifie que la force résultante (ou tout au moins sa projection) n'agit en rien sur le déplacement $\varepsilon$ : la position d'équilibre est donc indifférente.

### *VII – 3 un exemple : le pendule plan*




Le pendule plan consiste en une tige de longueur fixe $L$, de masse négligeable, au bout de laquelle est accrochée une masse $m$. L'ensemble est contraint de se mouvoir dans un plan (le plan xOz de la figure). Les forces qui agissent sur la masse $m$ repérée par le point G sont : la tension $\vec{T}$ de la tige dirigée le long de la tige et le poids $m\vec{g}$ de la masse dirigé le long de l'axe Oz orienté vers le bas. C'est l'angle $\theta$ ici qui décrit la position de la masse $m$.

[♥] e la force $\vec{F}$ ne dépende pas de $\lambda$, mais que ce soit sa projection le long du déplacement. Cela ne change pas le raisonnement. L'exemple du pendule plan qui suit rentre d'ailleurs dans ce cadre.

Les positions d'équilibre du pendule sont déterminées par l'équation : $\vec{T} + m\vec{g} = \vec{0}$. En projetant cette équation sur les vecteurs de base polaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, vous trouverez deux équations dont l'une donne la valeur de la tension à la position d'équilibre en fonction de l'angle $\theta$ : $T = mg\cos\theta$, et l'autre donne les valeurs de $\theta$ aux positions d'équilibre : $mg\sin\theta = 0$. On trouve ainsi deux positions d'équilibre, la première en $\theta_0 = 0$ et la seconde en $\theta_1 = \pi$.

La stabilité des positions d'équilibre est déterminée par le signe de la dérivée de la projection de la résultante des forces le long de la trajectoire. La trajectoire ici se fait le long du vecteur $\vec{u}_\theta$, on a donc $F_{proj}(\theta) = -mg\sin\theta$. La dérivée de cette projection par rapport à $\theta$ vaut $-mg\cos\theta$. Elle est négative en $\theta_0 = 0$ : la position d'équilibre $\theta_0 = 0$ est donc une position stable. Elle est positive en $\theta_1 = \pi$ : la position d'équilibre $\theta_1 = \pi$ est donc une position instable.

### *VII – 4 Le même exemple avec un autre point de vue*

Si vous avez oublié la méthode précédente, vous pouvez malgré tout vous en sortir en examinant l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre. L' équation du mouvement du pendule plan projetée sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ s'écrit ici (vérifiez-le) :

$$\begin{cases} mg\cos\theta - T = -mL\dot{\theta}^2 \\ -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta} \end{cases}$$

La première équation donne la valeur de la tension en tout point de la trajectoire, la seconde est l'équation du mouvement proprement dite qui a lieu le long de $\vec{u}_\theta$ ainsi qu'on l'a déjà dit. C'est cette dernière équation que nous allons examiner au voisinage de la position d'équilibre $\theta_0 = 0$. Posons donc que $\theta = \theta_0 + \varepsilon = \varepsilon$ où $\varepsilon$ est petit. On a alors $\sin\theta = \sin\varepsilon \approx \varepsilon$ et $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$. De sorte que l'équation du mouvement au voisinage de cette position d'équilibre prend la forme :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{L}\,\varepsilon = 0$$

C'est une équation différentielle que nous connaissons bien maintenant et qui donne lieu a une solution oscillante dans le temps de période $2\pi\sqrt{L/g}$. La masse oscille donc autour de la position $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire autour de la position d'équilibre. La masse reste ainsi toujours confinée au voisinage de sa position d'équilibre dans ce mouvement : cette position est stable.

Une analyse identique au voisinage de la position d'équilibre $\theta_1 = \pi$ donne lieu cette fois à une équation du mouvement :

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{g}{L}\,\varepsilon = 0$$

Le signe – dans cette équation différentielle implique une solution temporelle de type exponentielle réelle. Cela veut dire que la masse s'éloigne de sa position d'équilibre pour ne plus y revenir : cette position est donc instable.

### *VII – 5 Cas où les forces dérivent d'une énergie potentielle*

*Positions d'équilibre*

Lorsque les forces dérivent d'une énergie potentielle, la recherche des positions d'équilibre revient à chercher les extrêma de cette énergie potentielle. En effet, soit $\vec{F}$ la résultante de toutes les forces du problème considéré. Ces forces sont supposées dépendre toutes d'une énergie potentielle dont la somme est $E_p$, de sorte que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, Ep$. Aux positions d'équilibre la résultante des forces est nulle. En ces positions on a donc :

$$\overrightarrow{grad}\, E_p = \vec{0}$$

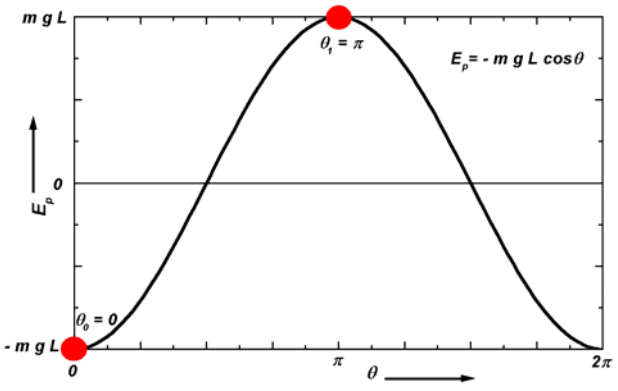
Pratiquement cela revient à résoudre un système de trois équations associées aux 3 coordonnées spatiales qui caractérisent la position du point matériel. En coordonnées cartésiennes par exemple, on a $E_p = E_p(x,y,z)$ et :

$$\overrightarrow{grad}\, E_p = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial E_p}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\,\vec{u}_z = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

**Exemple 1** : la surface en forme de selle de cheval présentée précédemment peut être interprétée de la façon suivante. Cette surface correspond aux valeurs de l'énergie potentielle en tout du plan xOy d'un point matériel contraint de se déplacer dans ce plan. Elle a pour équation : $E_p(x,y) = x^2/a^2 - y^2/b^2$ , ($a$ et $b$ sont des constantes), ce qui conduit à une position d'équilibre en $x_0 = y_0 = 0$ .

**Exemple 2** : dans le problème précédent du pendule plan, l'énergie potentielle associée au poids de la masse est $E_{p,poids} = -mg\,L\cos\theta$ à une constante près sans importance. L'énergie potentielle associée à la tension de la tige est nulle (ou constante) car cette force étant perpendiculaire au déplacement, elle ne travaille pas. Les positions d'équilibre seront donc obtenues en recherchant les extrêma de la fonction énergie potentielle $E_p = -mg\,L\cos\theta$. Cette fonction ne dépendant que de $\theta$, ses extrêma sont obtenus simplement en annulant sa dérivée par rapport à $\theta$, soit :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad mgL\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \;\; ou \;\; \pi$$




Energie potentielle du pendule plan. Les positions d'équilibre sont les extrêma de la courbe. N.B. $\theta = 2\pi$ n'est pas pris en compte

car la variable $\theta$ appartient à l'intervalle $[0,2\pi[$.

*Stabilité des positions d'équilibre*

Au vu de la courbe précédente vous avez sans doute déjà deviné que la recherche de la stabilité des positions d'équilibre va être équivalente à rechercher si les extrêma de l'énergie potentielle correspondent à des minima ou des maxima. C'est exactement cela. On s'attend ainsi à ce que le signe de la dérivée seconde intervienne. Montrons-le dans le cas unidimensionnel. L'énergie potentielle est supposée ne dépendre que d'une variable $\lambda$ caractérisant la position du point matériel : $E_p = E_p(\lambda)$. Le travail effectué au cours d'un déplacement $\varepsilon$ au voisinage de la position d'équilibre $\lambda_0$ est égal à la variation d'énergie potentielle :

$$dW_{\lambda_0 -> \lambda_0 + \varepsilon} = E_p(\lambda_0) - E_p(\lambda_0 + \varepsilon)$$

$\varepsilon$ étant petit, on peut développer $E_p(\lambda_0 + \varepsilon)$ à l'ordre 2 :

$$E_p(\lambda_0 + \varepsilon) = E_p(\lambda_0) + \varepsilon \left.\frac{dE_p}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} + \varepsilon^2 \left.\frac{d^2E_p}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_0}$$

Dans cette expression le terme linéaire en $\varepsilon$ est nul puisque $\lambda_0$ est une position d'équilibre. Le travail effectué vaut donc :

$$dW_{\lambda_0 -> \lambda_0 + \varepsilon} = -\varepsilon^2 \left.\frac{d^2E_p}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_0}$$

D'où les 3 possibilités suivantes :

→ si $\left.\frac{d^2E_p}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_0} > 0$, alors $\lambda_0$ est un minimum de la courbe $E_p(\lambda)$, le travail est résistant et la position d'équilibre est stable.

→ si $\left.\frac{d^2E_p}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_0} < 0$, alors $\lambda_0$ est un maximum de la courbe $E_p(\lambda)$, le travail est moteur et la position d'équilibre est instable.

→ si $\left.\frac{d^2E_p}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_0} = 0$, alors $\lambda_0$ correspond à un point d'inflexion de la courbe $E_p(\lambda)$, le travail est nul et la position d'équilibre est indifférente.

Lorsque le problème est à plusieurs dimensions (2 ou 3), la recherche de la stabilité d'une position d'équilibre est un peu plus complexe. Cela revient toujours à examiner le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle, mais comme il y a plusieurs variables, il y a plusieurs dérivées secondes à examiner. Par exemple, pour notre courbe en selle de cheval, il faudrait examiner le signe de $\partial^2 E_p / \partial x^2$ et de $\partial^2 E_p / \partial y^2$ à la position d'équilibre, mais aussi celui de la dérivée croisée $\partial^2 E_p / \partial x \partial y$ . Cela amène à des discussions sur la façon dont on a écarté le point matériel de sa position d'équilibre. Pour la selle de cheval, on voit bien sur le dessin que si on s'écarte de la position d'équilibre le long de l'axe des y, il y a stabilité. Par contre, un écart à cette position le long de n'importe qu'elle autre direction du plan xOy entraîne l'instabilité. La position d'équilibre ici est dite position *col* (par référence aux cols des montagnes).