# RUDIMENTS D'ANALYSE DIMENSIONNELLE

Chapitre 1 : Physique, grandeurs physiques, dimensions et unités

Chapitre 2 : Analyse dimensionnelle


*T. Gourieux □ 2016*

*Université de Lorraine/Nancy*

Chapitre 1

# PHYSIQUE, GRANDEURS PHYSIQUES, DIMENSIONS ET UNITÉS

**1. Physique.** Dans un point de vue très généraliste, la Physique – en tant que science - est une activité humaine qui s'intéresse à l'étude rationnelle des phénomènes naturels.
C'est à partir de l'observation, de l'expérimentation, de la mathématisation, de l'analyse épistémologique et de la mise en place d'outils conceptuels que le physicien et la physicienne construisent des théories et des modèles dont les prévisions se doivent d'être en accord avec un maximum de phénomènes observés dans la nature ou expérimentés en laboratoire.

Pour mieux cerner l'objet de la Physique, on peut tenter de diviser celle-ci en cinq théories† identifiables dans le tableau ci-dessous. *Grosso modo*, elles constituent et définissent la Physique actuelle. Chacune de ces théories a été éprouvée vis-à-vis des phénomènes qui la concernent et possède ses propres axiomes ainsi que ses propres domaines de validité. Par exemple, les axiomes de la mécanique classique (les lois de Newton et sa théorie de la gravitation) sont valables pour des vitesses faibles devant la vitesse $c$ de la lumière dans le vide, pour des faibles champs de gravitation afin que le cadre

† Ce découpage en 5 est plutôt indicatif ; on pourrait par exemple découpler relativité restreinte et générale et déclarer qu'il y a 6 théories…

spatio-temporel euclidien soit une bonne approximation, et aussi pour des quantités d'action[‡] mises en jeu qui sont grandes devant la constante de Plank $h$ afin que les phénomènes quantiques soient négligeables.

| THÉORIES ACTUELLES DE LA PHYSIQUE | |
|---|---|
| Mécanique classique | Causes et descriptions du mouvement des objets ; théorie newtonienne de la gravitation (champ gravitationnel). |
| Électromagnétisme classique | Phénomènes électriques, magnétiques et ondes électromagnétiques (lumière). C'est une théorie de champ. |
| Physique statistique | Echanges énergétiques (chaleur et travail) dans les systèmes contenant une multitude d'objets ; transitions de phases et phénomènes critiques de la matière. Englobe la thermodynamique classique. |
| Théorie quantique | Systèmes moléculaires, atomiques et subatomiques ; propriétés physico-chimiques de la matière à pression et température nulles. |
| Relativité restreinte et générale | Mouvements rapides et phénomènes gravitationnels à l'échelle de l'Univers. |

Certaines théories sont des « cas limites » : typiquement, les lois du mouvement de la mécanique classique constituent un cas limite de la relativité restreinte lorsque l'on fait tendre $c$ vers l'infini. Et l'espace-temps de la relativité restreinte apparaît comme un cas limite de la relativité générale sous champ gravitationnel nul.

[‡] Une « quantité d'action » a les dimensions d'une énergie multipliée par un temps. $h = 6.63\ 10^{-34}\ J.s.$

Souvent, des concepts physiques ou mathématiques similaires sont utilisés dans ces théories : le concept d'énergie par exemple, celui de champ, d'onde, de masse, ... Il arrive que ces concepts n'aient pas la même signification d'une théorie à l'autre : le temps en mécanique classique est absolu - c'est-à-dire le même pour tou(te)s -, tandis qu'il est relatif en relativité - c'est-à-dire qu'il s'écoule différemment selon le référentiel dans lequel on se place.
Malgré leur cadre assez bien défini au travers des axiomes qui les fondent, ces théories sont susceptibles d'évoluer dans le temps : par exemple, la dynamique non linéaire (les théories dites du chaos) renouvelle les présupposés originels de la dynamique classique qui donnaient à penser qu'avec une machine à calculer suffisamment puissante on pourrait prédire les mouvements des objets « jusqu'à la fin des temps » ; cette dynamique non linéaire utilise également des outils mathématiques et des concepts physiques originaux qui renouvellent l'ensemble de la dynamique classique.
Enfin, dans le but d'englober dans la Physique l'étude de phénomènes qui nécessitent l'utilisation de plusieurs de ces théories, il est loisible de les coupler entre elles. Par exemple, l'électrodynamique quantique fait appel à la mécanique quantique, à la relativité restreinte et à l'électromagnétisme pour former le modèle standard de la Physique subatomique lorsque l'on y rajoute les interactions nucléaires dites faible et forte. A l'échelle de l'univers, un autre modèle standard tente

de concilier relativité générale, physique statistique et théorie quantique.

**2. Grandeurs physiques, dimensions, unités.**

***Grandeurs physiques*** - Dans la mise en œuvre de cette étude rationnelle des phénomènes naturels, on est amené à définir des grandeurs physiques. En première approche, *on appelle grandeur physique toute propriété rattachée à l'étude d'un phénomène telle que l'on puisse l'exprimer au travers d'un nombre.*

***Dimensions*** - On a reconnu depuis longtemps qu'il existe de telles propriétés nombrables et qu'elles peuvent être de natures *a priori* différentes : une distance parcourue, une durée qui s'écoule, le poids d'un objet,... sont des exemples de grandeurs physiques rattachés à la Mécanique. Chacune de ces grandeurs est généralement affectée d'une *dimension* qui permet précisément de reconnaître ou de caractériser sa nature. Pour chaque grandeur physique que l'on voudra bien définir on convient de noter la dimension qui lui est affectée par un symbole (le plus souvent une lettre) entre crochets. Ainsi, une distance est affectée de la dimension *longueur* $[L]$, une durée ou une date est affectée de la dimension *temps* $[T]$, le poids d'un objet est affecté de la dimension *force* $[F]$, etc...

| **Dimensions de quelques grandeurs physiques en mécanique** | |
|---|---|
| *Longueur* | $[L]$ |
| *Temps* | $[T]$ |
| *Masse* | $[M]$ |

| | |
|---|---|
| *Vitesse* | $[v]$ |
| *Accélération* | $[a]$ |
| *Energie* | $[E]$ |
| *Force* | $[F]$ |
| *Moment cinétique* | $[\sigma]$ |
| *Moment d'une force* | $[\mathfrak{M}]$ |

Hormis le cas de quelques dimensions dites fondamentales (voir plus bas), il n'y a pas de réelle convention sur les symboles que l'on doit leur associer. Par exemple, dans le tableau ci-dessus les symboles indiquant la dimension d'un moment cinétique ou du moment d'une force ne sont que ceux de ce polycopié.

***Unités*** - Afin de pouvoir nombrer une grandeur physique affectée d'une certaine dimension, on est amené à définir la <u>*valeur étalon*</u> de cette grandeur que l'on choisit égale à l'<u>*unité*</u> (par exemple, le mètre pour la dimension longueur). Le nombre qui permet de quantifier la grandeur physique est alors compris comme : le nombre de fois où l'on retrouve la valeur de l'étalon dans la grandeur physique en question.
Comme le choix de la valeur étalon est *a priori* arbitraire, il existe évidemment un nombre arbitraire d'unités rattachées à une certaine dimension : le mètre $(m)$, le centimètre $(cm)$, le pied $(ft)$, le pouce $(inch)$, l'angström $(\text{Å})$, le fermi $(fm)$, le parsec $(pc)$, l'année-lumière $(al)$, le mille nautique $(nmi)$, etc… sont des exemples variés d'unités pour la dimension

*longueur* $[L]$, chaque unité possédant son propre sigle distinctif.

***Dimensions et unités fondamentales*** – Afin d'éviter les difficultés qui surviennent lorsque les unités choisies par tels ou tels auteur(e)s sont très différentes ainsi que l'utilisation d'un trop grand nombre de grandeurs physiques aux dimensions variées, on a convenu de qualifier certaines grandeurs physiques de *fondamentales* ainsi que leurs dimensions, et de définir le plus proprement possible les unités officielles avec lesquelles elles s'expriment. Le choix de ce *Système International* a donné lieu à de nombreux débats qui sont brièvement résumés sur le site internet du Bureau International des Poids et Mesures (http://www.bipm.org). De ces discussions toujours en cours, un consensus de travail s'est dégagé pour définir 7 grandeurs dites fondamentales qui sont résumées dans le tableau ci-dessous.

| ***Le Système International*** | |
|---|---|
| Longueur $[L]$ | Le mètre : $m$ |
| Masse $[M]$ | Le kilogramme : $kg$ |
| Temps $[T]$ | La seconde : $s$ |
| Courant électrique $[I]$ | L'ampère : $A$ |
| Température $[\theta]$ | Le kelvin : $K$ |
| Quantité de matière $[N]$ | La mole : $mol$ |
| Intensité lumineuse $[J]$ | Le candela : $cd$ |

Les dimensions de ces grandeurs sont dites fondamentales en ce sens que la dimension de toute autre grandeur physique s'exprimera en fonction de ces dimensions fondamentales qui doivent être considérées comme indépendantes même si cela est en réalité arbitraire : par exemple, une masse n'exprime *a priori* rien d'autre qu'une quantité de matière contenue dans un certain volume ; on s'attend donc à ce qu'il y ait un lien entre les dimensions fondamentales $[L]$, $[M]$ et $[N]$. Une discussion plus approfondie pourrait même amener à conclure que l'on peut exprimer toutes les grandeurs physiques à l'aide... d'une seule dimension... En fait, il semble que le choix du nombre de dimensions fondamentales soit arbitraire et dépende de la philosophie adoptée dans la réflexion. En mécanique classique, on travaille avec trois dimensions indépendantes qui sont *longueur*, *masse* et *temps,* et qui expriment des propriétés associées à des phénomènes que nos sens estiment être de nature très différente : espace, matière et durée.

***Dimensions et unités des grandeurs dérivées*** - Quoiqu'il en soit du nombre de grandeurs fondamentales adopté, on dit des autres grandeurs physiques qu'elles sont *dérivées* des premières puisque leurs dimensions vont s'exprimer en fonction des dimensions fondamentales. Par exemple, la dimension de la grandeur physique vitesse est (de par sa définition même) une longueur rapportée à un temps que l'on peut traduire par : $[v] := [L]/[T]$. Ainsi, si les unités de la grandeur physique « *longueur* » sont multipliées par un facteur $L$ et que celles de la grandeur physique « *temps* » sont multipliées par un facteur $T$, il s'ensuit que les unités de la grandeur physique « *vitesse* » seront multipliées par un facteur $LT^{-1}$. On convient alors, avec Maxwell, d'écrire la dimension de cette grandeur physique sous la forme :

$$[v] = LT^{-1}$$

Des raisonnements similaires basés sur les définitions des grandeurs physiques concernées ou sur les lois fondatrices des théories (ici la mécanique) permettent de construire le tableau ci-dessous :

| ***Grandeur physique*** | ***symbole*** | ***Dimension*** | ***Unité*** |
|---|---|---|---|
| *Longueur* | $[L]$ | $L$ | *mètre* $(m)$ |
| *Temps* | $[T]$ | $T$ | *seconde* $(s)$ |
| *Masse* | $[M]$ | $M$ | *kilogramme* $(kg)$ |
| *Vitesse* | $[v]$ | $LT^{-1}$ | $(m.s^{-1})$ |
| *Accélération* | $[a]$ | $LT^{-2}$ | $(m.s^{-2})$ |
| *Energie* | $[E]$ | $ML^2T^{-2}$ | *joule* $(J)$ |
| *Force* | $[F]$ | $MLT^{-2}$ | *newton* $(N)$ |
| *Moment cinétique* | $[\sigma]$ | $ML^2T^{-1}$ | $(kg.m^2.s^{-1})$ |
| *Moment d'une force* | $[\mathfrak{M}]$ | $ML^2T^{-2}$ | $(N.m)$ |
| *Quantité de mouvement* | $[p]$ | $MLT^{-1}$ | $(kg.m.s^{-1})$ |
| *Puissance* | $[P]$ | $ML^2T^{-3}$ | *watt* $(W)$ |

On remarque que les unités rattachées aux dimensions de certaines grandeurs physiques n'ont pas reçu de noms particuliers et s'expriment simplement en fonction des unités fondamentales : une vitesse par exemple s'exprime en mètres par seconde.

D'autres grandeurs physiques ont des dimensions qui se sont vues attribuer des unités spécifiques : par exemple, une force s'exprime en newtons ; la dimension qui lui est rattachée, $MLT^{-2}$, permet de définir le newton : $1\,N$ est la force qui communique à une masse de $1\,kg$ une accélération de $1\,m\,s^{-2}$. Ou encore : $1\,N$ est la force qui augmente la vitesse d'une masse de $1\,kg$ de $1\,m\,s^{-1}$ à chaque seconde.
Certaines grandeurs physiques a priori différentes se voient malgré tout attribuer des dimensions similaires : c'est le cas pour le moment d'une force qui possède les dimensions d'une énergie. Afin de marquer la différence de conception de ces deux grandeurs, on convient alors d'exprimer leurs unités avec des noms différents : énergie en joules et moment d'une force en newton.mètres...

***Deux propriétés importantes*** – Les deux propriétés qui suivent sont primordiales pour l'analyse dimensionnelle. On remarque d'abord que :

> *Les dimensions des grandeurs physiques s'expriment toutes comme des produits de puissances des dimensions fondamentales.*

Cette propriété peut s'ériger en théorème dont la démonstration repose sur le fait que l'addition de deux grandeurs physiques aux dimensions différentes n'a *a priori* pas de sens.
La seconde remarque est relative aux grandeurs ne possédant pas de dimensions. Comme une telle grandeur est un nombre

pur elle ne sera jamais affectée par un changement d'unités quelconque des autres grandeurs physiques ; il en résulte qu'en suivant la convention de Maxwell :

> *une grandeur $\Pi$ sans dimension se note dimensionnellement sous la forme :* $[\Pi] = 1$.

Chapitre 2

# ANALYSE DIMENSIONNELLE

**1. Principe fondamental.** Appréhender un phénomène, c'est en partie - *et en partie seulement* - savoir distinguer ou inventer les grandeurs physiques qui lui sont rattachées, puis découvrir par la théorie, par l'expérience ou par l'analyse dimensionnelle les liens qui les relient entre elles.
La nature n'étant pas sensible aux unités employées pour nombrer les grandeurs physiques rattachées à tel ou tel phénomène, il en résulte le principe suivant :

> *Une loi physique reliant différentes grandeurs physiques entre elles ne dépend pas des systèmes d'unités choisis.*

Couplé au fait que toute grandeur physique est un produit de puissances des dimensions des grandeurs fondamentales, ce principe fonde l'analyse dimensionnelle.

**2. Un premier lemme.** Le lemme qui va suivre réclame la notion de grandeur physique pertinente ainsi que celle d'un ensemble de grandeurs physiques dimensionnellement indépendantes.

***Grandeur physique pertinente*** – On convient de qualifier une grandeur physique de *pertinente* si cette grandeur s'avère effectivement appropriée au problème physique que l'on se pose. Juger de la pertinence d'une grandeur physique vis-à-vis de tel ou tel phénomène peut s'avérer fort délicat...

***Grandeurs physiques dimensionnellement indépendantes*** – Outre les grandeurs physiques dont les dimensions sont qualifiées de fondamentales - et donc indépendantes - on définit aussi l'indépendance dimensionnelle entre des grandeurs physiques dérivées. Par exemple, vitesse et force sont deux grandeurs physiques dimensionnellement indépendantes parce qu'on ne peut pas écrire les dimensions d'une vitesse comme un produit de puissances des dimensions d'une force (et inversement). De même, vitesse, force et densité volumique possèdent des dimensions $[v]$, $[F]$ et $[\rho]$ indépendantes : en effet, si on tente de trouver deux nombres $\beta_1$ et $\beta_2$ tels que l'on puisse écrire : $[\rho] = [v]^{\beta_1}[F]^{\beta_2}$, on aboutit - après être revenu aux dimensions fondamentales - à l'équation : $ML^3 = M^{\beta_2}L^{\beta_1+\beta_2}T^{-\beta_1-2\beta_2}$, équation qui fournit des valeurs contradictoires pour $\beta_1$ et $\beta_2$ et qui n'est donc jamais satisfaite. Il faut conclure que $[v]$, $[F]$ et $[\rho]$ sont indépendantes et pourraient fort bien remplacer les trois dimensions fondamentales $[L]$, $[M]$ et $[T]$ de la dynamique.
Plus généralement, on aura la définition suivante : *un ensemble de k grandeurs physiques est dit dimensionnellement indépendant si la dimension de chaque grandeur de cet ensemble ne peut pas s'exprimer comme un produit de puissances des dimensions des* $(k-1)$ *autres grandeurs.*
A partir de l'exemple qui précède, on peut voir que la recherche de l'indépendance dimensionnelle entre différentes

grandeurs revient à rechercher la possibilité ou non de construire une quantité sans dimensions, $\Pi$, à l'aide de produits de puissances de ces grandeurs : en effet, rechercher une telle quantité revient à écrire : $\Pi = \rho^{\alpha_1} v^{\alpha_2} F^{\alpha_3}$, soit dimensionnellement : $1 = [\rho]^{\alpha_1}[v]^{\alpha_2}[F]^{\alpha_3}$ ou encore : $[\rho] = [v]^{-\alpha_2/\alpha_1}[F]^{-\alpha_3/\alpha_1}$.
Toutefois, l'avantage de l'équation : $1 = [\rho]^{\alpha_1}[v]^{\alpha_2}[F]^{\alpha_3}$ est qu'elle fournit la solution unique $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Compte tenu de cette remarque, on adopte la définition générale équivalente suivante :

> *<u>Définition</u> : les $k$ grandeurs physiques $(g_1, g_2, \dots, g_k)$ sont dites dimensionnellement indépendantes si, et seulement si :*

$$[g_1]^{\alpha_1}[g_2]^{\alpha_2} \dots [g_k]^{\alpha_k} = 1 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

Le nombre $k$ de grandeurs physiques pouvant être dimensionnellement indépendantes ne peut évidemment pas dépasser le nombre de grandeurs fondamentales que l'on a adopté. Pour le système d'unités international et la dynamique, on a donc $k \leq 3$.

***Lemme*** – Ce lemme (ou petit théorème) est un préliminaire au théorème plus général énoncé dans la section suivante. Il justifie la recherche d'une relation sous la forme d'un produit de puissances entre certaines grandeurs que l'on a jugées pertinentes vis-à-vis du phénomène physique étudié. On peut l'énoncer comme suit :

***Lemme*** *: Soit une grandeur physique $g$ jugée pertinente vis-à-vis d'un certain phénomène physique, et soient $(g_1, g_2 \dots, g_k)$ $k$ autres grandeurs physiques également jugées pertinentes vis-à-vis du même phénomène physique. On suppose que ces $k$ grandeurs forment un ensemble dimensionnellement indépendant et que les dimensions de $g$ en sont dérivées.*
*Alors il existe une relation entre toutes ces grandeurs physiques qui peut se mettre sous la forme :*

$$g = \Pi\, g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_k^{\alpha_k}$$

*où $\Pi$ est une quantité sans dimensions et $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_k$ un jeu d'exposants non tous nuls.*

*Démonstration* : Comme $g$ et les $(g_1, g_2, \dots, g_k)$ sont toutes pertinentes pour le problème posé et que $g$ est une grandeur dimensionnellement dérivée des $(g_1, g_2, \dots, g_k)$, il doit exister une loi physique entre toutes ces grandeurs que l'on peut mettre sous la forme :

$$g = \Phi(g_1, g_2, \dots, g_k)$$

où $\Phi$ est une certaine fonction indépendante des unités choisies. En outre, les dimensions dérivées de $g$ vis-à-vis des $g_1, g_2, \dots, g_k$ impliquent qu'il existe un jeu approprié d'exposants non tous nuls $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tel que l'on puisse écrire :

$$[g] = [g_1]^{\alpha_1} [g_2]^{\alpha_2} \dots [g_k]^{\alpha_k}$$

Cela signifie que si les unités de $g_1$ sont multipliées par un facteur $\lambda_1$, celles de $g_2$ par un facteur $\lambda_2$, etc..., celles de $g_k$ par un facteur $\lambda_k$, alors les unités de $g$ seront multipliées par un facteur : $\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_k^{\alpha_k}$. Dans ces nouvelles unités la loi physique s'écrira donc :

$$g\,\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_k^{\alpha_k} = \Phi(\lambda_1 g_1, \lambda_2 g_2, \dots, \lambda_k g_k)$$

Or, on peut bien choisir en particulier de prendre comme facteurs : $\lambda_1 = 1/g_1$, $\lambda_2 = 1/g_2$, etc..., $\lambda_k = 1/g_k$, signifiant par là que chacune des grandeurs indépendantes $g_1, g_2, \dots, g_k$ est exprimée dans une unité où elle possède la valeur étalon 1. Dans ces conditions, la loi physique devient :

$$g = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_k^{\alpha_k}\,\Phi(1,1,\dots,1)$$

où $\Phi(1,1,\dots,1)$ apparaît comme une grandeur $\Pi$ sans dimensions.□

On voit au travers de cette démonstration, que l'analyse dimensionnelle ne permet pas à proprement parler de découvrir la loi physique (c'est-à-dire trouver la fonction $\Phi$). Mais elle permet malgré tout de ramener la fonction $\Phi$ à la valeur d'une simple constante après avoir finalement adimensionné (i.e. rendu sans dimensions) les arguments dont elle dépend en les choisissant tous égaux à l'étalon qui leur est associé. Seules la théorie et/ou l'expérience peuvent permettre de trouver la fonction $\Phi$.

***Exemple du pendule*** - On considère un pendule de longueur $\ell$ qui oscille sous l'effet de l'accélération de la pesanteur $g$. Il existe dans ce phénomène une durée caractéristique en rapport avec la durée d'une oscillation du pendule, disons sa période $\tau$. Si on admet qu'il doit exister un lien étroit entre $\tau$, $\ell$ et $g$ alors on pourra raisonner de la façon suivante : comme la loi physique entre ces trois grandeurs ne dépend pas des changements d'unités, il doit être possible (grâce au lemme précédent) d'exprimer $\tau$ grâce à un produit de puissances des deux grandeurs dimensionnellement indépendantes que sont $\ell$ et $g$. Autrement dit, il s'agit de trouver $\alpha$ et $\beta$ tels que : $\tau = \Pi\, \ell^{\alpha} g^{\beta}$ où $\Pi$ est un nombre inconnu mais sans dimensions. Le lien proposé se traduit dimensionnellement par l'équation : $T = L^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta} = L^{\alpha+\beta}\, T^{-2\beta} = 1$ ; ce qui nécessite $\alpha = -\beta$ et $\beta = -1/2$. En reportant ce résultat dans l'équation proposée, on obtient ainsi :

$$\tau = \Pi \sqrt{\ell/g}$$

***Commentaires*** – L'expérience et la dynamique de Newton montrent que la valeur de la constante $c$ dépend du type de pendule et des conditions dans lesquelles le pendule est mis en mouvement. Pour un pendule simple[§] qui oscille sans frottements en s'écartant peu de la verticale (petites oscillations), on trouve $\Pi = 2\pi$. Mais si les oscillations s'écartent beaucoup de la verticale, on a cette fois : $\Pi = 2\pi\,(1 + \theta_0^2/16)$ où $\theta_0$ est l'angle maximal que fait le pendule avec la verticale ; c'est en fait une approximation du résultat exact : $\Pi = 2\sqrt{2}\, \int_0^{\theta_0} d\theta/\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}$.

[§] Il s'agit d'un pendule constitué d'une tige de masse négligeable à l'extrémité de laquelle est suspendue une bille massive que l'on assimile à un point matériel.

Si l'on à faire aux petites oscillations d'un pendule pesant**, on obtient $\Pi = 2\pi\sqrt{1 + I/m\ell^2}$ où $I$ est le moment d'inertie principal du pendule – qui s'exprime en $kg.m^2$ – et $m$ la masse du pendule. En outre, $\ell$ est maintenant la distance entre l'axe de la rotation du pendule et son centre de masse.
Si un frottement fluide est pris en compte, la constante que l'on obtient pour les petites oscillations du pendule simple prend la forme : $\Pi = 2\pi/\sqrt{1 - \ell K^2/4m^2 g}$ où $K$ est le coefficient de frottement fluide - qui s'exprime en $kg.s^{-1}$ - et $m$ la masse de la bille.

On tire de ces considérations au moins deux remarques : tout d'abord, on voit que les grandeurs physiques pertinentes sont à considérer plutôt comme des *grandeurs caractéristiques* du problème posé : pour le pendule simple $\ell$ est la longueur du pendule, mais pour le pendule pesant $\ell$ est la distance entre l'axe de la rotation et le centre de masse ; de même que $\tau$ qui est en réalité une pseudo-période lorsque les frottements fluides sont pris en compte.
Deuxièmement, il faut constater que $\Pi$ peut dépendre de certaines grandeurs physiques que l'on n'avait pas forcément envisagées au départ. Il faut conclure alors que le résultat obtenu l'est dans le cadre où la pertinence de ces grandeurs physiques (ici $\theta_0$, $m$, $K$, $I$) est jugée moins probante que celle des grandeurs initialement choisies (ici $g$ et $\ell$) puisque la loi en $\sqrt{\ell/g}$ persiste. En fait, si dès le départ on juge tout aussi pertinent de prendre en compte ces autres grandeurs

** Il s'agit d'un pendule qui doit être considéré comme un solide.

physiques ($\theta_0$, $m$, $K$, $I$) au même titre que $g$ et $\ell$, l'analyse dimensionnelle va conduire à des résultats dont l'interprétation peut s'avérer soit inopérante, soit plus complexe mais aussi plus riche... Par exemple, l'introduction de $\theta_0$ dans l'analyse dimensionnelle ne fournira aucune information nouvelle puisque cette grandeur n'a pas de dimensions... L'introduction de $K$ dans l'analyse (on choisit donc $K$, $g$ et $\ell$ comme grandeurs pertinentes) conduit encore à la loi : $\tau = \Pi\sqrt{\ell/g}$. Il en est de même si on prend $m$ à la place de $K$. Par contre, si l'on prend $m$ et $K$ ensemble (avec toujours $g$ et $\ell$) l'analyse dimensionnelle va conduire à la reconnaissance de deux temps caractéristiques qui sont associés, le premier à la (pseudo)période précédente, et le second à l'amortissement des oscillations du pendule. Le théorème Pi qui suit précise quelque peu ces remarques

## 3. Théorème Pi (Vaschy 1892, Buckingham 1914).

> ***Théorème Pi :*** *Soit une grandeur physique $g$ pertinente vis-à-vis d'un certain phénomène physique, et soient $(g_1, \dots, g_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ $n$ autres grandeurs physiques pertinentes vis-à-vis du même phénomène physique. On suppose que les $k$ premières grandeurs $(g_1, \dots, g_k)$ forment un ensemble dimensionnellement indépendant tandis que $g$ et les $n-k$ autres grandeurs $(g_{k+1}, \dots, g_n)$ sont chacune dérivées des $k$ premières. Alors le lien entre toutes ces grandeurs physiques peut se mettre sous la forme :*

$$g = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_k^{\alpha_k} \, \Phi(1, \dots, 1, \Pi_{k+1}, \dots, \Pi_n)$$

*où* $\Phi$ *reflète la loi physique qui gouverne les relations entre elles et apparaît comme un nombre* $\Pi$ *fonction des* $n-k$ *quantités sans dimensions* $\Pi_i$*,* $i = k+1, \dots, n$*, formées à partir de chaque grandeur dérivée* $g_i$ *respectivement.*

*Démonstration* : La démonstration du théorème Pi est calquée sur celle du lemme précédent : s'il existe une loi physique entre les grandeurs $g$ et $(g_1, \dots, g_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$, alors on peut écrire :

$$g = \Phi(g_1, \dots, g_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$$

où $\Phi$ est une certaine fonction indépendante des unités choisies. Par ailleurs, comme chaque $g_i$, $i = k+1, \dots, n$, est une grandeur dérivée des $(g_1, \dots, g_k)$, on peut former une quantité sans dimension $\Pi_i$ grâce à un jeu approprié d'exposants $\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \dots, \alpha_{k,i}$ non tous nuls intervenant dans un produit de puissances des $(g_1, \dots, g_k)$ respectivement, c'est-à-dire :

$$\Pi_i = \frac{g_i}{g_1^{\alpha_{1,i}} g_2^{\alpha_{2,i}} \dots g_k^{\alpha_{k,i}}} \quad , \qquad i = k+1, \dots, n$$

En remplaçant chaque $g_i$ grâce à cette expression, la loi physique prend la forme :

$$g = \Phi\left(g_1, \dots, g_k, \Pi_{k+1} \, g_1^{\alpha_{1,k+1}} g_2^{\alpha_{2,k+1}} \dots g_k^{\alpha_{k,k+1}}, \dots, \Pi_n \, g_1^{\alpha_{1,n}} g_2^{\alpha_{2,n}} \dots g_k^{\alpha_{k,n}}\right)$$

En outre, comme les dimensions de $g$ sont également dérivées des $g_1, g_2, \dots, g_k$, il existe aussi un jeu approprié d'exposants non tous nuls $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tel que l'on puisse écrire :

$$[g] = [g_1]^{\alpha_1}[g_2]^{\alpha_2} \dots [g_k]^{\alpha_k}$$

On rappelle que cela signifie que si les unités de $g_1$ sont multipliées par un facteur $\lambda_1$, celles de $g_2$ par un facteur $\lambda_2$, etc..., celles de $g_k$ par un facteur $\lambda_k$, alors les unités de $g$ seront multipliées par un facteur : $\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_k^{\alpha_k}$. Dans ces nouvelles unités la loi physique s'écrira :

$$g\, \lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_k^{\alpha_k} = \Phi(\lambda_1 g_1, \dots, \lambda_k g_k, \Pi_{k+1}(\lambda_1 g_1)^{\alpha_{1,k+1}}(\lambda_2 g_2)^{\alpha_{2,k+1}} \dots (\lambda_k g_k)^{\alpha_{k,k+1}}, \dots, \Pi_n\, (\lambda_1 g_1)^{\alpha_{1,n}}(\lambda_2 g_2)^{\alpha_{2,n}} \dots (\lambda_k g_k)^{\alpha_{k,n}})$$

Et on peut choisir en particulier de prendre comme facteurs : $\lambda_1 = 1/g_1$, $\lambda_2 = 1/g_2$, etc..., $\lambda_k = 1/g_k$, signifiant par là que chacune des grandeurs indépendantes $g_1, g_2, \dots, g_k$ est exprimée dans une unité où elle possède la valeur étalon 1. Dans ces conditions, on obtient :

$$g = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_k^{\alpha_k}\, \Phi\left(\overbrace{1, \dots, 1}^{k\,fois}, \Pi_{k+1}, \dots, \Pi_n\right)$$

où $\Phi(1, \dots, 1, \Pi_{k+1}, \dots, \Pi_n)$ apparaît comme une grandeur $\Pi$ sans dimensions.□

***Exemple du pendule simple avec frottements fluides*** – On réalise un premier essai avec le choix de $\ell$, $g$ et $K$ comme grandeurs pertinentes du problème posé. Les dimensions de ces trois grandeurs sont respectivement : $L$, $LT^{-2}$ et $MT^{-1}$ et on vérifie qu'elles sont dimensionnellement indépendantes. D'après le lemme de la section précédente, on peut proposer une relation du type : $\tau = \Pi\, \ell^{\alpha} g^{\beta} K^{\gamma}$. L'analyse dimensionnelle entraîne alors le résultat : $\tau = \Pi \sqrt{\ell/g}$ déjà obtenu sans la présence de $K$. Le raisonnement doit nous aider à conclure ici que $K$ doit être caché dans la constante $\Pi$ si tant est que le frottement influe sur $\tau$, et qu'il doit exister une autre grandeur pertinente que l'on a oubliée afin que $K$ intervienne explicitement dans l'expression de $\tau$. La loi de la dynamique peut nous aider à déduire que la masse $m$ du pendule est probablement cette quatrième grandeur pertinente. Cette grandeur, dont la dimension est $M$, est dérivée des trois autres. On a donc ici les conditions du théorème Pi avec $k = 3$ et $n = 4$. On peut chercher la constante $\Pi_4$ que l'on peut former en écrivant : $m = \Pi_4\, \ell^\alpha g^\beta K^\gamma$. L'analyse fournit : $\Pi_4 = (K/m)\sqrt{\ell/g}$. On voit alors que cette constante est formée à partir du rapport entre deux temps caractéristiques : $\tau_1 = \sqrt{\ell/g}$ et $\tau_2 = m/K$ : on conclut que le premier doit être caractéristique du mouvement propre du pendule en dehors de tout frottement, et le second caractéristique du frottement fluide lui-même. Le théorème Pi permet ensuite d'écrire : $\tau = \Phi(\Pi_4)\sqrt{\ell/g}$. On doit alors comprendre $\tau$ comme une correction à $\tau_1$ en présence de frottements fluides. La dynamique de Newton donne pour les petites oscillations une pseudo-période comme on l'a dit qui s'écrit effectivement : $\tau = 2\pi\, \tau_1/\sqrt{1 - \Pi_4^2/4}$. Par ailleurs, l'amplitude des oscillations du pendule décroit avec le temps comme $e^{-t/\tau_2}$.

***Le même exemple autrement*** – Il n'est pas rare qu'une analyse dimensionnelle soit réalisée sans que l'on prenne la peine de vérifier si les grandeurs physiques pertinentes invoquées forment un ensemble dimensionnellement indépendant ou pas. Dans ce cas, la méthode fonctionne encore : dans l'exemple qui précède où les grandeurs pertinentes sont finalement $\ell$, $g$, $m$ et $K$, on peut tenter d'écrire : $\tau = \Pi\, \ell^{\alpha} g^{\beta} K^{\gamma} m^{\varepsilon}$. L'analyse dimensionnelle fournit alors :

$$\tau = \Pi \left(\frac{g}{\ell}\right)^{\beta} \left(\frac{m}{K}\right)^{2\beta+1}$$

C'est-à-dire qu'il reste une puissance indéterminée. Mais on constate également que si l'on fait $\beta = -1/2$, alors $\tau = \Pi \sqrt{g/\ell}$, tandis que si l'on fait $\beta = 0$, alors $\tau = \Pi\ m/K$. Toute autre valeur de $\beta$ fournira un temps caractéristique qui sera une combinaison de ces deux valeurs. Cela revient à dire qu'avec le jeu de grandeurs pertinentes choisi on peut former deux temps caractéristiques du problème, avec les mêmes interprétations qu'auparavant.

**3. Un autre exemple.** L'analyse dimensionnelle doit s'accompagner du raisonnement physique afin d'éviter toute conclusion malencontreuse comme par exemple le choix d'une grandeur pertinente inadaptée. Des grandeurs physiques pertinentes et bien choisies sont souvent la garantie que la valeur de la constante de proportionnalité est « proche » de 1.

***Période de révolution d'une planète autour de son soleil*** – Dans le problème posé ici on peut tenir le raisonnement suivant : la constante de la gravitation, $G$, est une grandeur pertinente

puisque la planète évolue dans le champ de gravitation de son soleil. La distance $\ell$ de la planète à son soleil doit aussi être une grandeur pertinente. Enfin, les masses du soleil, $m_{\mathscr{s}}$, et de la planète, $m_{\mathscr{p}}$, devraient l'être également. Les dimensions de $G$ sont $L^3M^{-1}T^{-2}$. On forme ainsi un ensemble de 3 grandeurs dimensionnellement indépendantes avec $G$, $\ell$ et $m_{\mathscr{s}}$ ou alors avec $G$, $\ell$ et $m_{\mathscr{p}}$.
En tentant d'abord la relation $\tau = \Pi\, G^{\alpha}\ell^{\beta}m_{\mathscr{s}}^{\gamma}$, l'analyse dimensionnelle fournit un résultat qui se met sous la forme :

$$\tau^2 = \Pi^2 \frac{\ell^3}{Gm_{\mathscr{s}}}$$

Et qui exprime que le carré des périodes de révolution de la planète est proportionnel au cube d'une distance caractéristique du problème (qui s'avère être le demi-grand axe de la trajectoire elliptique de la planète, comme l'avait découvert Kepler).
Mais en choisissant le triplet $G$, $\ell$ et $m_{\mathscr{p}}$ (au lieu de $m_{\mathscr{s}}$) on aurait trouvé une relation tout à fait similaire :

$$\tau^2 = \Pi'^2 \frac{\ell^3}{Gm_{\mathscr{p}}}$$

De ces deux résultats tout à fait corrects quel alors le plus probant du point de vue de la compréhension des phénomènes naturels ? Pour répondre à cette question, il faut faire appel aux principes qui gouvernent la physique et pour le cas présent, ceux de la dynamique. Un examen rapide du principe fondamental de la dynamique - la seconde loi de Newton - permet presque systématiquement de trancher. Puisque c'est de la période de révolution de la planète dont il s'agit ici, il faut examiner la loi de la dynamique la concernant : cette loi stipule que l'accélération $a$ de la planète vaut $F/m_{\mathscr{p}}$ où $F$ est la force de gravitation que subit la planète. Cette force s'écrit, si la planète est située à une distance $\ell$ de son soleil : $F = G.m_{\mathscr{p}}m_{\mathscr{s}}/\ell^2$. Et on conclut après simplification que seule la grandeur physique $m_{\mathscr{s}}$ intervient dans l'expression de $a$ : $m_{\mathscr{s}}$ est donc la grandeur physique la plus probante vis-à-vis du mouvement de la planète, et c'est donc la première expression de $\tau^2$ qu'il faut choisir : $\tau^2 = \Pi^2\, \ell^3/Gm_{\mathscr{s}}$.

Du point de vue empirique, un calcul simple pour la planète Terre[††] fournit pour cette expression : $\tau \simeq \Pi \times 0.16\, ans$, tandis que la seconde expression de $\tau$ aurait fourni : $\tau \simeq \Pi' \times 100\, ans$. Sans tenir compte des constantes $\Pi$ et $\Pi'$, on voit que le choix de $m_{\mathscr{s}}$ donne lieu à une bien meilleure estimation de $\tau$ (environ 2 mois à comparer aux 100 ans). On en arrive ainsi à considérer que *si les grandeurs physiques pertinentes ont été bien choisies, la valeur de la constante de proportionnalité doit être proche de* 1. Dans notre cas, on peut estimer $\Pi$ et $\Pi'$ : sachant que la période de révolution de notre planète est de 1 $an$, on déduit $\Pi \simeq 6.25$ et $\Pi' \simeq 0.01$. $\Pi$ est bien plus proche de 1 que $\Pi'$ et sa valeur n'est pas très éloignée d'un facteur $2\pi$ souvent présent lorsqu'il s'agit d'estimer une période par l'analyse dimensionnelle. En

[††] Pour ce calcul on a pris : $G = 6.67 \times 10^{-11}\, m^3kg^{-1}s^{-2}$, $a \simeq 1{,}5 \times 10^{11}\, m$, $m_{\mathscr{s}} \simeq 2 \times 10^{30}\, kg$ et $m_{\mathscr{p}} \simeq 6 \times 10^{24}\, kg$

supposant fixe le soleil, les lois de la dynamique fournissent effectivement la formule théorique :

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\ell^3}{G m_s}}$$

Il reste que la masse de la planète $m_p$ n'est pas pour autant un choix absurde de grandeur pertinente. Une analyse plus poussée du problème du mouvement d'une planète autour de son soleil (analyse dans laquelle on ne présuppose pas le soleil fixe) fournit cette fois :

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\ell^3}{G m_s}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + m_p/m_s}}$$

Le rapport $m_p/m_s$ intervient donc comme une correction au résultat précédent. Ce rapport est précisément le nombre $\Pi_4$ que l'on forme en écrivant $m_p = \Pi_4\, \ell^\alpha G^\beta m_s^\gamma$ , conformément au théorème Pi. On voit à partir de cet exemple que vouloir obtenir une constante de proportionnalité $\Pi$ la plus proche de 1, c'est en quelque sorte garantir que les grandeurs pertinentes délaissées n'agiront, lorsqu'on les prendra en compte, que comme des corrections au résultat le plus probant.

## Bibliographie succincte

Les livres en français consacrés uniquement à l'analyse dimensionnelle sont rares. Celle-ci fait le plus souvent l'objet d'un chapitre à l'intérieur d'ouvrages dédiés à tel ou tel domaine des sciences.
On trouve sur le net quelques polycopiés en français comme par exemple (adresses valides à la date du 10/10/2016) :


http://www.cpt.univ-mrs.fr/~virey/PMchap1.pdf

http://www.math.unicaen.fr/~ridha/pdf/HOutDynFluidM1-3.pdf

http://joelsornette.fr/physique/ressources/textes/cours105-2b.pdf

En anglais :

*G. I. Barenblatt*, Dimensional Analysis (New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1987)