

## TD 1 : Électrostatique

### Exercice 1 : Applications du théorème de Gauss

- 1.1. On considère une sphère de rayon  $R$ , chargée en surface de densité surfacique de charge  $\sigma$  uniforme. Calculer le champ électrique puis le potentiel en tout point de l'espace.
- 1.2. On considère une sphère de rayon  $R$ , chargée en volume de densité volumique de charge  $\rho$  uniforme. Calculer le champ électrique puis le potentiel en tout point de l'espace.
- 1.3. On considère un cylindre infini de rayon  $R$  et dont l'axe de révolution est dirigé suivant  $(Oz)$ . Le cylindre porte une densité volumique de charge  $\rho$  uniforme. Calculer le champ électrique et le potentiel en tout point de l'espace.
- 1.4. En mécanique quantique, l'état d'une particule est donnée par une fonction d'onde  $\psi(\vec{r})$  dont le carré du module  $|\psi(\vec{r})|^2$  correspond à la densité de probabilité de trouver la particule au point  $\vec{r}$ . La résolution de l'équation de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène conduit à

$$\psi(\vec{r}) = Ae^{-r/a_0}$$

dans l'état fondamental ( $1s$ ) avec  $a_0 \simeq 0.0529 \text{ nm}$ , le rayon de l'atome de Bohr. On a supposé le noyau ponctuel et choisit l'origine sur le noyau.

- 1.4.1. Déterminer la densité de charge  $\rho_e(\vec{r}) = -e|\psi(\vec{r})|^2$  due à l'électron en tout point de l'espace. Calculer la valeur de la constante  $A$  afin d'assurer la neutralité de l'atome.
- 1.4.2. Calculer la charge électrique totale  $Q(r)$  à l'intérieur d'une sphère de rayon  $r$  centrée sur l'origine.
- 1.4.3. Calculer le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r})$  créé en tout point  $\vec{r}$  de l'espace par un atome d'hydrogène.
- 1.4.4. Montrer que le potentiel électrostatique  $V(\vec{r})$  est de la forme

$$V(\vec{r}) = \left( a + \frac{b}{r} \right) e^{-2r/a_0}$$

## Exercice 2 : Intégration de la distribution de charge

- 2.1.** On considère un cercle de rayon  $R$  dont le centre est choisi à l'origine et dont l'axe est confondu avec  $(Oz)$ . Le cercle porte une densité linéique de charge uniforme  $\lambda$ . Calculer le champ électrique en tout point de l'axe  $(Oz)$ .
- 2.2.** On considère un disque de rayon  $R$  dont le centre est choisi à l'origine et dont l'axe est confondu avec  $(Oz)$ . Le disque porte une densité surfacique de charge uniforme  $\sigma$ . Calculer le champ électrique en tout point de l'axe  $(Oz)$ .
- 2.3.** On considère un cylindre fini dont l'axe de révolution est dirigé suivant  $(Oz)$ . On note  $R$  le rayon du cylindre et  $2L$  sa hauteur. Le cylindre porte une densité volumique de charge  $\rho$  uniforme. Calculer le champ électrique en tout point de l'axe  $(Oz)$ .

## TD 2 : Magnétostatique

### Exercice 1 : Fils et bobines

- 1.1. On considère un fil rectiligne infini parcouru par un courant uniforme d'intensité  $I$ .  
On choisit l'axe  $(Oz)$  dans la direction du fil.
  - 1.1.1. En utilisant le théorème d'Ampère, calculer le champ magnétique créé par le fil en tout point de l'espace.
  - 1.1.2. Retrouver ce résultat en appliquant la relation de Biot-Savart.
- 1.2. On considère une boucle de courant circulaire de rayon  $R$ , de centre  $O$  et dans le plan  $z = 0$  parcouru par un courant d'intensité  $I$ .
  - 1.2.1. Calculer le champ magnétique en tout point de l'axe  $(Oz)$ .
  - 1.2.2. On s'intéresse à présent à une bobine de Helmholtz, composée de deux boucles circulaires de courant identiques dans des plans parallèles  $z = -a$  et  $z = a$ . Le courant circule dans le même sens dans les deux spires. Calculer le champ magnétique au centre du dispositif.
- 1.3. On considère un cylindre de rayon  $R$ , de hauteur infinie, dont l'axe de révolution est dirigé suivant  $(Oz)$ .
  - 1.3.1. Le cylindre étant parcouru par un courant d'intensité  $I$  uniforme dans la direction  $(Oz)$ , calculer le champ magnétique en tout point de l'espace.
  - 1.3.2. Le cylindre étant maintenant supposé creux de sorte que le courant s'écoule uniquement à sa surface, calculer le champ magnétique en tout point de l'espace. En déduire le potentiel vecteur dans la jauge de Coulomb.
- 1.4. On considère un solénoïde de forme cylindrique, de rayon  $R$ , de hauteur  $2L$  et dont l'axe de révolution est dirigé suivant  $(Oz)$ . Les spires formant le solénoïde sont parcourues par un courant d'intensité  $I$ . On note  $n$  la densité de boucle de courant par unité de longueur.
  - 1.4.1. Calculer le champ magnétique en tout point de l'axe  $(Oz)$ .
  - 1.4.2. En supposant maintenant le solénoïde infini, calculer le champ magnétique en tout point de l'espace en utilisant le théorème d'Ampère. En déduire le potentiel vecteur dans la jauge de Coulomb.

## Exercice 2 : Corps chargés en mouvement

- 2.1.** On considère une sphère conductrice de rayon  $R$  portant une densité surfacique de charge  $\sigma$ . La sphère est mise en rotation autour de l'axe  $(Oz)$  avec une pulsation  $\omega$ .
- 2.1.1.** Calculer le champ magnétique sur l'axe  $(Oz)$  à grande distance de la sphère.
- 2.1.2.** La sphère étant maintenant supposée chargée en volume avec une densité volumique de charge  $\rho$  uniforme, calculer le champ magnétique sur l'axe  $(Oz)$  à grande distance de la sphère.
- 2.2.** On considère un cylindre de rayon  $R$ , d'axe de révolution  $(Oz)$  et de hauteur  $2L$ .
- 2.2.1.** Le cylindre porte une densité de charge surfacique  $\sigma$  et tourne autour de son axe avec une pulsation  $\omega$ . Calculer le champ magnétique sur l'axe  $(Oz)$ .
- 2.2.2.** Le cylindre est maintenant supposé porter une charge en volume avec la densité de charge  $\rho$  uniforme. Calculer le champ magnétique sur l'axe  $(Oz)$ .

## TD 3 : Développement multipolaires

### Exercice 1 : Quadrupôle

- 1.1. On considère une assemblée de trois charges, toutes trois sur l'axe ( $Oz$ ) :  $-q$  située au point  $\frac{d}{2}\vec{u}_z$ ,  $+2q$  au point  $O$  et  $-q$  au point  $-\frac{d}{2}\vec{u}_z$ .
- 1.1.1. Calculer le potentiel électrique à grande distance de l'origine.
- 1.1.2. Expliquer pourquoi le moment dipolaire est nul.
- 1.1.3. En déduire le champ électrique.

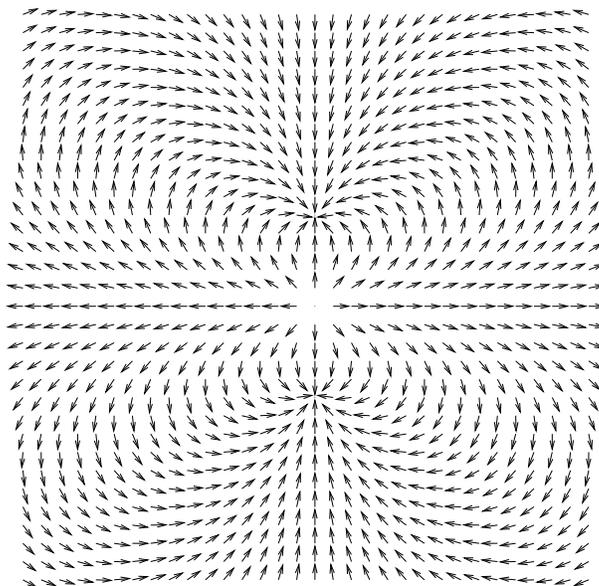


Figure 1.1 : Champ électrique créé par les trois charges.

### Exercice 2 : Ellipsoïde chargé

- 2.1. On considère l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

L'ellipsoïde est uniformément chargé en volume. On note  $\rho$  la densité volumique de charge.

- 2.1.1. Calculer le potentiel loin de l'origine †

---

† L'expression générale du potentiel est donnée par L. Landau et E. Lifchitz (1964) *Théorie des champs*, Ellipses.

### Exercice 3 : Multipôles dûs à une sphère

- 3.1.** Donner des exemples de distribution de charge  $\sigma(\theta, \phi)$  à la surface d'une sphère produisant un champ électrique équivalent à une charge, un dipôle, un quadrupôle ?

## TD 4 : Équation de Laplace

### Exercice 1 : Solution générale en coordonnées sphériques

Dans les régions de l'espace de densité de charge nulle, l'équation de Poisson se réduit à l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = 0$$

Cette relation reste valable même si des charges sont présentes dans d'autres régions. La seule contrainte sur les solutions est la continuité du potentiel  $\varphi$  d'une région à l'autre.

**1.1.** En coordonnées sphériques, l'équation de Laplace a pour expression

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

**1.1.1.** L'équation est à variables séparables en posant

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \varphi_r(r) \varphi_{\text{ang}}(\theta, \phi)$$

Écrire les deux équations différentielles satisfaites respectivement par  $\varphi_r(r)$  et  $\varphi_{\text{ang}}(\theta, \phi)$ .

**1.1.2.** Montrer que  $\varphi_r(r) = Ar^\alpha$  est solution pour certaines valeurs de  $\alpha$ . En déduire la solution générale de l'équation satisfaite par  $\varphi_r(r)$ .

**1.1.3.** On sépare de nouveau les variables dans la seconde équation différentielle, i.e. celle satisfaite par  $\varphi_{\text{ang}}(\theta, \phi)$ , en posant

$$\varphi_{\text{ang}}(\theta, \phi) = \varphi_\theta(\theta) \varphi_\phi(\phi)$$

Écrire les deux équations différentielles auxquelles on aboutit. On posera  $u = \cos \theta$  pour simplifier la seconde d'entre elles.

**1.1.4.** Montrer que les solutions de l'équation différentielle satisfaite par  $\varphi_\phi(\phi)$  sont les exponentielles complexes.

**1.1.5.** Les solutions de la seconde des équations différentielles sont les polynômes de Legendre associés  $P_l^m(\cos \theta)$ . Écrire la solution générale de l'équation de Laplace.

## Exercice 2 : Sphère maintenue à un potentiel constant

- 2.1.** On considère une sphère conductrice de centre  $O$  et de rayon  $R$  maintenue à un potentiel constant  $\varphi_0$  à sa surface.
- 2.1.1.** Étudier les symétries du système.
- 2.1.2.** Pour tout  $r > R$ , le potentiel créé par la sphère satisfait l'équation de Laplace. Donner la solution générale de cette équation satisfaisant les contraintes déterminées à la question précédente.
- 2.1.3.** Déterminer les constantes et en déduire l'expression du potentiel en tout point  $r > R$ .
- 2.1.4.** En déduire la distribution de charge induite à la surface de la sphère.

## Exercice 3 : Potentiel et champ dans un condensateur diédrique

- 3.1.** On considère deux plans infinis formant entre eux un angle  $\alpha$  et maintenus à des potentiels  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  respectivement. On choisit l'axe  $(Oz)$  sur l'intersection des deux plans et on utilise le système de coordonnées cylindriques. A l'intérieur du condensateur, le potentiel est solution de l'équation de Laplace.
- 3.1.1.** Étudier les symétries du système.
- 3.1.2.** Écrire puis résoudre l'équation de Laplace.
- 3.1.3.** En déduire l'expression du potentiel et du champ électrique.

## TD 5 : Équation de Laplace (bis)

### Exercice 1 : Sphère à la terre plongée dans un champ uniforme

1.1. On considère une sphère conductrice de centre  $O$  et de rayon  $R$  plongée dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}_{\text{ex.}} = E_{\text{ex.}}\vec{u}_z$ . La sphère est mise à la terre, i.e. le potentiel est nul à sa surface.

1.1.1. Écrire le potentiel dont dérive le champ électrique  $\vec{E}_{\text{ex.}}$ .

1.2. Le potentiel créé par la sphère conductrice satisfait l'équation de Laplace. dont la solution générale en coordonnées sphériques est

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} \left( A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_{lm}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

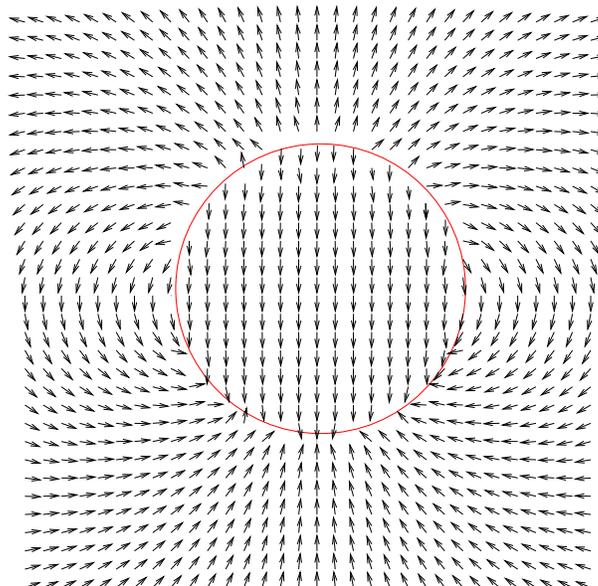
1.2.1. Étudier les symétries du problème et en déduire des contraintes sur les constantes de la solution.

1.2.2. Imposer l'annulation du potentiel **total** à la surface de la sphère.

1.2.3. En déduire le potentiel total et le champ électrique hors de la sphère.

1.2.4. Donner l'expression de la charge induite à la surface de la sphère.

1.2.5. Montrer que la sphère conductrice porte un moment dipolaire dont on donnera l'expression.



**Figure 1.1** : Champ électrique créé par une sphère portant une distribution de charge  $\sigma(\theta, \phi) = \sigma_0 \cos \theta$ .

## Exercice 2 : Sphère portant une densité surfacique de charge

On considère une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$  portant une densité surfacique de charge  $\sigma(\theta, \phi)$ .

- 2.1.** Rappeler l'expression du potentiel créé par la sphère en tout point de l'espace lorsque  $\sigma(\theta, \phi) = \sigma_0 = \text{Cste}$ .
- 2.2.** Pour tout  $r \neq R$ , le potentiel créé par la sphère satisfait l'équation de Laplace qui admet pour solution en coordonnées sphériques :

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} \left( A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_{lm}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

- 2.2.1.** En imposant l'absence de divergence du potentiel, éliminer certaines constantes dans les régimes  $r < R$  et  $r > R$ .
- 2.2.2.** Imposer la continuité du potentiel en tout point de l'espace, notamment en  $r = R$ . On rappelle les relations d'orthogonalisation

$$\int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) P_{l'}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}, \quad \int_0^{2\pi} e^{i(m+m')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m,-m'}$$

- 2.2.3.** Imposer la discontinuité de la composante normale du champ électrique à la traversée de la surface de la sphère.
- 2.2.4.** En déduire l'expression du potentiel dans les deux régimes  $r < R$  et  $r > R$ . Pour alléger les notations, on pourra poser

$$\sigma_{lm} = \int \sigma(\theta, \phi) P_{lm}(\cos \theta) e^{-im\phi} \sin \theta d\theta d\phi$$

- 2.2.5.** En introduisant la définition des harmoniques sphériques,

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

montrer qu'on retrouve l'expression du cours pour  $r > R$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

où les moments multipolaires sont effectivement donnés

$$q_{lm} = \int \rho(\vec{r}) r^l Y_{l,m}^*(\theta, \phi) d^3\vec{r}$$

## TD 6 : Milieux polarisés

### Exercice 1 : Plaque infinie polarisée

- 1.1. On considère une plaque d'épaisseur  $a$  dans la direction  $(Ox)$  et infinie dans les deux autres directions de l'espace. La plaque est supposée uniformément polarisée de vecteur polarisation  $\vec{P}$  faisant un angle  $\alpha$  avec  $(Ox)$ .
- 1.1.1. Donner l'expression de la distribution de charge de polarisation  $\rho_{\text{pol}}(\vec{r})$  et  $\sigma_{\text{pol}}$  équivalente à la polarisation  $\vec{P}$ .
- 1.1.2. En déduire le champ électrique en tout point de l'espace.

### Exercice 2 : Plaque infinie diélectrique

- 2.1. On considère une plaque diélectrique de constante  $\varepsilon_r$ , d'épaisseur  $a$  dans la direction  $(Ox)$  et infinie dans les deux autres directions de l'espace. On crée dans la plaque un champ électrique  $\vec{E}_{\text{ex}} = E_0 \vec{u}_x$  en imposant une densité de charge  $\pm\sigma_{\text{ex}}$  sur ses deux surfaces.
- 2.1.1. Calculer le champ d'induction électrique en tout point de l'espace.
- 2.1.2. En déduire le champ électrique total en tout point de l'espace puis la polarisation de la plaque.
- 2.1.3. Quelle est la distribution de charge équivalente à cette polarisation ?

### Exercice 3 : Champ électrique créé par une sphère polarisée

- 3.1. On considère une sphère de rayon  $R$  et d'origine  $O$ . La sphère porte une polarisation  $\vec{P} = P_0 \vec{u}_z$  uniforme.
- 3.1.1. Donner l'expression de la distribution de charge de polarisation  $\rho_{\text{pol}}(\vec{r})$  et  $\sigma_{\text{pol}}$  équivalente à la polarisation  $\vec{P}$ .
- 3.1.2. Calculer le potentiel créé par cette distribution de charge.

### Exercice 4 : Sphère diélectrique plongée dans un champ uniforme

- 4.1. On considère une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$  et de constante diélectrique  $\varepsilon_r$  plongée dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}_{\text{ex}} = E_{\text{ex}} \vec{u}_z$ .
- 4.1.1. Donner le potentiel dont dérive  $\vec{E}_{\text{ex}}$ .
- 4.1.2. Calculer le potentiel créé par la sphère diélectrique.

## TD 7 : Milieux aimantés

### Exercice 1 : Cylindre uniformément aimanté

- 1.1. On considère un cylindre plein de rayon  $a$  et de longueur  $2L$  possédant une aimantation uniforme  $\vec{M} = M\vec{u}_z$  dans tout le volume. On s'intéresse au champ magnétique  $\vec{B}$  créé en tout point  $P$  situé sur l'axe du cylindre.
- 1.1.1. Déterminer le système de courants ampériens équivalent à l'aimantation du cylindre et en déduire le champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point de l'axe.
- 1.1.2. Déterminer le système de masses magnétiques équivalent à l'aimantation du cylindre et en déduire le champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point de l'axe.
- 1.1.3. Examiner les cas  $L \gg a$  et  $L \ll a$ .

### Exercice 2 : Plaque paramagnétique

- 2.1. Une plaque paramagnétique de perméabilité relative  $\mu_r$ , d'épaisseur  $d$ , de longueur et de largeur très grandes devant  $a$  est plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}_{ex}$ . La plaque acquiert une aimantation uniforme  $\vec{M}$ .

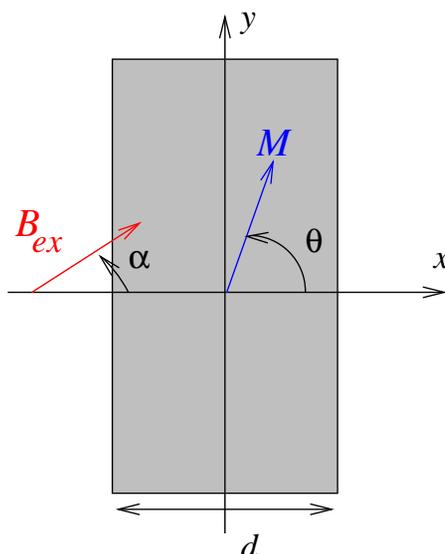


Figure 2.1 : Plaque paramagnétique.

- 2.1.1.** Déterminer le système de courants ampériens équivalent à l'aimantation de la plaque et en déduire le champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point de l'axe.
- 2.1.2.** Déterminer le système de masses magnétiques équivalent à l'aimantation de la plaque et en déduire le champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point de l'axe.
- 2.1.3.** En écrivant  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ , en déduire une relation liant les angles  $\alpha$  et  $\theta$  et donner l'expression de  $M$  en fonction de  $B_{\text{ex.}}$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_r$  et de  $\alpha$ .
- 2.1.4.** Examiner les cas particuliers  $\alpha = 0$  et  $\alpha = \pi/2$ .
- 2.1.5.** Expliquer le phénomène de réfraction des lignes de champ.

## TD 8 : Milieux aimanté et aimantable

### Exercice 1 : Sphère uniformément aimantée

- 1.1.** On considère une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  uniformément aimantée d'aimantation  $\vec{M} = M_0 \vec{u}_z$ . On utilisera dans un premier temps la méthode des masses magnétiques.
- 1.1.1.** Déterminer la distribution de masses magnétiques équivalente à la sphère aimantée.
- 1.1.2.** En déduire le potentiel électrique correspondant en intégrant l'équation de Laplace en tout point de l'espace.
- 1.1.3.** En déduire les champs d'excitation et d'induction magnétiques à l'intérieur de la sphère.
- 1.1.4.** Montrer qu'à grande distance de la sphère, on retrouve le champ créé par un moment magnétique dont on donnera l'expression.
- 1.1.5.** Tracer l'allure des lignes de champ magnétique.
- 1.2.** On utilise à présent la méthode du champ auxiliaire. Le potentiel vecteur créé par une aimantation  $\vec{M}$  uniforme peut s'écrire

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \wedge \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \\ &= \vec{M} \wedge \vec{E}_{\text{aux.}}\end{aligned}$$

Il apparaît l'expression d'un champ électrique fictif  $\vec{E}_{\text{aux.}}$  avec  $1/\mu_0$  à la place de  $\epsilon_0$ .

- 1.2.1.** Déterminer la distribution de charge créant le champ électrique fictif  $\vec{E}_{\text{aux.}}$ .
- 1.2.2.** Calculer  $\vec{E}_{\text{aux.}}$  par une méthode d'électrostatique.
- 1.2.3.** En déduire le champ magnétique  $\vec{B}$ .

## Exercice 2 : Confinement des lignes de champ magnétique

Si aucun courant excitateur ne circule à surface d'un milieu aimanté de permittivité relative  $\mu_r$ , les conditions de passage du champ d'excitation magnétique  $\vec{H}$  imposent la continuité de ses composantes transverse et normale. Le champ excitateur est donc identique à l'extérieur et à l'intérieur du milieu. Si ce dernier est linéaire, il vient

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_1 = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}_2$$

i.e. l'aimantation amplifie le champ magnétique dans le milieu. Dans la limite d'une permittivité grande, on a annulation du champ à l'extérieur :

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{\mu_r} \vec{B}_2 \underset{\mu_r \gg 1}{\simeq} 0$$

Or la relation de Maxwell-Gauss magnétique impose l'annulation du flux du champ magnétique à travers toute surface fermée, notamment la frontière du milieu. Par conséquent, les lignes de champ magnétiques doivent nécessairement se refermer à l'intérieur du milieu magnétique. On a donc un phénomène de confinement ou piégeage des lignes de champ magnétique qui peut notamment servir à diriger les lignes de champ dans la direction voulue.

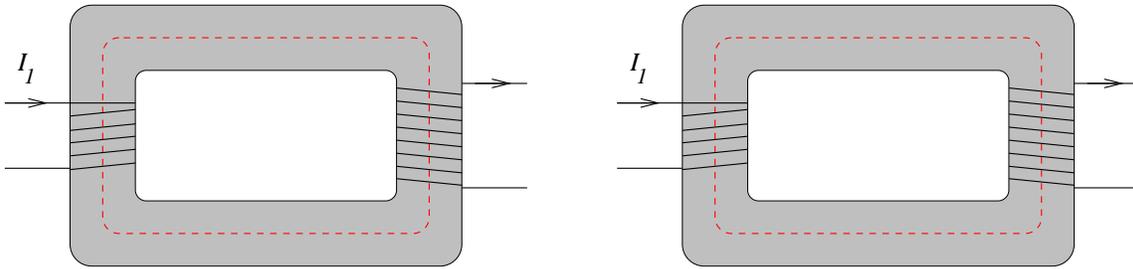


Figure 2.1 :

**2.1.** On considère le transformateur à gauche de la figure. Deux bobines formées de respectivement  $N_1$  et  $N_2$  spires sont enroulées autour d'un noyau ferromagnétique de permittivité relative  $\mu_r$ .

**2.1.1.** Calculer le champ d'excitation magnétique dans chacune des deux bobines.

**2.1.2.** En déduire le rapport des intensités  $I_1$  et  $I_2$ .

**2.2.** On considère à présent l'électro-aimant à droite de la figure

**2.2.1.** Calculer le champ  $\vec{H}$  dans le noyau de l'électro-aimant puis dans l'entrefer (dans la limite d'une aimantation faible).

**2.2.2.** En déduire le champ d'induction  $\vec{B}$  dans l'entrefer.